SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

2018, NÚMERO 1
VOLUME 6
ISSN 2319-023X

O USO DO SOFTWARE GeoGebra PARA O ESTUDO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Josenildo da Cunha Lima
EEEFM Min. José A. de Almeida
e EMEIF João César - Areia - PB
<josenildocunhalima@gmail.com>

Luciana Roze de Freitas
Universidade Estadual da Paraíba - UEPB
<lucianarfreitas@hotmail.com>

RESUMO

Neste artigo apresentamos atividades que podem ser realizadas com turmas do Ensino Médio e que tenham noções básicas de funções, área, volume e desigualdade das médias. Apresentamos uma sequência didática, composta por diversas atividades, com a utilização do *software* GeoGebra, de modo que em cada uma delas, o aluno possa conjecturar um resultado de otimização numa aplicação em sala de aula. Algumas dessas atividades têm como objetivo a elaboração de um arquivo do tipo .ggb para se descobrir um valor ótimo para determinado elemento geométrico. Este estudo tem como finalidade mostrar que problemas de otimização podem ser trabalhados no Ensino Médio e que os resultados usados nas resoluções desses problemas são demonstrados com teoremas envolvendo conteúdos matemáticos do Ensino Básico.

Palavras-chave: Ensino de geometria; Otimização; Desigualdade das médias; GeoGebra.

INTRODUÇÃO

Desde os primórdios o homem procurou respostas para perguntas do tipo: "Qual o caminho mais curto entre tais pontos de partida e chegada?", "Como usar certa quantidade de arame para cercar a maior área possível?", "De que maneira vou construir um recipiente com volume fixado de modo a gastar a menor quantidade de material possível?" etc. Na atualidade, empresários buscam otimizar suas produções minimizando gastos ou maximizando lucros. A partir dessas questões cotidianas surgiu o ramo da Matemática, que trata de problemas de máximos ou mínimos, denominado de otimização.

Os estudos de otimização e problemas de tangentes a curvas deram origem à noção de derivada que é um dos conteúdos do Cálculo que ajudam a simplificar a resolução de problemas de otimização, ver Eves (2004, p. 428). Todavia, neste trabalho não usamos o Cálculo como ferramenta para a resolução desses problemas, pois no Ensino Básico, etapa para qual é proposta a aplicação deste estudo, normalmente o Cálculo ainda não é visto. Nos detemos a utilizar conteúdos como máximos ou mínimos de funções, vértice da parábola e desigualdade das médias.

Recebido: 31/01/2018 / Publicado online: 22/05/2018.

O estudo de problemas de otimização, preponderantemente composto de situações contextualizadas, pode provocar no aluno um maior interesse pela disciplina de Matemática que corriqueiramente lhe é apresentada de maneira abstrata.

A otimização, com suas aplicações, contribui na resolução de problemas pertinentes à administração, à economia, às engenharias, à logística, às diversas áreas da ciência e, que podem ser trabalhados no Ensino Médio. Nota-se também que, de maneira elementar, problemas de otimização vêm sendo cobrados no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Como exemplo podemos citar a prova de 2015 que traz consigo duas questões de otimização: a saber, a questão 136 da prova amarela, a qual pode-se resolver usando conhecimentos de função quadrática e a questão 176 que pode ser resolvida usando-se conhecimentos de funções trigonométricas. Já a questão 166 da prova amarela de 2014 pode ser resolvida usando a desigualdade triangular. Além disso, todas as provas, da forma como são elaboradas hoje, estruturadas em quatro matrizes e compostas por 45 questões para cada uma das áreas do conhecimento - modelo adotado desde o ano de 2009 - contêm, em média, cinco problemas elementares com as palavras *máximo* ou *mínimo*.

Uma proposta bem interessante presente neste trabalho é aliar o estudo de problemas de otimização com o uso de uma tecnologia digital, neste caso o uso do *software* matemático GeoGebra. A utilização de ferramentas tecnológicas nas aulas de Matemática, como o *software* GeoGebra, vem para estreitar a relação dos estudantes com as tecnologias digitais, tornando-as mais atrativas, potencializando a eficiência da aprendizagem dos conteúdos, além de promover a inclusão digital. O exponencial crescimento tecnológico exige uma formação contínua do professor: a preparação desse profissional é condição *sine qua non* para o sucesso do uso de tecnologias digitais em sala de aula. Nesse sentido, faz-se necessária a inserção dessas ferramentas tecnológicas em nossa prática pedagógica, conforme recomendam as Orientações Curriculares para o Ensino Médio

> *Não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática.* (BRASIL, 2006, p. 87).

Durante o desenvolvimento deste trabalho usamos a Matemática para entender a tecnologia quando, por exemplo, enfatizamos as limitações de *softwares* quanto a erros na n-ésima casa decimal de alguns resultados obtidos em algumas atividades. Por outro lado fizemos uso da tecnologia para entender a Matemática na medida que planejamos uma sequência didática na qual o aluno deve utilizar um *software* matemático (o GeoGebra) para que passo a passo ele resolva o problema proposto e conjecture o resultado geral para cada situação-problema trabalhada.

Objetivo geral

Propor uma sequência de atividades envolvendo problemas de otimização com a utilização do GeoGebra como ferramenta de apoio, e que pode ser aplicada em turmas do Ensino Médio, introduzindo assim o conceito de otimização e reforçando o estudo nos conteúdos de Geometria.

Objetivos específicos

- Apresentar uma sequência didática de problemas envolvendo conteúdos de Geometria;
- Elaborar as atividades a serem executadas no GeoGebra para a resolução dos problemas;
- Elaborar questões que estimulem o aluno a conjecturar resultados antes de serem apresentados formalmente;
- Utilizar conteúdos matemáticos elementares para demonstrar os resultados conjecturados;
- Estabelecer a importância de análise do erro dos *softwares* digitais, relacionando à formalização de resultados através de demonstrações matemáticas.

TEORIA PRELIMINAR

Nesta seção trataremos da desigualdade das médias, máximos ou mínimos de funções e das funções quadráticas que servem de base para as demonstrações dos teoremas a serem conjecturados nas atividades propostas da próxima seção.

Desigualdade das médias

Definição 1. *Considere $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ e a_n números reais positivos, com $n \geq 2$. Os números reais positivos*

$$m_q = \sqrt{\frac{{a_1}^2 + {a_2}^2 + ... + {a_n}^2}{n}}, \tag{1}$$

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}, \tag{2}$$

$$m_g = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}, \tag{3}$$

$$m_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} \tag{4}$$

são denominados, respectivamente, de média quadrática, média aritmética, média geométrica e média harmônica de a_i, $i = 1, 2, ..., n$.

Teorema 1. *(Desiguadade das médias)*
Dados $a_1, a_2, ..., a_n$ números reais positivos e m_q, m_a, m_g e m_h respectivamente, suas médias quadrática, aritmética, geométrica e harmônica, então

$$m_q \geq m_a \geq m_g \geq m_h. \tag{5}$$

Além do mais, duas quaisquer dessas médias são iguais se, e somente se, $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

(Ver demonstração em Moreira (2016, p. 51.)

Os resultados de otimização serão provados apenas utilizando máximos ou mínimos de função quadrática ou a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, $m_a \geq m_g$, uma vez que as expressões envolvendo volumes e áreas se adequam a estes casos.

Mínimo ou máximo de funções

No nosso trabalho também usamos mínimos ou máximos de funções. Vejamos, então, as definições e os principais resultados utilizados.

Definição 2. *Sendo $D \subseteq \mathbb{R}$ o domínio de uma dada função $f : D \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in D$, diz-se que a função f tem máximo absoluto em x_0 ou que x_0 é ponto de máximo absoluto de f. Além do mais, $f(x_0)$ é dito valor máximo de f em D.*

Definição 3. *Sendo $E \subseteq \mathbb{R}$ o domínio de uma dada função $g : E \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$ tal que $g(x) \geq g(x_0)$ para todo $x \in E$, diz-se que a função g tem mínimo absoluto em x_0 ou que x_0 é ponto de mínimo absoluto de f. Além do mais, $g(x_0)$ é dito valor mínimo de g em E.*

Definição 4. *Dados a e b pertencentes ao domínio $D \subseteq \mathbb{R}$ de uma função $f : D \to \mathbb{R}$, temos que:*

(i) Se existe um intervalo aberto I contido no domínio D, tal que $a \in I$ e $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in I$, então f tem um máximo local em a e $f(a)$ é dito valor de máximo local;

(ii) Se existe um intervalo aberto J contido no domínio D, tal que $b \in J$ e $f(x) \geq f(b)$ para todo $x \in J$, então f tem um mínimo local em b e $f(b)$ é dito valor de mínimo local.

Definição 5. *Denomina-se função quadrática qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$.*

Teorema 2. *Uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem valor máximo absoluto (ou valor mínimo absoluto) dado por $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$, em $x_v = \frac{-b}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$, com y_v sendo valor máximo de f em $\mathbb{R}$ quando $a < 0$ (ou valor mínimo de f em $\mathbb{R}$ quando $a > 0$).*

(Ver demonstração em Lima (2017, p. 14.)

ORIENTAÇÕES METODOLÓGICAS GERAIS

Na próxima seção apresentamos atividades que servem como alternativa para o estudo de geometria, onde em cada uma delas, com a utilização do GeoGebra (versão 5.0.263.0), o aluno encontrará valores otimizados para elementos geométricos tais como: segmentos, ângulos, áreas e volumes.

Neste artigo apresentamos, sucintamente, o trabalho executado como dissertação de conclusão do PROFMAT de Lima (2017), onde são propostas doze atividades para o desenvolvimento de um projeto inovador em turmas do 2º ou do 3º ano do Ensino Médio. Caso o professor opte por executar todas as doze atividades, necessitará de aproximadamente cinquenta horas-aula (cerca de um bimestre completo), levando em consideração que serão realizadas aulas básicas para apresentação do *software* GeoGebra aos alunos, execução das atividades no GeoGebra, demonstrações formais das relações e propriedades conjecturadas, exercícios de fixação da aprendizagem, além de situações metodológicas a critério do professor, tais como: leituras complementares, atividades de verificação e investigação práticas envolvendo medições, dentre outras.

Em cada uma dessas atividades são sugeridos determinados números de casas decimais para vários objetos, tais como *controles deslizantes*, *ângulos*, *áreas*, *volumes*, etc. Quando trabalhamos com máquinas de calcular ou *softwares* digitais, podem ser cometidos erros por causa das próprias limitações das máquinas onde estão instalados esses *softwares*, já que estas têm capacidade finita.

> *Tais resultados são produzidos, de forma geral, por erros de arredondamento: como uma calculadora só tem capacidade para armazenar números com representação decimal finita, todos os números com representação infinita (e mesmo aqueles com representação finita, porém superior a capacidade da máquina) são aproximados por números com representação finita. Isto é, as calculadoras (pelo menos as mais simples) não operam com números com representação decimal infinita, e sim com aproximações para esses números. A imprecisão nos resultados de cálculos aproximados pode aumentar quando os erros de arredondamento são propagados, isto é, quando resultados aproximados são usados em novos cálculos, gerando aproximações sobre aproximações. Evidentemente, algumas máquinas possuem capacidade de armazenamento superior a outras, podendo produzir resultados mais precisos, porém todas têm capacidade finita. Portanto cálculos com decimais infinitos envolverão necessariamente imprecisões e erros de alguma ordem.* (GIRALDO, CAETANO e MATTOS, 2012, p. 12)

Com base nesses possíveis erros produzidos pelas limitações dos *softwares*, faz-se necessária a comprovação matemática formal das relações e propriedades conjecturadas.

ATIVIDADES USANDO O GEOGEBRA 2D

Atividade 1: Retângulo inscrito num triângulo retângulo isósceles

Objetivo: Determinar qual é o retângulo de área máxima dentre todos os retângulos inscritos em um triângulo retângulo isósceles.

Dentre todos os retângulos inscritos em um triângulo retângulo isósceles, qual é o que tem a maior área?

Para resolvermos esse problema, primeiro observemos o seguinte caso particular em que os catetos do triângulo retângulo medem 5 unidades de comprimento. Aplicamos a seguinte atividade com a turma em estudo.

1. Abra o GeoGebra e torne visíveis a *Janela de Álgebra*, *Janela de Visualização* e *Janela de Visualização 2*. Para habilitar a *Janela de Visualização 2*, acesse no menu principal o botão exibir ou tecle *Ctrl+Shift+2*;

2. No terceiro botão, clique em *Segmento* e marque o segmento AB, onde $A(5,0)$ e $B(0,5)$;

3. Marque um ponto C no segmento AB;

4. Digite, no campo de *Entrada*, $D = (x(C), 0)$ obtendo, no eixo horizontal, um ponto com a mesma abscissa do ponto C;

5. Digite, no campo de *Entrada*, $E = (0, y(C))$ obtendo, no eixo vertical, um ponto com a mesma ordenada do ponto C;

6. Marque um ponto na origem do sistema cartesiano e renomei-o de O;

7. Clique no quinto botão e posteriormente sobre os pontos O, D, C, E e em O novamente, nessa ordem, obtendo, assim, o retângulo $ODCE$. Mude a cor e o estilo ao seu gosto, clicando no botão direito do *mouse*;

8. No oitavo botão escolha *Área* para obter a área do retângulo $ODCE$. Em seguida, no décimo botão (*Texto*), depois clique no segmento OD; em *Editar* digite *DistânciaOD=*; marque *Fórmula LaTeX* e em *Objetos*, clique em o se o for a medida de OD, para obter o comprimento do lado OD do retângulo. De modo análogo obtenha a medida do lado adjacente a OE. Coloque a área com três casas decimais e o comprimento dos lados com uma. Clique no primeiro botão do GeoGebra para, depois colocar essas medidas dos lados do retângulo num lugar mais conveniente para a sua visualização;

9. Clique na *Janela de Visualização 2* e, em seguida, digite, na caixa de *Entrada*, $Area = (o, o * e)$, onde o é a medida do lado OD e e é a medida do lado OE;

10. Habilite o rastro do ponto (*Área*) obtido anteriormente. Movendo o ponto C você terá em suas janelas do GeoGebra a vista da Figura 1.

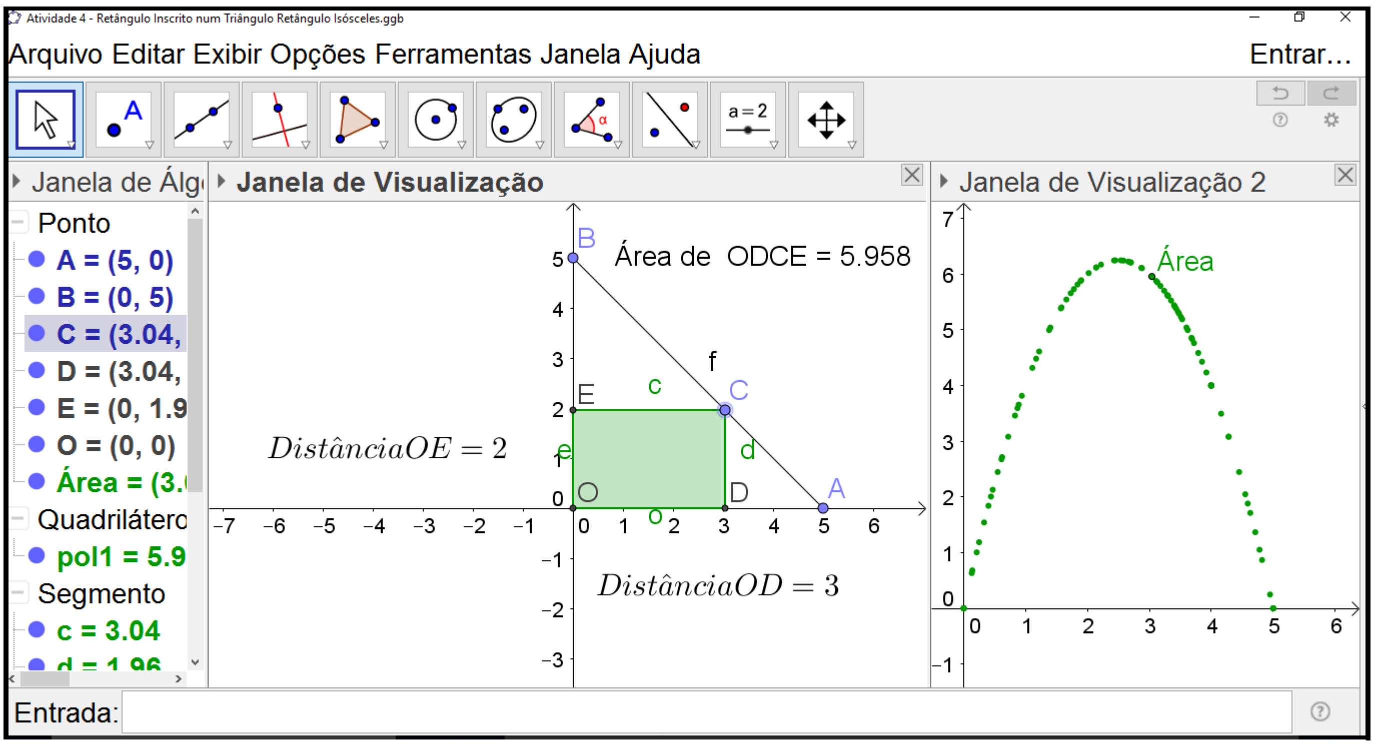

Figura 1: Retângulo inscrito num triângulo retângulo isósceles

Orientações metodológicas

Após a realização desses passos, para que seja conjecturado o resultado esperado, sugerimos que o professor direcione algumas perguntas aos alunos, tais como:

1. Movendo o ponto C, qual é o maior valor que você encontra para a área do retângulo $CDFE$?

2. Encontrado esse maior valor para a área, quais são as medidas de cada lado do retângulo?

3. Quando essa maior área ocorre, como você descreve a posição do ponto "dinâmico" ($\acute{A}rea$) que destacamos no gráfico?

4. Dentre todos os retângulos inscritos em um triângulo retângulo isósceles, qual é o que tem a maior área?

As coordenadas dos pontos A e B, sugeridas no segundo passo, podem ser substituídas por outras, de modo $x(A) = y(B)$ para que o triângulo AOB permaneça sendo retângulo isósceles. Os erros de arredondamento justificam o número de casas decimais propostos no oitavo passo dessa atividade. Note que se propuséssemos, por exemplo, uma casa decimal tanto para as medidas do lado do retângulo quanto para a área, obteríamos como área máxima $6,2$ e diversos valores para as medidas dos lados do retângulo $ODCE$ formando retângulos e não um quadrado como desejamos.

Teorema 3. *O retângulo de área máxima, inscrito no triângulo retângulo isósceles é o quadrado.*

Demonstração. Considere o triângulo isósceles AOB de base AB e $OA = OB = a$.

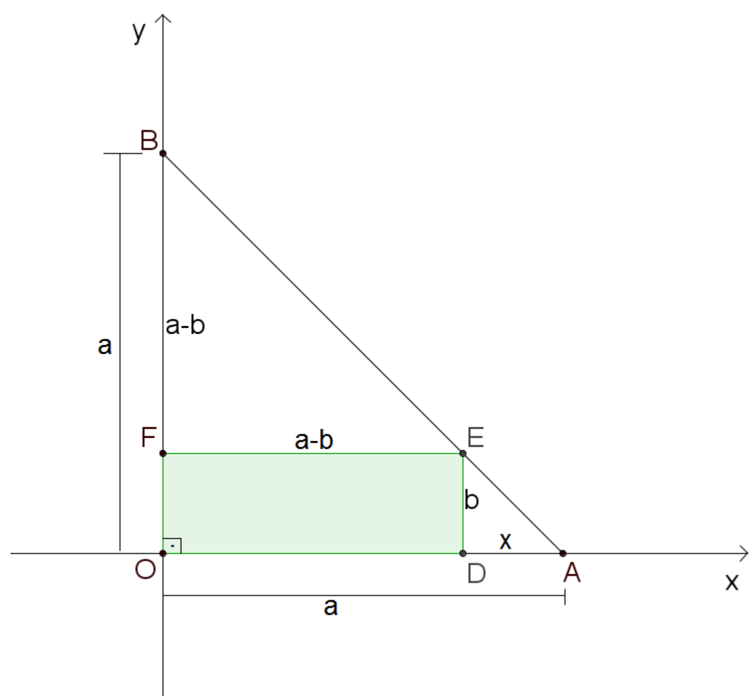

Figura 2: Retângulo inscrito num triângulo retângulo isósceles.

Por ser isósceles de base AB, o triângulo AOB, com ângulo $A\widehat{O}B$ reto, tem $O\widehat{A}B = A\widehat{B}O = 45^o$. Sendo $\overline{AD} = x$ e $\overline{DE} = b$, temos, no triângulo ADE:

$$tg45^o = \frac{b}{x} \Rightarrow 1 = \frac{b}{x} \Rightarrow x = b. \tag{6}$$

Analogamente nota-se que

$$\overline{BF} = \overline{EF} = a - b. \tag{7}$$

Do Teorema 1 ($m_a \geq m_g$) segue que

$$A = (a-b).b \leq \left(\frac{(a-b)+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}. \tag{8}$$

Assim, a maior área possível é

$$A = \frac{a^2}{4}, \tag{9}$$

obtida quando

$$a - b = b. \tag{10}$$

Consequentemente

$$b = \frac{a}{2}. \tag{11}$$

Portanto, o retângulo $ODEF$, de área máxima, inscrito no triângulo retângulo isósceles AOB é o quadrado de lado $\frac{a}{2}$. □

Atividade 2: Retângulo inscrito num círculo

Objetivo: Determinar qual retângulo tem maior área dentre todos os retângulos inscritos num círculo.

Qual é o retângulo de maior área, que pode ser inscrito em um círculo de raio fixado?
Para responder a essa pergunta realizemos passo a passo a seguinte sequência didática:

1. Abra o GeoGebra e torne visíveis a *Janela de Álgebra*, *Janela de Visualização* e *Janela de Visualização 2*. Retire os eixos da primeira janela de visualização;

2. Obtenha, na *Janela de Visualização*, um *Círculo dados Centro e Raio* com centro em um ponto O e raio $r = 2$. Clique com o botão direito do *mouse* para renomear o centro do círculo;

   Sugestão: Para melhor visualização clique no último botão *Mover Janela de Visualização* da Barra de Ferramentas e dê um zoom na figura a ser trabalhada.

3. Escolha, no terceiro botão, *Reta*; clique sobre o círculo obtendo o ponto A e em seguida sobre outro ponto B do círculo, distinto de A;

4. Obtenha duas retas perpendiculares à reta que contém os pontos A e B, intersectando-a nesses pontos, utilizando o quarto botão *Reta Perpendicular*;

5. No segundo botão em *Interseção de Dois Objetos*, obtenha os pontos de interseção entre as retas obtidas no item anterior e o círculo clicando próximo dos pontos de interseção distintos de A e B. Observe que surgirão os pontos C e D;

6. Clique no quinto Botão *Polígono* e posteriormente sobre os pontos A, B, C, D e em A novamente, obtendo, assim, o retângulo $ABCD$;

7. No último botão, clique em *Exibir/Esconder Objeto*, selecione as retas e em seguida clique em qualquer outro botão (observe que as retas desparecem ficando apenas o retângulo inscrito no círculo);

8. No oitavo botão escolha *Área* para obter a área do retângulo $ABCD$, clique sobre esse polígono;

9. Clique no décimo botão *Texto* e observe que surgirá uma caixa de diálogo. No espaço *Editar* digite *DistânciaAB=*, selecione *Fórmula LaTeX*, em seguida *Objetos*, por fim escolha a opção a se a for a medida do segmento AB. De modo análogo obtenha a medida do segmento BC. Coloque a área com três casas decimais e o comprimento dos lados com uma casa decimal;

   Sugestão: Para obter a área com três casas decimais clique com o botão direito do *mouse* sobre a área e depois em *Propriedades*→*Texto*→*Arredondamento*→*3 casas decimais*→OK; proceda de modo análogo para as medidas dos lados do retângulo com uma casa decimal.

   Sugestão: Fixe a área e as distâncias obtidas nos passos anteriores clicando sobre esses textos com o botão direito do *mouse* e marque a opção *Fixar Objeto*.

10. Clique na *Janela de Visualização 2* e, em seguida, digite, na caixa de *Entrada*, $Área = (a, q1)$, onde a é a medida do lado AB e $q1$ representa a área do retângulo em estudo. Habilite o rastro do ponto que representa a área.

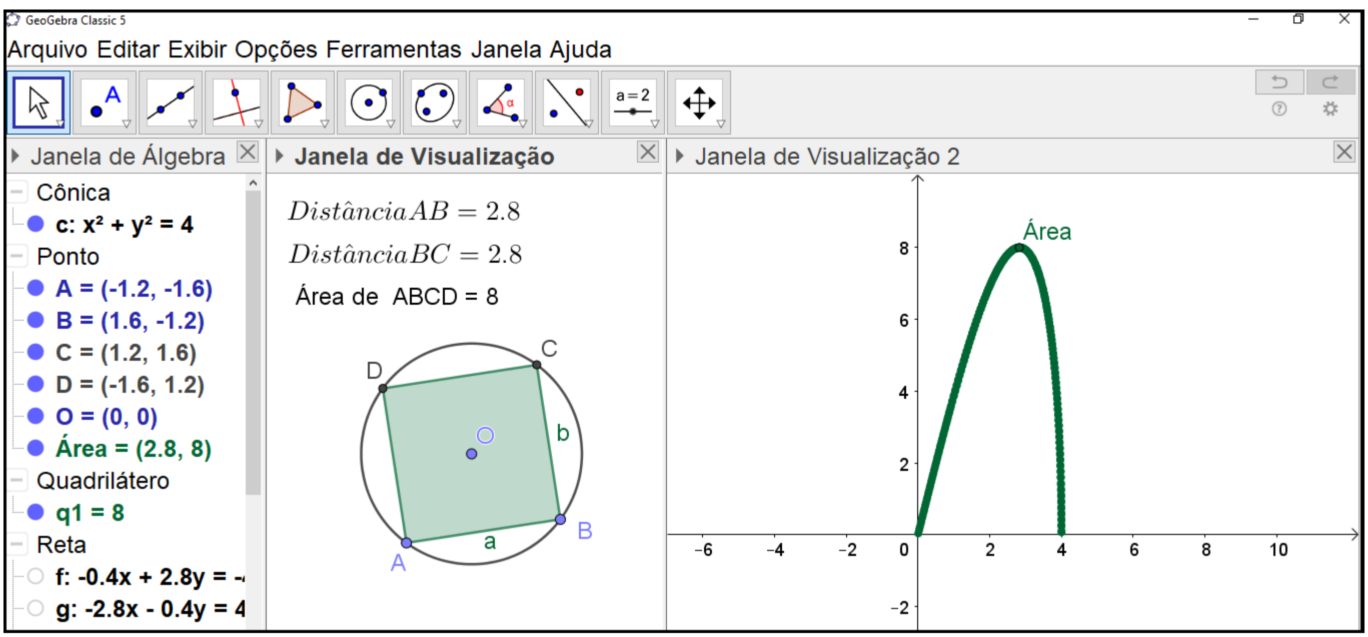

Figura 3: Retângulo de área máxima inscrito num círculo

Orientações metodológicas

Finalizados esses passos, para que seja conjecturado o resultado esperado, sugerimos que o professor direcione algumas perguntas aos alunos, tais como:

1. Clicando em *Mover*, primeiro botão da barra de ferramentas, e, posteriormente, movendo o ponto A ou o ponto B, qual é o maior valor que você encontra para a área do retângulo $ABCD$? (Observe o gráfico na *Janela de Visualização 2* - Ver Figura (3))

2. Encontrado esse maior valor para a área, quais são as medidas de cada lado do retângulo?

3. Dentre todos os retângulos inscritos em um círculo de raio fixo, qual é o que tem a maior área?

No segundo passo, note que o controle deslizante r representa a medida do raio do círculo e, portanto, deve ser maior do que zero. Quanto ao incremento, o professor pode escolher o valor que lhe convenha, conforme a precisão desejada. No décimo passo, sugerimos que se exibam a área com três casas decimais e o comprimento dos lados com apenas uma casa decimal com o intuito de "esconder" os erros a partir de determinadas casas decimais: erros comuns de aproximação por conta das limitações do *software*. Demonstraremos, a seguir, que o retângulo de área máxima inscrito num círculo de raio r é um quadrado. Observe, contudo, que se tivéssemos deixado os lados do retângulo e a sua área com uma casa decimal, encontraríamos 8 como a área máxima do retângulo e os lados AB e BC medido, por exemplo, $2,7$ e 3 ou $2,7$ e $2,9$ ou $2,8$ e $2,9$; que seriam medidas de lados de retângulos e não um quadrado como desejamos.

Teorema 4. *O retângulo de área máxima inscrito num círculo de raio r é um quadrado.*

Demonstração. No retângulo $ABCD$ inscrito num círculo de raio r temos que as diagonais AC e BD medem $2r$. Considerando $\overline{AB} = 2x$ e $\overline{BC} = 2y$, obtemos $r^2 = x^2 + y^2$, logo, $r^2 - x^2 = y^2 > 0$ e $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Uma vez que a área S do retângulo $ABCD$ é igual a $4xy$, temos que

$$S = 4x\sqrt{r^2 - x^2} \Rightarrow S^2 = -16x^4 + 16r^2x^2. \tag{12}$$

A fim de obter uma função quadrática, faremos a substituição $z = x^2$, ou seja,

$$S^2 = -16z^2 + 16r^2z. \tag{13}$$

Temos, então, a seguinte função quadrática em z:

$$f(z) = -16z^2 + 16r^2z, \tag{14}$$

que, de acordo com o Teorema 2, tem ponto máximo quando a abscissa do vértice da parábola for $z_V = -\frac{16r^2}{2.(-16)} = \frac{r^2}{2}$. Como $z = x^2$, segue que $x_V = \pm\frac{r}{\sqrt{2}}$. Logo,

$$y_V = \sqrt{r^2 - {x_V}^2} \Rightarrow y_V = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} \Rightarrow y_V = \frac{r}{\sqrt{2}}. \tag{15}$$

Portanto, a área máxima ocorre quando $x = y$, ou seja, o retângulo inscrito no círculo é um quadrado. $\square$

Atividade 3: Desigualdade isoperimétrica dos triângulos

Objetivo: Determinar qual é o triângulo que tem a área máxima dentre todos os triângulos de perímetro fixado.

Nesta atividade vamos encontrar o triângulo de maior área entre todos os triângulos de perímetro fixado, ou seja, resolveremos o problema da desigualdade isoperimétrica[2] dos triângulos.

1. Abra o GeoGebra e torne visíveis a *Janela de Álgebra*, *Janela de Visualização* e *Janela de Visualização 2*;

2. Na primeira janela de visualização, marque dois pontos A e B distando entre si menos que 7.5 $u.m.$ (u.m.: unidades de medida);

   Vamos fixar o perímetro do triângulo ABC a ser construído em $15cm$.

3. Obtenha um círculo de centro B e raio 5, usando a ferramenta *Círculo dados Centro e Raio*;

4. Ligue os pontos A e B, obtendo o segmento f. Esconda o rótulo f;

5. Trace o círculo de centro A e raio $15 - 5 - f$;

6. Marque uma das interseções entre os dois círculos criados anteriormente, obtendo o ponto C;

7. Trace o triângulo ABC e mude a cor e o estilo a seu gosto;

8. Obtenha a área do triângulo e deixe-a numa posição fixa na primeira janela de visualização. Para isto, clique no oitavo botão em *Área*, depois sobre o triângulo. Note que ao mover esse texto *Área*, ele não se afasta muito do triângulo, fica preso num "círculo" no entorno do triângulo. Clique com o botão direito do *mouse* sobre o texto, em seguida, marque a opção *Posição Absoluta na Tela*, arraste esse texto até o local onde deseja fixar. Clique, novamente, com o botão direito do *mouse* sobre o texto, marque a opção *Fixar Objeto*;

9. Exiba nome e valor de cada um dos lados do triângulo ABC, clicando com o botão direto do *mouse* sobre o lado, depois em *Propriedades*, em seguida em *Básico* e por último em *Exibir Rótulo*, clicando na opção *Nome e Valor*;

   Sugestão: Para mais precisão nos resultados, coloque a área com duas casas decimais e a medida de cada lado com apenas uma casa decimal.

10. Note que o lado c_1 do triângulo ABC tem a mesma medida que f; renomeie-o de c. Esconda os círculos;

11. Clique na *Janela de Visualização 2* e, em seguida, digite, na caixa de *Entrada*, *Área* $= (b, pol1)$, onde b é a medida do lado AC e $pol1$ representa a área do triângulo em estudo;

[2] Isoperimétrico significa literalmente com perímetro igual. Todavia, em matemática, a isoperimetria é o estudo das figuras geométricas cujos contornos são congruentes. Em geometria plana, problemas isoperimétricos têm a finalidade de determinar uma figura de área máxima cujo perímetro é fixado.

12. Habilite o rastro do ponto ($Área$) obtido anteriormente;
13. Mude a cor e habilite o rastro desse ponto;
14. Mova o ponto A ou o B para observar a variação da área do triângulo ABC (Ver Figura (4)).

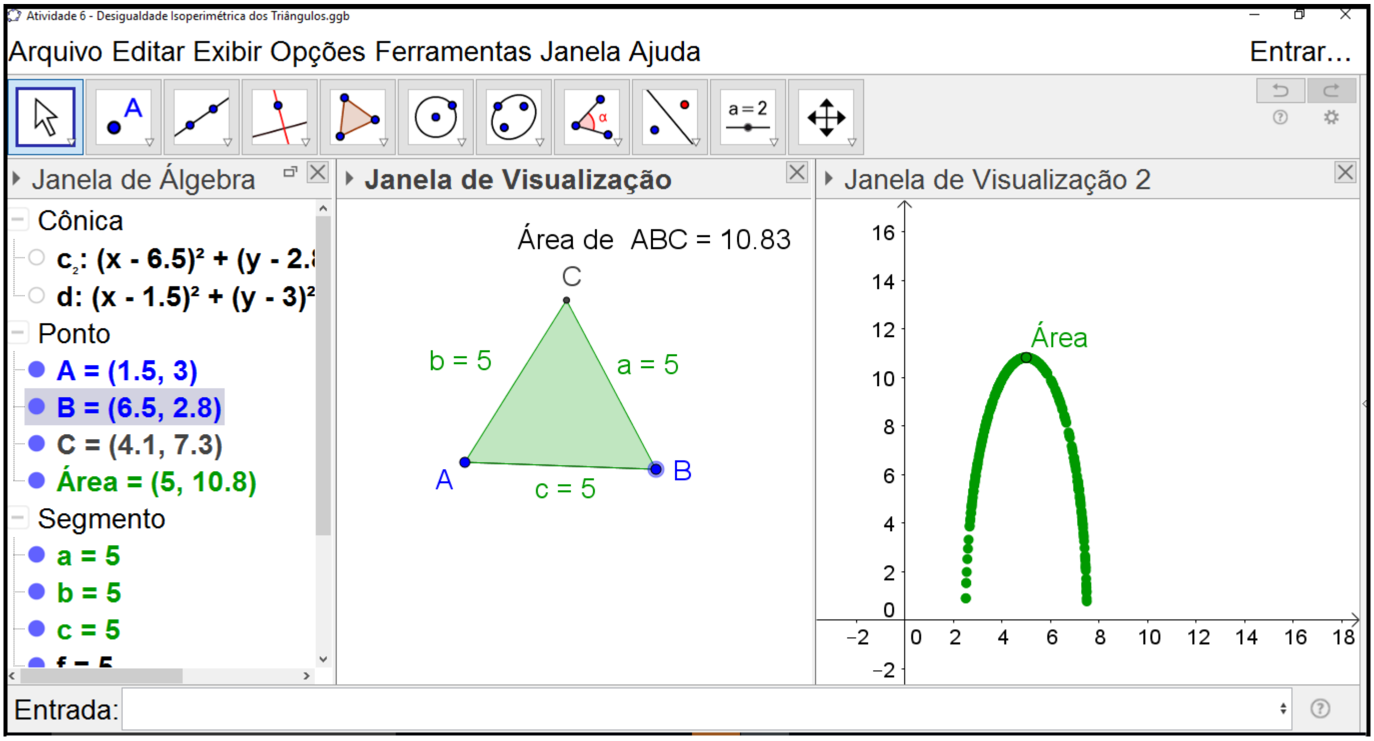

Figura 4: Procurando o triângulo de área máxima

Orientações metodológicas

Concluída a realização desses passos, para que seja conjecturado o resultado esperado, sugerimos que o professor direcione algumas perguntas aos alunos, tais como:

1. Qual é a área máxima observada para este caso?
2. Quais são as medidas dos lados do triângulo quando esta área máxima ocorre?
3. Com base nessas observações, qual é o triângulo de área máxima, quando fixado seu perímetro?

Essa atividade é um caso particular, mas o professor que aplicá-la pode sugerir aos alunos que desenvolvam vários casos particulares, para que tenham a ideia de como conjecturar o caso geral da desigualdade isoperimétrica dos triângulos. Para adaptar as atividades a outros casos, basta observar que, no segundo passo, a necessidade da marcação de dois pontos A e B de modo que a distância entre eles seja menor do que a metade do perímetro que se deseja para o triângulo; no terceiro passo obter um círculo de centro B

e raio igual a um terço desse perímetro; no quinto passo, um círculo de centro em A e raio $p - \frac{1}{3} \cdot p - f$, se, respectivamente, p for o perímetro do triângulo ABC e f, a medida do segmento AB. No nono passo também sugerimos determinados números de casas decimais para a área e as medidas dos lados do triângulo, levando em consideração os erros de casas decimais comuns em máquinas de calcular e *softwares* digitais. Verifique que se modificarmos o número de casas decimais podemos não encontrar os resultados que esperamos com precisão.

Para a demonstração do teorema a seguir faremos uso dos seguintes resultados:

(1º) Se um triângulo possui os lados medindo a, b e c e o seu semiperímetro é $p = \frac{a+b+c}{2}$, é possível demonstrar que sua área $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Fórmula de Heron). Veja a demonstração em Batista (2014, p. 32).

(2º) A área de um triângulo equilátero de lado a é dada por $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Veja a demonstração em Batista (2014, p. 46).

Teorema 5. *O triângulo equilátero é o que tem a área máxima dentre todos os triângulos de perímetro fixado.*

Demonstração. Denotando por a, b e c as medidas dos lados do triângulo, o perímetro desse triângulo é $p = a + b + c$. Pela a fórmula de Heron a área do triângulo é dada por

$$A = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)}. \tag{16}$$

Agora, usando a desigualdade entre as médias geométrica e aritmética, temos que

$$\frac{\frac{p}{2} - a + \frac{p}{2} - b + \frac{p}{2} - c}{3} \geq \sqrt[3]{\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)} \tag{17}$$

isto é,

$$\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right) \leq \left(\frac{\frac{p}{2} - a + \frac{p}{2} - b + \frac{p}{2} - c}{3}\right)^3. \tag{18}$$

Logo,

$$A \leq \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{\frac{p}{2} - a + \frac{p}{2} - b + \frac{p}{2} - c}{3}\right)^3}. \tag{19}$$

Mas,

$$\frac{\frac{p}{2} - a + \frac{p}{2} - b + \frac{p}{2} - c}{3} = \frac{p}{6}. \tag{20}$$

Segue que

$$\sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{\frac{p}{2} - a + \frac{p}{2} - b + \frac{p}{2} - c}{3}\right)^3} = \sqrt{\frac{p}{2}.\frac{p^3}{216}} = \sqrt{\frac{p^4}{432}} = \frac{p^2}{12\sqrt{3}}. \tag{21}$$

Assim, a maior área a ser atingida por um triângulo de lados a, b e c é $\frac{p^2}{12\sqrt{3}}$, onde $p = a + b + c$. E esta área máxima ocorre, de acordo com o Teorema (1), $m_a = m_g$, quando

$$\frac{p}{2} - a = \frac{p}{2} - b = \frac{p}{2} - c, \tag{22}$$

ou seja, quando

$$a = b = c. \tag{23}$$

Portanto, o triângulo equilátero é o triângulo de maior área dentre àqueles de perímetro fixado, com área igual a

$$\frac{p^2}{12\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \tag{24}$$

onde a é a medida dos lados desse triângulo.

□

ATIVIDADES USANDO O GEOGEBRA 3D

Atividade 4: Recipiente cilíndrico de área mínima fixado o volume

Objetivo: Descobrir qual o recipiente cilíndrico de volume fixo que tem a menor área.

Para conjecturar a solução desse problema vamos desenvolver a seguinte atividade no *GeoGebra 3D*, utilizando o problema particular abaixo:

Uma indústria que fabrica chocolate pretende vender seu produto em recipiente cilíndrico de volume $V = 314,2\ cm^3$. Quais são as dimensões desse recipiente para que seja gasto o mínimo de material em sua fabricação?

1. Abra o GeoGebra 3D e coloque visíveis as janelas: *Janela de Álgebra*, *Janela de Visualização* e *Janela de Visualização 3D*;

2. Crie dois controles deslizantes r e h variando, respectivamente, de 0 a 8 e de 0 a 12, ambos com incremento 0.1;

3. Fixe o volume em $314,2$ clicando com o botão direito do *mouse* no controle deslizante h, depois clique em *Propriedades* → *Programação*, na caixa *Ao Atualizar* escreva $h = (314.159)/(3.14159 * r^2)$ e depois, em *OK*. Observe que, quando você tentar mover o controle deslizante h, ele desaparecerá da *Janela de Visualização*, mas continuará visível na *Janela de Álgebra*;

4. No menu principal clique em *Opções*→*Arredondamento*→*1 Casa Decimal*;

5. Crie um círculo c de centro $A(0,0)$ e raio r;

6. Na *Caixa de Entrada* digite: *Cilindro[c,h]* para criar um cilindro de base circular c e altura h;

7. Defina na *Caixa de Entrada* *Volume*= $\pi * r^2 * h$ e em seguida, *Área*= $2 * \pi * r * (r + h)$, depois, *Diâmetro*=$2 * r$ e, por fim, *Altura*=h. Arraste esses textos criados para a janela de visualização;

8. Exiba a área com 4 casas decimais clicando sobre o texto com o botão direito do *mouse* e, em seguida em *Propriedades*→ *Texto*→*Arredondamento*→ 4 *Casas Decimais*.

Orientações metodológicas

Observando o seu arquivo elaborado no GeoGebra, você obterá um resultado semelhante a Figura 5.

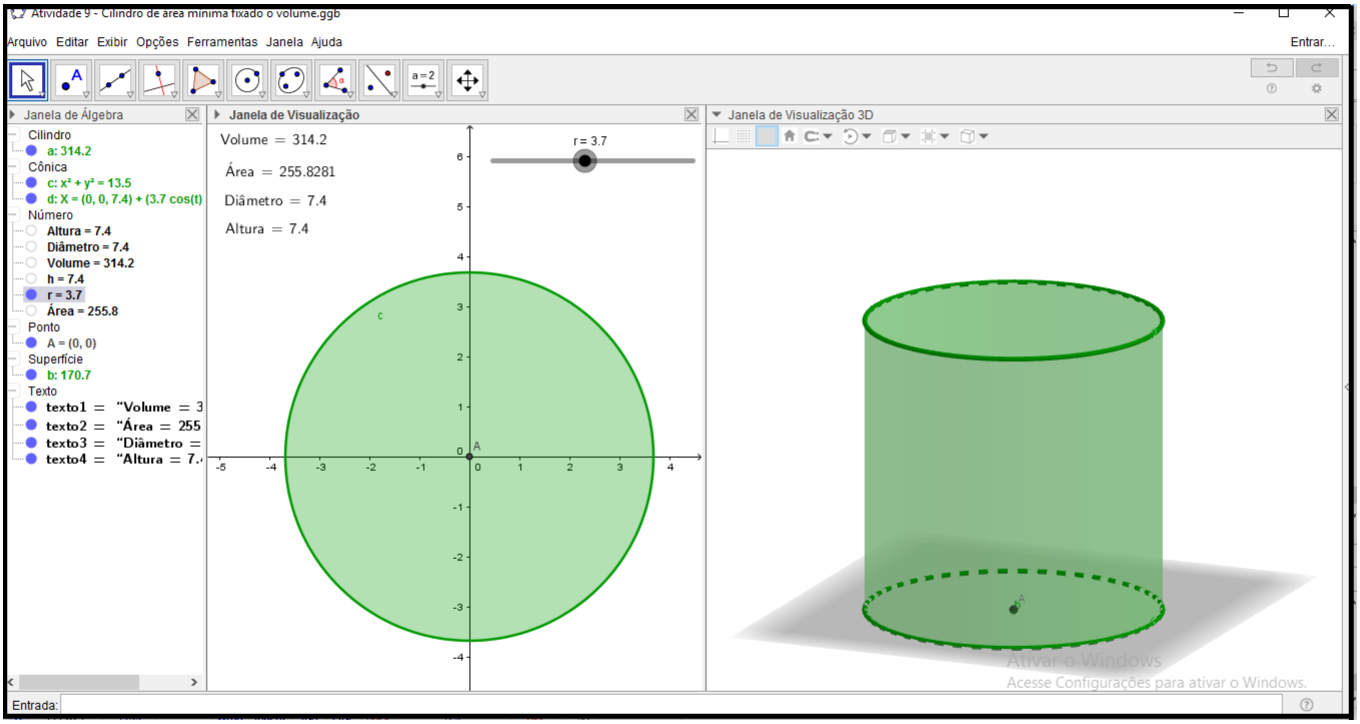

Figura 5: Cilindro de área mínima fixado o volume

Em seguida, para que seja obtido o resultado esperado, sugerimos que o professor direcione algumas perguntas aos alunos, tais como:

1. Movimentando o controle deslizante r, qual é o menor valor que você encontra para a área do cilindro?
2. Quais são as medidas do raio e da altura que você encontra quando a área é mínima?
3. Que relação, aproximada, você pode estabelecer entre essas duas medidas?
4. Quais são as dimensões do recipiente para que seja gasto o mínimo de material na fabricação da lata cilíndrica em questão?
5. Como você pode conjecturar um resultado envolvendo a altura em função do raio de um cilindro quando fixamos seu volume e queremos obter sua área mínima?

Teorema 6. *O cilindro equilátero*[3] *é o recipiente cilíndrico de volume fixado que tem a menor área.*

Demonstração. Consideremos x como sendo a medida do raio da base do recipiente cilíndrico e h a sua altura. O volume V do recipiente é dado por

$$V = \pi x^2 h. \tag{25}$$

Sua área total S é

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi x h. \tag{26}$$

Colocando S em função de x e V, pelo Teorema (1), temos que

$$S = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x} = \frac{3\left(2\pi x^2 + \frac{V}{x} + \frac{V}{x}\right)}{3} \geq 3\sqrt[3]{2\pi x^2 . \frac{V}{x} . \frac{V}{x}} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}, \tag{27}$$

assim, a área total do cilindro será mínima quando $2\pi x^2 = \frac{V}{x}$. Logo,

$$\frac{V}{x} = 2\pi x^2 \Rightarrow V = 2\pi x^3. \tag{28}$$

De acordo com as igualdades (25) e (28) segue que

$$h = 2x \tag{29}$$

conforme queríamos provar. Portanto, quando o volume é dado, o cilindro que tem área mínima é o cilindro equilátero. □

Atividade 5: Cilindro inscrito num cone

Objetivo: Determinar o cilindro circular reto, de volume máximo, inscrito num cone circular reto.

Considere um cone circular reto. Diz-se que um cilindro circular reto está inscrito no cone circular reto se possui uma das bases sobre a base do cone e a circunferência da outra base pertencente à superfície lateral do cone.

Com a utilização do GeoGebra, vamos desenvolver os passos a seguir para descobrirmos o volume máximo de um cilindro circular reto inscrito num cone circular reto. Em princípio, vamos fazer o caso particular com um cone de altura 6 e raio da base 2.

1. Abra o GeoGebra $3D$ e coloque visíveis as janelas: *Janela de Álgebra, Janela de Visualização, Janela de Visualização 3D* e *Janela de Visualização 2*;

2. Obtenha um círculo de centro $O(0, 0)$ e raio 2;

3. Clique na *Janela de Visualização 3D*, selecione a ferramenta *Fazer extrusão para Pirâmide ou Cone* para obter um cone de altura 6, clique no círculo obtido no passo anterior e, digite na caixa de diálogo que surgirá, o número 6;

[3] Cilindro equilátero é aquele cuja altura é igual ao diâmetro da base.

4. Crie um controle deslizante h_1 variando de 0 a 6 e incremento $0,04$;
5. Trace o plano $z = 6 - h_1$. Use a caixa de *Entrada*;
6. Obtenha o círculo de interseção entre o plano obtido no passo anterior e o cone;
7. Esconda o plano;
8. Marque o ponto A sobre o círculo;
9. Digite, na caixa de *Entrada*, $B = (0, 0, z(A))$;
10. Marque o ponto C no vértice do cone;
11. Ligue o segmento BC, renomei-o de h, mude sua cor e estilo;
12. Marque o ponto $D = (x(A), y(A), 0)$;
13. Use a ferramenta *Círculo dados eixo e um de seus Pontos* para obter o círculo g que tem centro no eixo Oy e passa pelo ponto D;
14. Obtenha o cilindro que tem como base o círculo g e altura $6 - h$;
15. Clique na origem do plano cartesiano da *Janela de Visualização 2* e obtenha um segmento EF com comprimento fixo h. Mude sua cor e estilo;
16. Na *Janela de Visualização 2*, obtenha o ponto $V = (x(F), i)$, se i for o nome dado ao cilindro em estudo. Note que a abscissa de V representa a medida h, enquanto sua ordenada, o volume do cilindro. Habilite o rastro de V e mude sua cor. Mova o controle deslizante h_1 (ou ative a animação) para verificar a variação do volume;
17. Outra forma de visualizar a variação do volume é criando um botão, na *Janela de Visualização 2*, para *Iniciar/Parar* a animação do controle deslizante h_1. Para isto, primeiro, digite, na caixa de *Entrada*, $t = true$, criando o *Valor Booleano t*. Depois selecione a ferramenta *Botão*, clique na *Janela de Visualização 2* onde surgirá a caixa de diálogo da Figura 6.

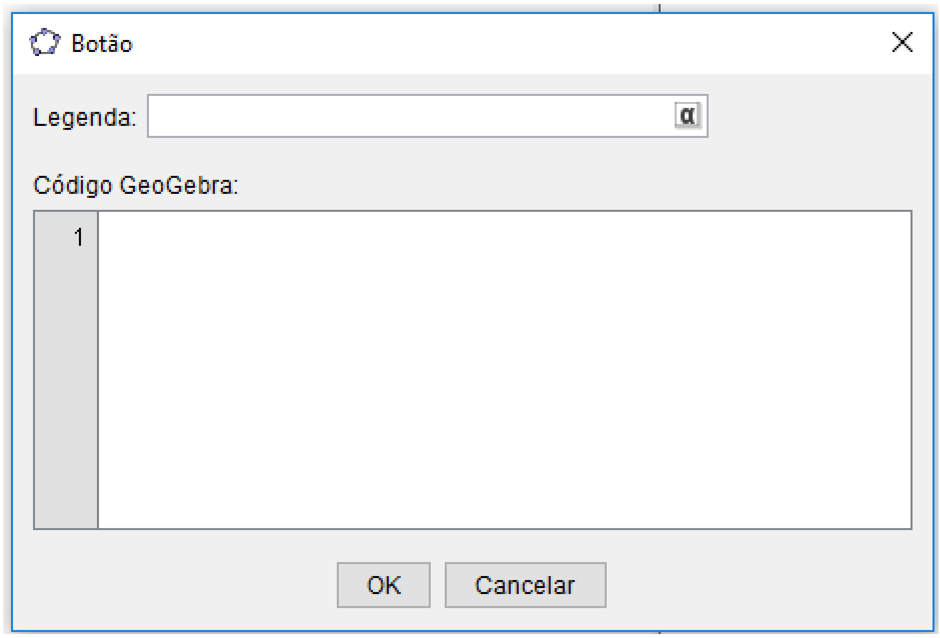

Figura 6: Botão Iniciar / Parar

Em *Legenda* digite *Iniciar/Parar*. E em *Código GeoGebra* digite:
DefinirValor[t,!t]
DefinirLegenda[DefinirValor[t,!t],Se[t,”Parar”,”Iniciar”]]
IniciarAnimação[h_1,t]

Na Figura 7, vemos a atividade pronta no GeoGebra, onde aparecem a *Janela de Álgebra* com os dados algébricos, a *Janela de Visualização* com a vista superior do cilindro inscrito no cone, a *Janela de Visualização 3D* com a visão dos objetos em três dimensões e a *Janela de Visualização 2* com o gráfico que representa o volume do cilindro inscrito no cone. Para ver a animação elaborada no passo anterior basta clicar no botão *Iniciar / Parar*. Fazendo isso, surgirá também o botão com o desenho universal de pausar e reproduzir no canto inferior esquerdo da *Janela de Visualização 2*.

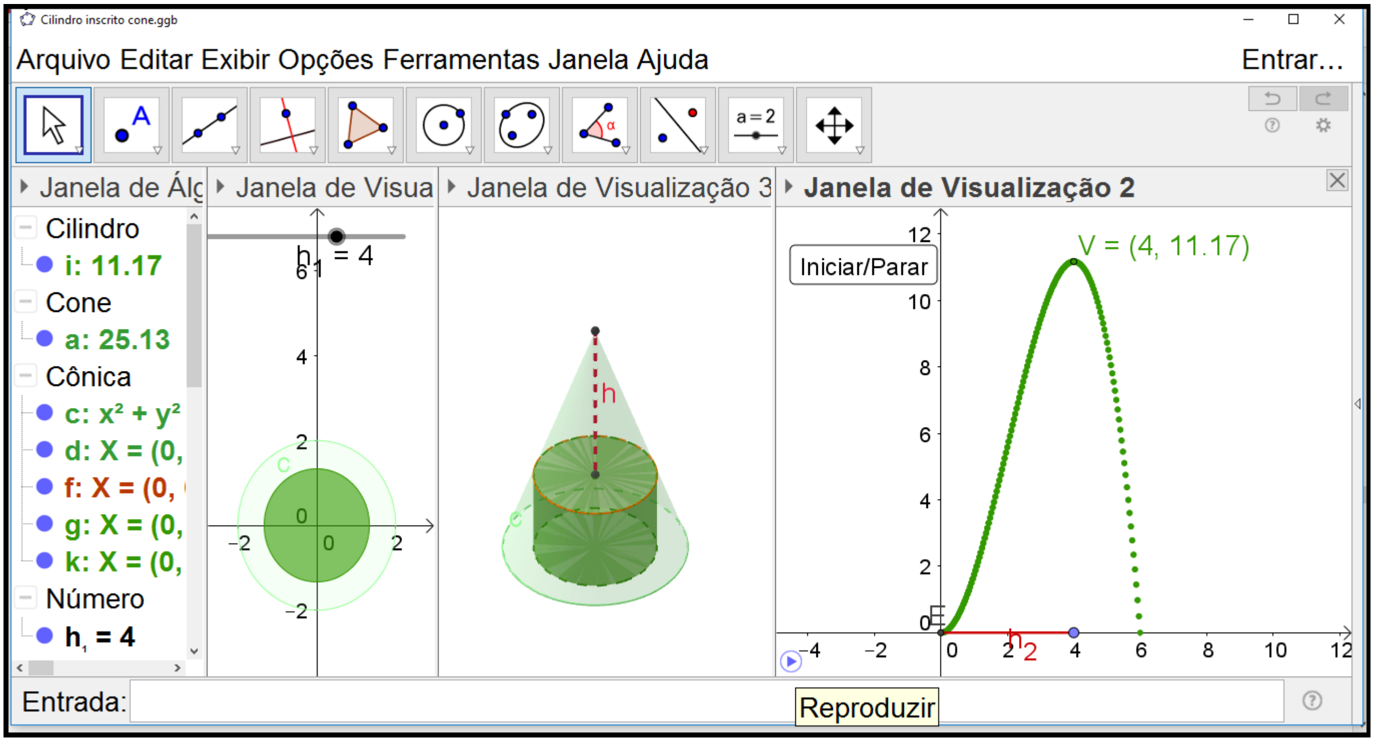

Figura 7: Cilindro de volume máximo inscrito num cone

Orientações metodológicas

Finalizados esses passos, para que seja obtido o resultado esperado, o professor pode direcionar aos alunos, diversas perguntas, como as seguintes:

1. Qual é o volume máximo desse cilindro inscrito?
2. Qual é o valor de h, quando você obtém o volume máximo para o cilindro inscrito?

O professor pode reelaborar esta atividade, nomeando a altura do cilindro inscrito no cone de h. Nesta atividade, nomeamos por h o complemento da altura do cilindro com relação à altura do cone.

Teorema 7. *O volume máximo de um cilindro circular reto inscrito num cone circular reto de altura a e raio da base b é $V = \frac{4\pi ab^2}{27}$.*

Demonstração. Consideremos a seguinte figura que representa uma seção do cone circular reto que contém o vértice e o centro da base com altura a cuja raio da base é b, com um cilindro circular nele inscrito.

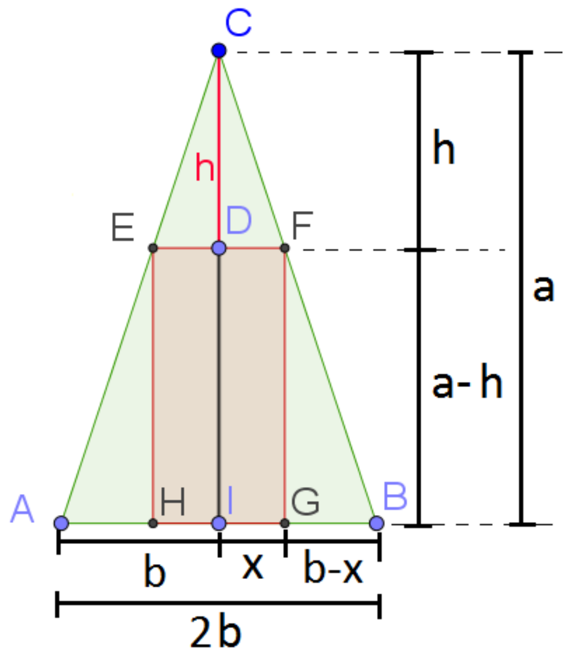

Figura 8: Seção central vertical

Consideremos a Figura 8. Da semelhança dos triângulos CDF e CIB segue que

$$\frac{h}{a} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = \frac{bh}{a}. \tag{30}$$

Observe que o volume do cilindro inscrito no cone é dado por

$$V = \pi x^2.(a-h), \tag{31}$$

ou seja,

$$V = \pi.\left(\frac{bh}{a}\right)^2.(a-h). \tag{32}$$

Usando o fato de que a média geométrica é menor do que ou igual a média aritmética, temos que

$$\sqrt[3]{\frac{2b}{\pi a}V} = \sqrt[3]{\frac{bh}{a}.\frac{bh}{a}.\frac{2b}{a}.(a-h)} \leq \frac{\frac{bh}{a} + \frac{bh}{a} + \frac{2b}{a}.(a-h)}{3} = \frac{2b}{3}. \tag{33}$$

Logo, o valor máximo para o volume do cilindro ocorre quando

$$\frac{2b}{\pi a}V = \left(\frac{2b}{3}\right)^3 \Rightarrow V = \frac{4\pi ab^2}{27}, \tag{34}$$

que ocorre quando $h = \frac{2}{3}a$. Além disso, segue de (30) que $x = \frac{2b}{3}$. E, portanto, o cilindro procurado tem raio da base igual a $\frac{2b}{3}$ e altura, $\frac{a}{3}$.

$\square$

CONCLUSÕES

Experiências evidenciam à influência positiva do uso do GeoGebra no ensino e na aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos. O uso dessa ferramenta, para o ensino, proporciona aos alunos a realização de construções, manipulações, visualização de diversas formas e ângulos, formulação de conjecturas a partir da realização de uma sequência didática bem planejada e executada, facilitando a compreensão dos conceitos geométricos e até algébricos dos conteúdos estudados.

O que diferencia este trabalho dos outros existentes na literatura é o fato de que neste não é utilizada a aplicação de derivadas na resolução de problemas de otimização; aqui são utilizados os conteúdos de máximos ou mínimos de funções, funções quadráticas e desigualdade das médias. Além disso, inovamos na medida em que utilizamos o *software* GeoGebra para o desenvolvimento de uma sequência didática na qual o aluno possa conjecturar um resultado a ser demonstrado matematicamente fazendo o uso de teoremas envolvendo conteúdos do Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

Batista, F. da S. *Um Estudo Sobre Área de Triângulos e Polígonos Convexos e Não-convexos*. Dissertação (Mestrado) - UFCG/CCT. Orientador: Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes. Campina Grande, (2014). 95p. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id94580>. Acesso em 18 de maio de 2018.

________; Secretaria de Educação Básica. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. Brasília: MEC, SEB, DICEI, (2013), 562p.

________; Secretaria de Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*; Volume 2; Brasília: Ministério da Educação, (2006), 135 p.

Eves, H.; *Introdução à História da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, (2004), 844p.

Giraldo, V., Caetano, P. e Mattos, F. *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática*. UFRJ, UFSCar, UERJ/CP2. (2012), 240p.

Lima, J. da C. *O Estudo de Problemas de Otimização com a Utilização do Software GeoGebra*. Dissertação (Mestrado) - UEPB/CCT. Orientadora: Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas. Campina Grande, (2017). 97p. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160191364>. Acesso em 17 de maio de 2018.

Moreira, G. N. A. *Desigualdades: uma abordagem através de problemas*. Dissertação (Mestrado) - UFCG/CCT. Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio da Silva Medeiros. Campina Grande, (2016). 95p. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94580>. Acesso em 17 de maio de 2018.