PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.8, n.2, 2020
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo815

Generalização de um truque matemático

Rogério César dos Santos
Wescley Well Vicente Bezerra
Paulo Eduardo de Brito
Carlos Derli Almeida Cornélio

Resumo

O intuito do presente artigo é generalizar o truque matemático apresentado por Santos e Gontijo (2018)[1]. Na mágica, o adivinhador disponibiliza para um participante voluntário T, 7 bolinhas iguais para que o participante escolha uma certa quantidade dessas bolinhas e as distribua em suas duas mãos, tudo secretamente. Depois, informa ao adivinhador o resultado da soma S = 2x + 3y , onde x é a menor quantidade de bolinhas numa mão e y a maior, para que o mesmo descubra quantas bolinhas o participante escolheu e como elas foram distribuídas em suas mãos. Os coeficientes 2 e 3 são chamados de multiplicadores. Nesse artigo será demonstrado o funcionamento da mágica para o caso mais geral de qualquer quantidade total T de bolinhas, e também quais devam ser os multiplicadores apropriados. Para a prova, serão utilizados resultados básicos da teoria de divisibilidade nos inteiros.

Palavras-chave: Lúdico; Mágica Matemática; Divisibilidade.

Abstract

The purpose of this paper is to generalize the mathematical trick presented by Santos and Gontijo (2018)[1]. In this magic, the diviner makes it available to a volunteer participant T, 7 equal balls for the participant to choose a certain amount of these balls and distribute them in his two hands, all secretly. Then, he tells the diviner the result of the sum S = 2x + 3y, where x is the smallest number of balls in one hand and y is the largest, to find out how many balls the participant chose and how they were distributed in their hands. The coefficients 2 and 3 are called multipliers. This article will demonstrate how the magic works for the most general case of any total number of T balls, and also what the appropriate multipliers should be. For the proof, basic results of the theory of divisibility in integers will be used.

Keywords: Ludic; Mathematical Magic; Divisibility.

1. Introdução

Os truques matemáticos em sala de aula podem ser utilizados como uma importante atividade para motivar e prender a atenção dos alunos para que, num segundo momento, o professor possa trabalhar os conteúdos matemáticos presentes nessas mágicas. O artigo ‘"Uma Mágica Desafiadora", de Santos e Gontijo (2018), traz uma instigante atividade lúdica, na qual podem ser trabalhados os conceitos de equação do primeiro grau, e sistemas dois por dois.

O enunciado da mágica presente no referido artigo é descrito a seguir:

> *1) Peça para que um aluno voluntário segure 7 bolinhas (ou qualquer objeto pequeno como tampas ou moedas) e escolha secretamente um número* w *entre 3 e 7, e, também secretamente, distribua essa quantidade de bolinhas nas mãos (nenhuma mão pode ficar vazia). Suponha, por exemplo, que ele tenha escolhido 4 bolinhas, distribuindo 1 numa mão e 3 na outra. Nenhum desses dados será informado a você.*
>
> *2) Peça que ele mentalmente dobre a mão de menor quantidade e triplique a mão de maior quantidade e informe a soma* z *dos resultados. Se a distribuição das bolinhas tiver sido igual nas duas mãos, continue normalmente. No nosso exemplo, a soma* z *será* $2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11$.
>
> *3) Você já pode adivinhar quantas bolinhas ao todo ele escolheu inicialmente:* $w = 4$, *e também como elas foram distribuídas: 1 e 3. Como?* [1]

Neste trabalho, que objetiva generalizar tal truque, o total de bolinhas será denotado por T ($T = 7$ no referido artigo), os multiplicadores por u e v ($u = 2$ e $v = 3$ no artigo citado), a menor quantidade distribuída numa mão por x e a maior por y, e a soma $ux + vy$ por S.

Vamos dividir nossa tarefa em três partes: primeiro, mostrar a unicidade da soma S para qualquer quantidade total $T > 0$ de bolinhas, desde que se escolham corretamente os multiplicadores u e v; segundo, mostrar como é possível descobrir as quantidades de bolinhas em cada mão e, por fim, será dado um exemplo de como proceder à realização do truque em uma situação particular.

2. Unicidade da soma informada S: prova algébrica

Antes de mais nada, pensamos em quais seriam os multiplicadores adequados que garantem a unicidade da soma S. Por tentativa e erro, dado T, percebemos que basta os multiplicadores satisfazerem dois critérios: devem ser coprimos e também maiores ou iguais ao quociente da divisão de T por 2. O menor multiplicador multiplica a menor quantidade de bolinhas em uma mão e o maior multiplica a maior quantidade na outra mão. Nessas condições testamos computacionalmente para centenas de possibilidades, e verificamos a unicidade da soma S em todas elas. Assim, fomos levados a formular a proposição seguinte.

Considere inicialmente que o participante 1 escolha $Q_1 = x_1 + y_1$ de um conjunto T de bolinhas tal que $0 \le x_1 \le y_1$, e que um participante 2 escolha $Q_2 = x_2 + y_2$ de um outro conjunto, também de T bolinhas, em que $0 \le x_2 \le y_2$.

Teorema 1. *Dado* $T \ge 0$, *consideremos* $N \ge 0$ *o quociente da divisão de* T *por* 2 *e* $v > u \ge N$, *sendo* u *e* v *coprimos maiores do que zero, os multiplicadores. Tomemos* $(x_1, y_1) \ne (x_2, y_2)$, *com* $x_1 \le y_1$ *e* $x_2 \le y_2$ *naturais tais que* $Q_i = x_i + y_i \le T$, $i = 1, 2$. *Definindo*

$$S_i = ux_i + vy_i \quad 8i = 1, 2,$$

então garante-se que

$$S_1 \ne S_2.$$

Demonstração. Suponhamos por contradição que existam inteiros $T, N, u, v, x_1, y_1, x_2$ e y_2 que cumprem as hipóteses da proposição e sejam tais que

$$S_1 = ux_1 + vy_1 = S_2 = ux_2 + vy_2.$$

Chegaremos em uma contradição, ao final das passagens seguintes. Da igualdade acima, temos:

$$v(y_1 - y_2) = u(x_2 - x_1). \tag{1}$$

Se $x_1 = x_2$ então $y_1 = y_2$, contrariando uma hipótese da proposição. Portanto, $x_1 \neq x_2$ e, como $v > u > 0$, tem-se que $y_1 \neq y_2$.

Como v e u são coprimos, conclui-se, por (1) e da Teoria dos Números, que v deve ser divisor de $x_2 - x_1$, ou seja, existe a inteiro não nulo tal que

$$x_2 - x_1 = av.$$

O inteiro não nulo a pode ser positivo ou negativo nesta equação.

Caso 1 Suponha inicialmente que $a > 0$. O caso $a < 0$ será tratado à parte. De (1),

$$v(y_1 - y_2) = uav,$$

$$y_1 - y_2 = ua.$$

De $a \geq 1$ e somando $x_2 - x_1 = av$ com $y_1 - y_2 = ua$, temos

$$(x_2 - x_1) + (y_1 - y_2) = av + ua \geq v + u \geq v + N > N + N = 2N,$$

de onde decorre que

$$x_2 - x_1 + y_1 - y_2 \geq 2N + 1. \tag{2}$$

Bem, sabemos que $T = 2N + 1$ ou $T = 2N$, conforme T seja ímpar ou par, respectivamente. De toda forma, é certo que $T \leq 2N + 1$.

Então, como por hipótese $x_2 - y_2 \leq 0$, temos:

$$x_2 - x_1 + y_1 - y_2 \leq y_1 - x_1 \leq y_1 \leq T \leq 2N + 1. \tag{3}$$

Logo, de (2) e (3),

$$x_2 - x_1 + y_1 - y_2 = 2N + 1, \tag{4}$$

e as desigualdades em (3) na verdade são igualdades. Assim, $T = 2N + 1$ é ímpar! As igualdades em (3) ainda implicam que $y_1 - x_1 = y_1 = 2N + 1$, o que só é possível se $x_1 = 0$. Desta forma, de (4), $x_2 - 0 + 2N + 1 - y_2 = 2N + 1$, e daí $x_2 = y_2$. Logo, $av = x_2 - x_1 = x_2 = y_2$.

O próximo passo acarretará na contradição que queremos. Por esta última igualdade, e das hipóteses da proposição, tem-se:

$$Q_2 = x_2 + y_2 = 2av \geq 2v \geq 2(u + 1) = 2u + 2 \geq 2N + 2 > 2N + 1 \geq T.$$

Ou seja,

$$Q_2 > T,$$

uma contradição. $\square$

Caso 2 Por outro lado, suponha agora que $a < 0$ na mesma equação $x_2 - x_1 = av$. Iremos chegar, por caminhos ligeiramente semelhantes, na contradição $Q_1 > T$.

De (1), ainda temos

$$v(y_1 - y_2) = uav,$$
$$y_1 - y_2 = ua.$$

Considere $b = -a > 0$. Desta forma,

$$x_1 - x_2 = bv$$

e

$$y_2 - y_1 = ub.$$

De $b \geq 1$ e somando $x_1 - x_2 = bv$ com $y_2 - y_1 = ub$, temos

$$(x_1 - x_2) + (y_2 - y_1) = bv + ub \geq v + u \geq v + N > N + N = 2N,$$

de onde decorre que

$$x_1 - x_2 + y_2 - y_1 \geq 2N + 1. \tag{5}$$

Lembremos que $T = 2N + 1$ ou $T = 2N$, de modo que $T \leq 2N + 1$.

Então, como por hipótese $x_1 - y_1 \leq 0$, temos:

$$x_1 - x_2 + y_2 - y_1 \leq y_2 - x_2 \leq y_2 \leq T \leq 2N + 1. \tag{6}$$

Logo, de (5) e de (6),

$$x_1 - x_2 + y_2 - y_1 = 2N + 1, \tag{7}$$

e as desigualdades em (6) na verdade são igualdades. Assim, $T = 2N + 1$.

As igualdades em (6) ainda implicam que $y_2 - x_2 = y_2 = 2N + 1$, o que só é possível se $x_2 = 0$.

Desta forma, de (7), $x_1 - 0 + 2N + 1 - y_1 = 2N + 1$, e daí $x_1 = y_1$.

Logo, $bv = x_1 - x_2 = x_1 = y_1$.

O próximo passo acarretará na contradição que queremos. Por esta última igualdade, e das hipóteses da proposição, tem-se:

$$Q_1 = x_1 + y_1 = 2bv \geq 2v \geq 2(u + 1) = 2u + 2 \geq 2N + 2 > 2N + 1 \geq T,$$

ou seja, $Q_1 > T$, uma nova contradição,

o que conclui, enfim a prova da unicidade de S para todos os casos possíveis para o inteiro não nulo a.

3. Como adivinhar x e y

Bem, até aqui vimos como escolher os multiplicadores u e v e também provamos que não há repetição de somas S com essas escolhas. Como descobrir, porém, as quantidades x e y a partir da informação do valor de S? Certamente não será memorizando todas as possíveis somas S e os respectivos valores de x e y; afinal, T poderá ser qualquer natural!

Ora, como $S = ux + vy$, tomando $v - u = m$, temos:

$$S = xu + y(u + m) = xu + yu + ym,$$

então, somando xm dos dois lados:

$$\begin{gathered} S + xm = xu + yu + ym + xm = \\ u(x + y) + m(x + y) = \\ (u + m)(x + y) = \\ v(x + y), \\ S + xm = v(x + y). \end{gathered}$$

Logo, x será aquele valor que, multiplicado por m e somado a S, resulta em um múltiplo de v , o que teoricamente enseja a descoberta de x .

Analogamente, se subtrairmos ym dos dois lados na fórmula de S:

$$S - ym = xu + y(u + m) - ym = u(x + y).$$

Assim, y será aquele valor que, multiplicado por m e subtraído de S, resulta em um múltiplo de u.

Não parece ser simples encontrar x ou y por estes dois critérios. No entanto, se u e v forem consecutivos positivos (logo coprimos), então $m = 1$ e daí y será o número que subtraído de S resulta em múltiplo de u, o que torna as operações mais fáceis.

4. Um exemplo

Enfim, analisemos uma situação concreta por meio de um diálogo, com $T = 200$, entre o adivinhador e participante. Os multiplicadores escolhidos serão os números inteiros consecutivos e coprimos $u = 100$ e $v = 101$, maiores ou iguais à metade de 200, como manda a proposição; sendo assim, $m = 1$ e y será o número que subtraído de S resulta em um múltiplo de 100:

Adivinhador: Vamos jogar? Escolha uma quantidade de bolinhas entre 0 e 200.

Participante: Escolhida.

Adivinhador: Distribua nas duas mãos. Multiplique a menor quantidade por 100 e a maior por 101.

Participante: Feito.

Adivinhador: Some os resultados. Quanto deu?

Participante: Deu 9.580.

Adivinhador: Então, das 200 bolinhas, você escolheu 95, sendo 15 em uma mão e 80 na outra. Participante: Como você descobriu?

Adivinhador: Vamos lá: $S = 9.580$. Então, y é o valor que, subtraído de 9.580, resulta num múltiplo de 100. Como $9.580 - 80 = 9.500$, então $y = 80$ é a maior quantidade que você escolheu distribuir numa das mãos.

Logo, isolando x em $S = 9.580 = 100x + 101 \cdot 80$, tenho que

$$x = \frac{9.580 - 101 \cdot 80}{100} = 15.$$

Esta é a menor quantidade escolhida. Você escolheu, portanto, um total de 95 bolinhas.

Ainda pode ficar uma dúvida. Caso pegássemos outro valor para y que subtraído de 9.580 também resultasse em um múltiplo de 100, por acaso não teríamos uma solução diferente, contrariando a proposição que ora provamos? A unicidade mostra ser isto impossível, porém, vejamos o que ocorreria nesse exemplo, a título de ilustração.

Se $y = 180$, portanto, teríamos $9.580 - 180 = 9.400$, também um múltiplo de 100. O problema ocorre agora, ao tentarmos encontrar x:

$$x = \frac{9.580 - 101 \cdot 180}{100} = -86.$$

Isto é, x seria negativo, o que não condiz com a mágica e tampouco com as hipóteses de nossa proposição.

5. Considerações no ensino

Naturalmente, a demonstração algébrica da validade do resultado é um tanto quanto complexa para ser mostrada a alunos de Ensino Médio, a menos que seja feita em alguma atividade extraclasse. No entanto, de posse do resultado, vale a aplicação da mágica aqui apresentada por despertar no estudante o espírito de investigação e questionamento do porquê de ela funcionar, servindo, quem sabe, como motivação para que o próprio aluno busque uma prova, com auxílio do seu professor.

Referências

[1] Santos, R. C. dos & Gontijo, C. H. "Uma mágica desafiadora". *Revista do professor de Matemática*. São Paulo: SBM, nº 96. pp.31–32, 2018.

[2] Shokranian, S S; Soares, M. & Godinho, H. *Teoria dos Números*. Brasília, UnB, 1999.

Rogério César dos Santos
Faculdade UnB - Planaltina
<rogerc@unb.br>

Paulo Eduardo de Brito
Faculdade UnB - Planaltina
<pedebrito@unb.br>

Wescley Well Vicente Bezerra
Faculdade UnB - Planaltina
<wescley@unb.br>

Carlos Derli Almeida Cornélio
Faculdade UEG - Formosa - Go
<matcarlosderli@gmail.com>

Recebido: 02/03/2020
Publicado: 06/05/2020