

# CORDIC: FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

Claudemir Aniz  
UFMS - Campo Grande - MS  
<[claudemir.aniz@ufms.br](mailto:claudemir.aniz@ufms.br)>

Antônio Cézare de Araújo Giansante  
UNEMAT - Tangará da Serra - MT  
<[profcab@yahoo.com.br](mailto:profcab@yahoo.com.br)>

Artigo avaliado por pareceristas  
e recomendado pelo editor Ronaldo Garcia

Recebido em: 12/01/2018 e  
revisado pelos autores em 25/08/2018.

## RESUMO

O COordinate Rotation DIGital Computer, abreviado por CORDIC, é um método numérico introduzido por Volder para calcular funções trigonométricas. Walther generalizou este algoritmo para calcular funções hiperbólicas, logarítmicas, exponenciais e raiz quadrada. Neste artigo, apresentaremos este método para as funções seno e cosseno hiperbólicos.

**Palavras-chave:** cosseno hiperbólico; seno hiperbólico; condição de convergência

## INTRODUÇÃO

De acordo com Sultan [Sultan \(2009\)](#), as calculadoras utilizam o método CORDIC para calcular seno, cosseno e outras funções. Em 1959 Jack E. Volder [Volter \(1959\)](#) desenvolveu o algoritmo CORDIC para o cálculo em tempo real das funções trigonométricas sem o uso de muito hardware, e sugeriu que com pequenas modificações poderia se calcular outras funções elementares. Em 1971, J. S. Walther [Walther \(1971\)](#) generalizou este método para calcular funções hiperbólicas, exponenciais, logarítmicas e raiz quadrada. O CORDIC que aproxima as funções seno e cosseno hiperbólicos, consiste em realizar  $n$  iterações em três equações, dadas por

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \delta_k y_k 2^{-\phi(k)} \\ y_{k+1} = y_k + \delta_k x_k 2^{-\phi(k)} \\ z_{k+1} = z_k - \delta_k \varepsilon_k \end{cases} .$$

Sendo  $k \geq 1$ ,  $\varepsilon_k = \tanh^{-1}(2^{-\phi(k)})$ ,  $x_1 = \prod_{k=1}^n \cosh \varepsilon_k$ ,  $y_1 = 0$ ,  $z_1 = \theta$ ,  $\tanh^{-1}$  a função inversa da tangente hiperbólica e  $\delta_k = \text{sgn}(z_k) = \begin{cases} 1 & \text{se } z_k \geq 0 \\ -1 & \text{se } z_k < 0 \end{cases}$ . A função  $\phi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$  é definida pondo

$\phi(k) = k - p$ , onde  $p$  é o maior inteiro tal que  $3^{p+1} + 2p - 1 \leq 2k$ . Uma condição para convergência é dada pelo teorema 1, e o erro que se comete nas aproximações depende do número de iterações. As adaptações feitas por Walther para garantir a convergência, e que são realizadas pela função  $\phi$ , são citadas em Walther (1971) com indicação sucinta de sua demonstração. O principal objetivo deste artigo é demonstrar em detalhes estas correções. Outros trabalhos utilizando CORDIC no cálculo das funções elementares podem ser encontradas em Eklund (1998), Giansante (2014), Muller (2006), Schelin (1983) e Underwood (2017).

Este trabalho está dividido em duas partes. A primeira contém um resumo das principais propriedades das funções hiperbólicas e um exemplo de como calcular  $\cosh \theta$  e  $\sinh \theta$  usando rotações hiperbólicas. A segunda é dedicada à apresentação detalhada do algoritmo CORDIC com foco na demonstração das correções que garantem a sua convergência.

## FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

Considere a hipérbole  $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 - y^2 = 1\}$ . O ponto  $P = (x, y) \in \mathcal{H}$  define um setor hiperbólico  $AOP$  e um ângulo hiperbólico  $\widehat{AOP}$ . Dizemos que o ângulo hiperbólico  $\widehat{AOP}$  mede  $\theta$  se a área do setor hiperbólico  $AOP$  mede  $\theta/2$  unidades de área, Figura (1). Convenção:

- i) Se o ponto  $P$  estiver acima do eixo  $x$ , o ângulo terá medida positiva.
- ii) Se o ponto  $P$  estiver abaixo do eixo  $x$ , o ângulo terá medida negativa.

Com esta convenção os valores de  $\theta$  estarão entre  $-\infty$  e  $+\infty$ .

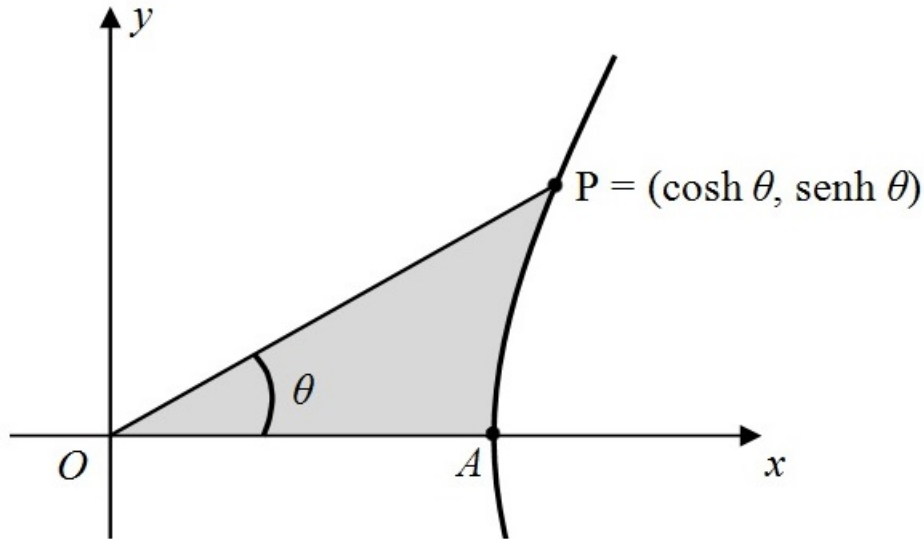


Figura 1: setor hiperbólico

O ponto  $P$  tem coordenadas  $x = \cosh \theta$  e  $y = \sinh \theta$ , cosseno e seno hiperbólico. Em [Carvalho \(2017\)](#), encontram-se as seguintes igualdades:

$$\text{iii) } \cosh \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2};$$

$$\text{iv) } \sinh \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}.$$

Usando as relações (iii) e (iv), podemos mostrar que :

$$\text{v) } \cosh(\theta_1 \pm \theta_2) = \cosh \theta_1 \cosh \theta_2 \pm \sinh \theta_1 \sinh \theta_2;$$

$$\text{vi) } \sinh(\theta_1 \pm \theta_2) = \sinh \theta_1 \cosh \theta_2 \pm \cosh \theta_1 \sinh \theta_2;$$

vii) A função cosseno hiperbólico é par e a função seno hiperbólico é ímpar.

Sendo  $P_1 = (x_1, y_1) \in \mathcal{H}$ , a rotação hiperbólica de um ângulo  $\theta$  do vetor  $\overrightarrow{OP_1}$  é o deslocamento do vetor de modo que sua extremidade permaneça em  $\mathcal{H}$  e percorra um ângulo hiperbólico  $\theta$ . O vetor  $\overrightarrow{OP_2}$  obtido por esta rotação tem coordenadas  $(x_2, y_2) \in \mathcal{H}$  onde

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = M_\theta \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \text{ e } M_\theta = \begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix}.$$

Observe que a rotação hiperbólica não tem o mesmo significado da rotação circular.

A função tangente hiperbólica é definida por  $\tanh \theta = \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta}$  e vale a igualdade  $\tanh \theta = \frac{e^{2\theta} - 1}{e^{2\theta} + 1}$ . Os próximos resultados serão utilizados na última seção.

**Lema 1.**  $\frac{1}{2} \tanh \theta \leq \tanh \left( \frac{\theta}{2} \right)$  para todo  $\theta \geq 0$ .

**Demonstração:**  $\frac{1}{2} \tanh \theta \leq \tanh \left( \frac{\theta}{2} \right)$  se, e somente se,  $\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2\theta} - 1}{e^{2\theta} + 1} \leq \frac{e^\theta - 1}{e^\theta + 1}$  se, e somente se,  $(e^{2\theta} - 1)(e^\theta + 1) \leq 2(e^\theta - 1)(e^{2\theta} + 1)$  se, e somente se,  $(e^\theta - 1)^3 \geq 0$ . A última desigualdade é verdadeira para todo  $\theta \geq 0$ .  $\square$

**Lema 2.**  $\frac{1}{2^n} \leq \tanh \left( \frac{1}{2^{n-1}} \right)$  para todo natural  $n \geq 1$ .

**Demonstração:** A demonstração é feita por indução. Para  $n = 1$ , a desigualdade é verdadeira, visto que,  $\frac{1}{2} \leq \tanh(1) \approx 0.762$ . Se  $\frac{1}{2^n} \leq \tanh \left( \frac{1}{2^{n-1}} \right)$  para algum  $n \geq 1$ , então

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2} \cdot \tanh \left( \frac{1}{2^{n-1}} \right) \leq \tanh \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \right).$$

Ou seja,  $\frac{1}{2^{n+1}} \leq \tanh \left( \frac{1}{2^n} \right)$ .  $\square$

A função tangente hiperbólica é estritamente crescente e sua inversa será denotada por  $\tanh^{-1}$ . Pelo lema 2, temos  $\tanh^{-1} \left( \frac{1}{2^n} \right) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ , para todo  $n \geq 1$ .

## CALCULANDO COSSENO E SENO HIPERBÓLICO

Dado  $\theta$ , suponha que queremos calcular  $\cosh \theta$  e  $\sinh \theta$ . A ideia é aproximar o ângulo  $\theta$  por somas de ângulos  $\pm\theta_k$  onde  $\theta_k = \tanh^{-1}(1/2^k)$  para números naturais  $k \geq 1$ . Ao se aproximar o ângulo  $\theta$  pela soma  $s_{n+1}$ , os valores de  $\cosh \theta$  e  $\sinh \theta$  são aproximados pelas coordenadas do vetor  $\overrightarrow{OP_{n+1}} = (\cosh(s_{n+1}), \sinh(s_{n+1}))$  obtido do vetor  $\overrightarrow{OP_1} = (1, 0)$  pela rotação hiperbólica do ângulo  $s_{n+1}$ , isto é,

$$\begin{bmatrix} \cosh(s_{n+1}) \\ \sinh(s_{n+1}) \end{bmatrix} = M_{\pm\theta_n} \cdots M_{\pm\theta_1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que,

$$M_{\pm\theta_k} = \begin{bmatrix} \cosh(\pm\theta_k) & \sinh(\pm\theta_k) \\ \sinh(\pm\theta_k) & \cosh(\pm\theta_k) \end{bmatrix} = \cosh \theta_k \cdot \begin{bmatrix} 1 & \tanh(\pm\theta_k) \\ \tanh(\pm\theta_k) & 1 \end{bmatrix}.$$

Para exemplificar, calculemos  $\cosh \theta$  e  $\sinh \theta$  para  $\theta = 0.61$ , Figura (2). O ângulo  $\theta = 0.61$  é aproximado por

$$\begin{aligned} s_5 &= \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 \\ &= 0.549306144 + 0.255412811 - 0.125657214 - 0.062581571 \\ &= 0.616480170 \end{aligned}$$

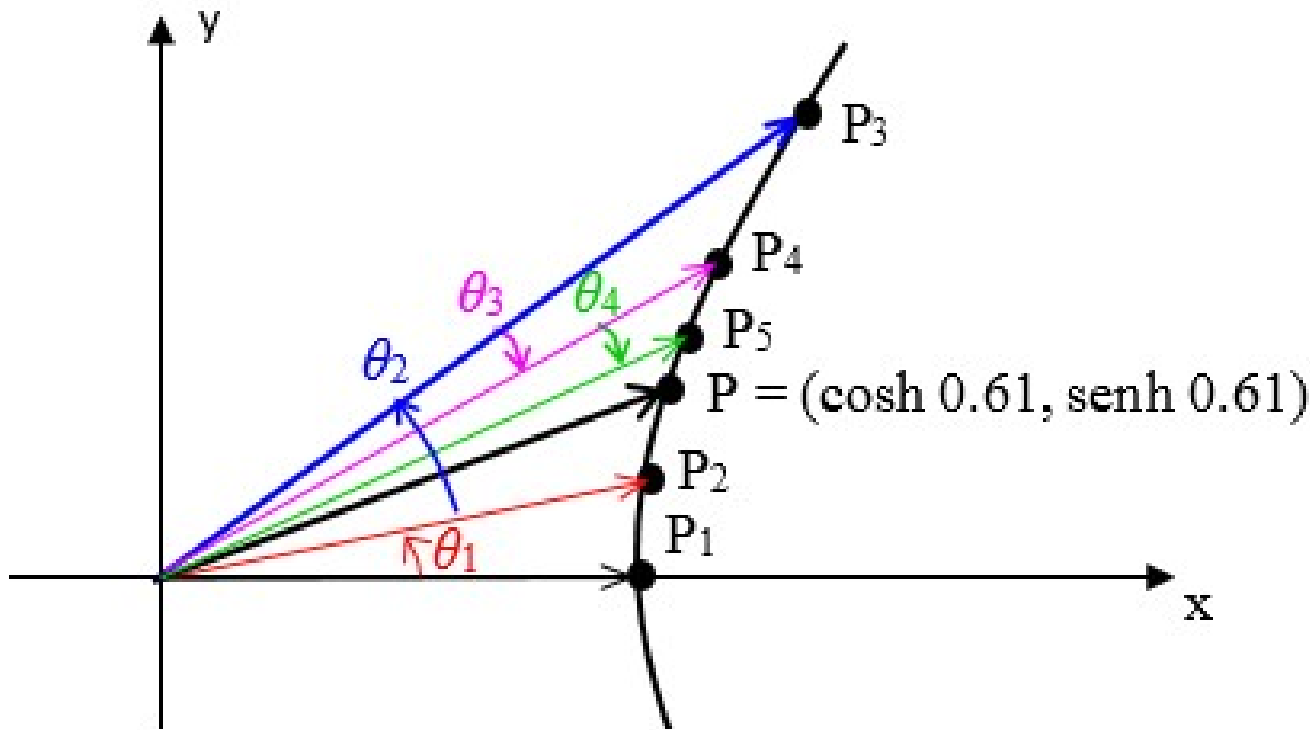


Figura 2: sequência de aproximações

Então,

$$\begin{bmatrix} \cosh(s_5) \\ \sinh(s_5) \end{bmatrix} = K \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

sendo  $K = \cosh \theta_4 \cdot \cosh \theta_3 \cdot \cosh \theta_2 \cdot \cosh \theta_1 = 1.204351713$ .

Efetuando os produtos, obtemos

$$\begin{bmatrix} \cosh(s_5) \\ \sinh(s_5) \end{bmatrix} = 1.204351713 \cdot \begin{bmatrix} 0.993164062 \\ 0.544921875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.196118839 \\ 0.656277593 \end{bmatrix}.$$

Logo,  $\cosh 0.61 \approx 1.196118839$  e  $\sinh 0.61 \approx 0.656277593$ .

Infelizmente, não podemos garantir que somas de ângulos  $\pm\theta_k$  convirjam para qualquer valor de  $\theta$ . A próxima seção fornece uma condição para que isto ocorra.

### CONDIÇÃO DE CONVERGÊNCIA

A garantia de convergência do algoritmo CORDIC depende do próximo teorema, demonstrado em [Schelin \(1983\)](#).

**Teorema 1.** (Teorema de Convergência) *Suponha que  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_n > 0$  é uma sequência finita de números reais tal que*

$$\varepsilon_k \leq \varepsilon_n + \sum_{j=k+1}^n \varepsilon_j, \text{ para } 1 \leq k < n, \quad (1)$$

e suponha que  $r$  é um número real tal que

$$|r| \leq \sum_{j=1}^n \varepsilon_j. \quad (2)$$

Se  $s_1 = 0$  e  $s_{k+1} = s_k + \delta_k \varepsilon_k$  para  $1 \leq k \leq n$ , onde

$$\delta_k = \operatorname{sgn}(r - s_k) = \begin{cases} 1, & \text{se } r \geq s_k \\ -1, & \text{se } r < s_k \end{cases}$$

então

$$|r - s_k| \leq \varepsilon_n + \sum_{j=k}^n \varepsilon_j, \text{ para } 1 \leq k \leq n,$$

em particular  $|r - s_{n+1}| \leq \varepsilon_n$ .

A desigualdade (1) é a condição de convergência, e a desigualdade (2) fornece o raio de convergência.

A sequência de números reais positivos  $\theta_k = \tanh^{-1}(2^{-k})$ , com  $1 \leq k \leq 13$ , é decrescente mas não satisfaz a condição de convergência, Tabela (1).

	$\theta_k$	$\theta_{13} + \sum_{j=k+1}^{13} \theta_j$		$\theta_k$	$\theta_{13} + \sum_{j=k+1}^{13} \theta_j$
1	0.549306144	0.506163226	8	0.003906270	0.003906252
2	0.255412811	0.250750415	9	0.001953127	0.001953125
3	0.125657214	0.125093201	10	0.000976563	0.000976562
4	0.062581571	0.062511630	11	0.000488281	0.000488281
5	0.031260178	0.031251452	12	0.000244141	0.000244140
6	0.015626271	0.015625181	13	0.000122070	
7	0.007812659	0.007812522			

Tabela 1: sequência  $\theta_k$ , com  $1 \leq k \leq 13$ , seguida das somas da desigualdade (1)

Duplicando as entradas quatro e treze da Tabela (1), obtemos a sequência  $\varepsilon_k$ , para  $1 \leq k \leq 15$ , Tabela (2).

	$\varepsilon_k$	$\varepsilon_{15} + \sum_{j=k+1}^{15} \varepsilon_j$		$\varepsilon_k$	$\varepsilon_{15} + \sum_{j=k+1}^{15} \varepsilon_j$
1	0.549306144	0.568866867	9	0.003906270	0.004028322
2	0.255412811	0.313454056	10	0.001953127	0.002075195
3	0.125657214	0.187796842	11	0.000976563	0.001098632
4*	0.062581571	0.125215271	12	0.000488281	0.000610351
5*	0.062581571	0.062633700	13	0.000244141	0.000366210
6	0.031260178	0.031373522	14*	0.000122070	0.000244140
7	0.015626271	0.015747251	15*	0.000122070	
8	0.007812659	0.007934592			

Tabela 2: sequência obtida da Tabela (1), duplicando as entradas quatro e quatorze.

Observando a Tabela (2), podemos concluir que  $\varepsilon_k \leq \varepsilon_{15} + \sum_{j=k+1}^{15} \varepsilon_j$  para todo  $1 \leq k < 15$ , isto é, a sequência  $\varepsilon_k$  satisfaz a condição de convergência. Em [Walther \(1971\)](#), Walther pontuou que os índices que devem ser repetidos pertencem ao conjunto  $\{4, 13, 40, 121, \dots, i, 3i + 1, \dots\}$ . Na próxima seção apresentaremos a demonstração deste resultado.

## CORREÇÕES DA SEQUÊNCIA

Esta seção contém a parte principal deste trabalho. Demonstramos em detalhes as correções feitas na sequência  $\theta_k$  para garantir a condição de convergência.

**Lema 3.**  $2^{-3n+3} - 2^{-3n+2} \geq 2^{-5n+5} - 2^{-5n+3}$  para todo natural  $n \geq 2$ .

**Demonstração:** Vamos demonstrar a desigualdade utilizando indução matemática. Para  $n = 2$ , a desigualdade  $2^{-3} - 2^{-4} \geq 2^{-5} - 2^{-7}$  é verdadeira, pois é equivalente a  $\frac{8}{128} \geq \frac{3}{128}$ . Suponha que  $2^{-3n+3} - 2^{-3n+2} \geq 2^{-5n+5} - 2^{-5n+3}$  é verdadeira para  $n \geq 2$ . Como  $2^{-3} \geq 2^{-5}$ , então

$$2^{-3}(2^{-3n+3} - 2^{-3n+2}) \geq 2^{-5}(2^{-5n+5} - 2^{-5n+3}).$$

Ou seja,  $2^{-3(n+1)+3} - 2^{-3(n+1)+2} \geq 2^{-5(n+1)+5} - 2^{-5(n+1)+3}$ .  $\square$

Em [Leithold \(1994\)](#), pág. 525, encontra-se a igualdade  $\theta_k = \tanh^{-1}(2^{-k}) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + 2^{-k}}{1 - 2^{-k}} \right)$  para todo  $k \geq 1$ , que será utilizada nos próximos resultados.

**Lema 4.**  $2\theta_n + \theta_{3(n-1)+1} - \theta_{n-1} \geq 0$  para todo natural  $n \geq 2$ .

**Demonstração:** As desigualdades abaixo são equivalentes.

- i)  $2\theta_n + \theta_{3(n-1)+1} - \theta_{n-1} \geq 0$ ;
- ii)  $\frac{1}{2} \ln \left[ \left( \frac{1 + 2^{-n}}{1 - 2^{-n}} \right)^2 \cdot \left( \frac{1 - 2^{-(n-1)}}{1 + 2^{-(n-1)}} \right) \cdot \left( \frac{1 + 2^{-(3n-2)}}{1 - 2^{-(3n-2)}} \right) \right] \geq 0$ ;
- iii)  $(1 + 2^{-n})^2 \cdot (1 - 2^{-n+1}) \cdot (1 + 2^{-3n+2}) \geq (1 - 2^{-n})^2 \cdot (1 + 2^{-n+1}) \cdot (1 - 2^{-3n+2})$ ;
- iv)  $2^{-3n+3} - 2^{-5n+5} + 2^{-5n+3} - 2^{-3n+2} \geq 0$ .

Pelo lema 3, a desigualdade (iv) é verdadeira.  $\square$

**Lema 5.**  $2^{-3m+2} - 2^{-3m-1} - 2^{-3m+1} \geq -2^{-5m+2} + 2^{-5m+4}$  para todo natural  $m \geq 2$ .

**Demonstração:** Vamos demonstrar a desigualdade utilizando indução matemática. Para  $m = 2$ , a desigualdade  $2^{-4} - 2^{-7} - 2^{-5} \geq -2^{-8} + 2^{-6}$  é verdadeira, pois é equivalente a  $\frac{6}{256} \geq \frac{3}{256}$ . Suponha que  $2^{-3m+2} - 2^{-3m-1} - 2^{-3m+1} \geq -2^{-5m+2} + 2^{-5m+4}$  é verdadeira para  $m \geq 2$ . Como  $2^{-3} \geq 2^{-5}$ , então  $2^{-3}(2^{-3m+2} - 2^{-3m-1} - 2^{-3m+1}) \geq 2^{-5}(-2^{-5m+2} + 2^{-5m+4})$ . Portanto,

$$2^{-3(m+1)+2} - 2^{-3(m+1)-1} - 2^{-3(m+1)+1} \geq -2^{-5(m+1)+2} + 2^{-5(m+1)+4}. \square$$

**Lema 6.**  $2\theta_m - \theta_{3m+1} - \theta_{m-1} + \theta_{3(m-1)+1} \geq 0$  para todo natural  $m \geq 2$ .

**Demonstração:** As desigualdades abaixo são equivalentes.

- i)  $2\theta_m - \theta_{3m+1} - \theta_{m-1} + \theta_{3(m-1)+1} \geq 0$ ;
- ii)  $\frac{1}{2} \ln \left[ \left( \frac{1 + 2^{-m}}{1 - 2^{-m}} \right)^2 \cdot \left( \frac{1 - 2^{-(m-1)}}{1 + 2^{-(m-1)}} \right) \cdot \left( \frac{1 + 2^{-(3m-2)}}{1 - 2^{-(3m-2)}} \right) \cdot \left( \frac{1 - 2^{-(3m+1)}}{1 + 2^{-(3m+1)}} \right) \right] \geq 0$ ;
- iii)  $M_1 \geq M_2$ , sendo  $M_1 = (1 + 2^{-m})^2(1 - 2^{-m+1})(1 + 2^{-3m+2})(1 - 2^{-3m-1})$  e
 
$$M_2 = (1 - 2^{-m})^2(1 + 2^{-m+1})(1 - 2^{-3m+2})(1 + 2^{-3m-1});$$
- iv)  $S_1 + S_2 \geq 0$ , onde  $S_1 = 2^{-5m+1} - 2^{-5m-1} + 2^{-9m+2}$  e
 
$$S_2 = 2^{-3m+2} - 2^{-3m-1} - 2^{-3m+1} + 2^{-5m+2} - 2^{-5m+4}.$$

Como  $S_1 \geq 0$  para todo  $m \geq 2$  e pelo lema 5,  $S_2 \geq 0$ , o resultado segue.  $\square$

**Lema 7.** Se  $\theta_{n-k} \leq \theta_n + \left( \sum_{j=(n-k)+1}^n \theta_j \right) + \theta_{3(n-k)+1}$  para  $1 \leq k < n - 1$  e  $n \geq 3$ , então

$$\theta_{n-(k+1)} \leq \theta_n + \left( \sum_{j=(n-(k+1))+1}^n \theta_j \right) + \theta_{3(n-(k+1))+1}.$$

**Demonstração:** As desigualdades abaixo são equivalentes:

i)  $\theta_{n-(k+1)} \leq \theta_n + \sum_{j=n-k}^n \theta_j + \theta_{3(n-k-1)+1};$

ii)  $\theta_n + \sum_{j=n-k}^n \theta_j - \theta_{n-(k+1)} + \theta_{3(n-k-1)+1} \geq 0;$

iii)  $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 \geq 0$ , onde  $N_1 = \theta_n + \left( \sum_{j=(n-k)+1}^n \theta_j \right) + \theta_{n-k}$ ,

$$N_2 = \theta_{n-k} - \theta_{n-k}, \quad N_3 = \theta_{3(n-k)+1} - \theta_{3(n-k)+1} \text{ e } N_4 = -\theta_{n-k-1} + \theta_{3(n-k-1)+1}.$$

iv)  $P_1 + P_2 \geq 0$ , sendo  $P_1 = \theta_n + \left( \sum_{j=(n-k)+1}^n \theta_j \right) + \theta_{3(n-k)+1} - \theta_{n-k}$  e

$$P_2 = 2\theta_{n-k} - \theta_{3(n-k)+1} - \theta_{(n-k)-1} + \theta_{3((n-k)-1)+1}.$$

Por hipótese  $P_1 \geq 0$  e pelo lema 6,  $P_2 \geq 0$ .  $\square$

**Teorema 2.** Seja  $\theta_k = \tanh^{-1}(2^{-k})$  para  $k \geq 1$ , então

$$D_k : \theta_{n-k} \leq \theta_n + \left( \sum_{j=(n-k)+1}^n \theta_j \right) + \theta_{3(n-k)+1}, \text{ para } 1 \leq k < n \text{ e } n \geq 2. \quad (3)$$

**Demonstração:** A desigualdade  $D_k$  é verdadeira para  $k = 1$ , pois neste caso

$$D_1 : \theta_{n-1} \leq \theta_n + \theta_n + \theta_{3(n-1)+1},$$

que é válida para todo  $n \geq 2$ , pelo lema 4. Se  $D_k$  é verdadeira para algum  $1 \leq k < n - 1$  e  $n \geq 3$ , então pelo lema 7,  $D_{k+1}$  é verdadeira.  $\square$

Como consequência do teorema 2, a sequência obtida repetindo os termos  $\theta_k$  para  $k$  pertencente ao conjunto  $\{4, 13, 40, 121, \dots, i, 3i + 1, \dots\}$  satisfaz a condição de convergência. A seguir apresentamos algumas desigualdades, decorrentes da desigualdade (3).

i)  $\theta_1 \leq \theta_4 + (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) + \theta_4;$

ii)  $\theta_2 \leq \theta_4 + (\theta_3 + \theta_4) + \theta_7 \leq \theta_4 + (\theta_3 + \theta_4) + \theta_4;$

iii)  $\theta_3 \leq \theta_4 + (\theta_4) + \theta_{10} \leq \theta_4 + (\theta_4) + \theta_4;$



- iv)  $\theta_4 \leq \theta_{13} + (\theta_5 + \dots + \theta_{13}) + \theta_{13}$ ;
- v)  $\theta_5 \leq \theta_{13} + (\theta_6 + \dots + \theta_{13}) + \theta_{16} \leq \theta_{13} + (\theta_6 + \dots + \theta_{13}) + \theta_{13}$ ;
- vi)  $\theta_6 \leq \theta_{13} + (\theta_7 + \dots + \theta_{13}) + \theta_{19} \leq \theta_{13} + (\theta_7 + \dots + \theta_{13}) + \theta_{13}$ ;
- vii)  $\theta_{13} \leq \theta_{40} + (\theta_{14} + \dots + \theta_{40}) + \theta_{40}$ ;
- viii)  $\theta_{14} \leq \theta_{40} + (\theta_{15} + \dots + \theta_{40}) + \theta_{43} \leq \theta_{40} + (\theta_{15} + \dots + \theta_{40}) + \theta_{40}$ .

As desigualdades de i) até viii) são para  $k$  em  $\{4, 13, 40\}$ .

Em Muller (2006), pág. 139, define-se a função  $\phi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$  pondo  $\phi(k) = k - p$ , onde  $p$  é o maior inteiro tal que  $3^{p+1} + 2p - 1 \leq 2k$ . Para exemplificar, calculemos alguns valores de  $\phi$ :  $\phi(43) = 43 - 3 = 40$ ,  $\phi(42) = 42 - 2 = 40$ ,  $\phi(41) = 41 - 2 = 39$ ,  $\phi(15) = 15 - 2 = 13$ ,  $\phi(14) = 14 - 1 = 13$ ,  $\phi(13) = 13 - 1 = 12$ ,  $\phi(5) = 5 - 1 = 4$ ,  $\phi(4) = 4 - 0 = 4$ ,  $\phi(3) = 3 - 0 = 3$ . Utilizando a função  $\phi$ , a sequência obtida com as repetições de  $\theta_k$  pode ser escrita por  $\varepsilon_k = \theta_{\phi(k)}$ . Note que,

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \dots, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{14}, \varepsilon_{15}, \dots, \varepsilon_{41}, \varepsilon_{42}, \varepsilon_{43}) = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_4, \dots, \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{13}, \dots, \theta_{39}, \theta_{40}, \theta_{40}).$$

Para contornar o problema de qual  $\theta_k$  deve ser repetido, Eklund Eklund (1998) decide repetir todos os  $\theta_k$  para  $k \geq 2$ . Neste caso, a demonstração do critério de convergência é mais simples, porém o algoritmo fica mais lento, sendo necessário um número maior de iterações para obter a mesma precisão usando a sequência  $\varepsilon_k$ .

## ALGORITMO CORDIC

Considere a matriz

$$M_{\pm\varepsilon_k}^* = \begin{bmatrix} 1 & \tanh(\pm\varepsilon_k) \\ \tanh(\pm\varepsilon_k) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \pm 2^{-\phi(k)} \\ \pm 2^{-\phi(k)} & 1 \end{bmatrix}.$$

Observe que,

$$M_{\pm\varepsilon_k}^* \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \pm y_1 \cdot 2^{-\phi(k)} \\ y_1 \pm x_1 \cdot 2^{-\phi(k)} \end{bmatrix}.$$

Se  $s_{n+1} = \sum_{k=1}^n \pm\varepsilon_k$ , então

$$\begin{bmatrix} \cosh(s_{n+1}) \\ \sinh(s_{n+1}) \end{bmatrix} = M_{\pm\varepsilon_n}^* \cdots M_{\pm\varepsilon_1}^* \cdot \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix} \text{ onde } K = \cosh \varepsilon_n \cdots \cosh \varepsilon_1. \quad (4)$$

Reescrevendo a Equação (4) e adicionando a sequência que aproxima o ângulo  $\theta$ , obtemos as equações CORDIC para calcular seno e cosseno hiperbólico,

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \delta_k y_k 2^{-\phi(k)} \\ y_{k+1} = y_k + \delta_k x_k 2^{-\phi(k)} \\ z_{k+1} = z_k - \delta_k \varepsilon_k \end{cases}.$$

Aqui,  $k \geq 1$ ,  $\varepsilon_k = \tanh^{-1}(2^{-\phi(k)})$ ,  $x_1 = \prod_{k=1}^n \cosh \varepsilon_k$ ,  $y_1 = 0$ ,  $z_1 = \theta$  e  $\delta_k = \operatorname{sgn}(z_k) = \begin{cases} 1 & \text{se } z_k \geq 0 \\ -1 & \text{se } z_k < 0 \end{cases}$ .

A soma dos elementos da Tabela (2) é  $\sum_{j=1}^{15} \varepsilon_j = 1.118050941$ . Portanto, para  $n \geq 15$  os valores de  $|\theta| \leq 1.11$  pertencem ao intervalo de convergência.

**Teorema 3.** Se  $|\theta| \leq 1.11$ , então  $|\cosh \theta - x_{n+1}| < \frac{1}{2^{\phi(n)-2}}$  e  $|\sinh \theta - y_{n+1}| < \frac{1}{2^{\phi(n)-2}}$ .

**Demonstração:** Note que,  $x_{n+1} = \cosh(s_{n+1})$  e  $y_{n+1} = \sinh(s_{n+1})$ . Aplicando o teorema do valor médio (Leithold (1994), pág. 232), a função cosseno hiperbólico, existe um número  $c$  entre  $\theta$  e  $s_{n+1}$  tal que

$$\frac{\cosh \theta - \cosh(s_{n+1})}{\theta - s_{n+1}} = \cosh' c = \sinh c.$$

Pelo teorema 1,  $|\theta - s_{n+1}| \leq \varepsilon_n = \tanh^{-1}(2^{-\phi(n)})$ , e pelo lema 2,  $\tanh^{-1}(2^{-\phi(n)}) \leq 1/2^{\phi(n)-1}$ .

Segue que,

$$|\cosh \theta - x_{n+1}| \leq |\theta - s_{n+1}| \cdot |\sinh c| \leq \frac{1}{2^{\phi(n)-1}} \cdot |\sinh c|$$

Como a função seno hiperbólico é estritamente crescente e  $|c| \leq 1.2$ , então  $|\sinh c| < 2$ .

Portanto,

$$|\cosh \theta - x_{n+1}| < \frac{1}{2^{\phi(n)-1}} \cdot 2 = \frac{1}{2^{\phi(n)-2}}.$$

Analogamente,

$$|\sinh \theta - y_{n+1}| \leq |\theta - s_{n+1}| \cdot |\cosh c| < \frac{1}{2^{\phi(n)-1}} \cdot 2 = \frac{1}{2^{\phi(n)-2}}. \square$$

O teorema 3 fornece um limitante superior para o erro cometido ao se aproximar  $\sinh \theta$  e  $\cosh \theta$  por  $\sinh(s_{n+1})$  e  $\cosh(s_{n+1})$ . Para  $n = 43$ , o erro é menor que  $\frac{1}{2^{\phi(43)-2}} = \frac{1}{2^{38}} \approx 3.638 \cdot 10^{-12}$ , portanto a precisão é de 10 casas decimais.

## REFERÊNCIAS

- Carvalho, Sonia Pinto de. *As Funções Hiperbólicas*. Disponível em: <http://docplayer.com.br/5125774-Sonia-pinto-de-carvalho.html>, acessado em 14/12/2017.
- Eklund, N. *CORDIC: Elementary Function Computation Using Recursive Sequences*. Electronic Proceeding of the ICTCM, C027, 1998.
- Giansante, Antônio Cézare de Araújo. *Algoritmo CORDIC no cálculo das funções elementares*. Dissertação de Mestrado - Profmat, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2014.
- Leithold, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*. Volume 1, Terceira Edição, Editora Harbra, 1994.

Aniz, Giansante

Muller, Jean-Michel. *Elementary Functions: Algorithms and Implementation*. Second Edition, Birkhäuser Boston, 2006.

Schelin, Charles W. *Calculator Function Approximation*. The American Mathematical Monthly, Vol. 90, No. 5, 317- 325, 1983.

Sultan, Alan. *CORDIC: How Hand Calculators Calculate*. The College Mathematics Journal, 87-92, 2009.

Underwood, J. and Edwards, B. *How do calculators calculate trigonometric functions?* Disponível em: <https://people.clas.ufl.edu/bruceedwards/files/paper.pdf>, acessado em 22/12/2017.

Volder, J. E. *The CORDIC Trigonometric Computing Technique*. IRE Trans. Computers, EC-8, 330-334, 1959.

Walther, J. S. *A Unified Algorithm for Elementary Functions*. Joint Computer Conference Proceedings, Springer Vol. 38, 379-385, 1971.