PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.8, n.4, 2020
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo835

Um modelo matemático (discreto) de propagação de uma doença no Ensino Médio

Carlos Alberto Martins de Assis

Resumo

As doenças epidemiológicas são uma grande preocupação em nossa sociedade. Com isso, conhecer melhor como ocorre a propagação, os locais de maior incidência, tempo de vida da doença, processos de cura, e outros fatores relacionados é essencial para controlar a sua disseminação. Sendo assim, este artigo irá propor um modelo matemático (discreto) simples, conhecido pelos epidemiologistas como modelo SIS (Suscetível-Infectado-Suscetível), e que pode facilmente ser trabalhado no Ensino Médio a fim de estimular a curiosidade dos alunos. Daí, utilizando o vírus da gripe - uma doença tão comum - o presente artigo mostrará, através desse modelo, como o surto dessa doença comporta-se em uma população de crianças.

Palavras-chave: Modelo SIS; Epidemiologia; Ensino Médio.

Abstract

Epidemiological diseases are a major concern in our society. Thus, better understanding how the spread occurs, the places with the highest incidence, the disease's lifetime, healing processes, and other related factors, are essential to control its spread. Therefore, this article will propose a simple (discrete) mathematical model, known by epidemiologists as the SIS (Susceptible-Infected-Susceptible) model, which can easily be worked on in high school in order to stimulate students' curiosity. Hence, using the flu virus as a common disease, this article will show how the outbreak of this disease behaves in a population of children through this model.

Keywords: SIS model; Epidemiology; High school.

1. Introdução

A utilização de modelos matemáticos para estudar a propagação de doenças contagiosas vem desde 1760, pelo menos, quando Daniel Bernoulli elaborou um trabalho sobre a varíola [3]. Mas, em 1906, o epidemiologista inglês Sir Willian Heaton Hamer observou que a disseminação de uma doença em uma população é diretamente proporcional ao produto da quantidade de indivíduos sadios pela quantidade de indivíduos infectados. Essa ideia de Hamer, conhecida como a "lei da ação de massas"[1], foi originalmente formulada através de um modelo de tempo discreto. Nos estudos

[1]Lei da ação de massas para a epidemiologia é baseada na suposição de que indivíduos infecciosos misturam-se homogeneamente aos suscetíveis em toda a população.

epidemiológicos, os modelos matemáticos possibilitam entender melhor a dinâmica de propagação de uma doença em uma determinada situação. Sendo assim, o objetivo deste artigo é propor um modelo matemático que permitirá entender o funcionamento da propagação de uma doença em sua versão discreta. Tal modelo que será utilizado é conhecido pela sigla SIS (que significa Suscetível-Infectado-Suscetível) e pode ser trabalhado em sala de aula com alunos do Ensino Médio.

2. Apresentação do funcionamento do modelo

Inicialmente, considerando uma unidade de tempo, digamos n em dias; uma população inicial constante (não são considerados nascimentos e mortes), que será indicada por N; e a existência de indivíduos que não estão infectados, dos quais definiremos como suscetíveis e indicaremos por (S_n), e indivíduos que estão atualmente infectados, que indicaremos por (I_n) . O fluxo da propagação de uma doença no modelo SIS afirma que:

"Um grupo de pessoas não infectadas, quando entra em contato com o grupo dos infectados, após se recuperarem da doença, voltam para a categoria inicial, configurando-se um cenário cíclico".

No entanto, muitas vezes, essas situações são resolvidas usando a solução de sistemas variacionais, onde é bem aconselhável tentar entender como são as variações das categorias envolvidas no fenômeno analisado. Com isso, podemos dizer que a variação do número de indivíduos suscetíveis no tempo n e n + 1 será indicada por $\Delta S_n = S_{n+1} - S_n$. Por analogia, a variação dos infectados será $\Delta I_n = I_{n+1} - I_n$. A transmissão de uma doença ocorre, por exemplo, através do contato pessoal, pelo uso de objetos etc. Sendo assim, vamos definir que a incidência da propagação da doença seja (α), onde

$$\alpha = \frac{\text{número de indivíduos infectados}}{N}, \tag{1}$$

e esse valor atuando na população fixa N acarreta uma diminuição no número de indivíduos suscetíveis, provocando um aumento no número de infectados no tempo n em dias, isto é, o número de indivíduos infectados origina $(\alpha \cdot S_n)$, novas pessoas infectadas no tempo n. Então, para saber qual o número total de novos infectados, basta multiplicar $(\alpha \cdot S_n)$ pelo número total de infectados (I_n) no tempo n, implicando $(\alpha \cdot S_n \cdot I_n)$. Note que a transmissão da doença é diretamente proporcional ao número de suscetíveis e infectados, onde foi modelado pelo produto entre suas quantidades (aqui se usa a "lei da ação de massas"). Podemos definir, também, que a constante positiva de proporcionalidade para a recuperação dos indivíduos infectados seja (β), em que

$$\beta = \frac{\text{número de óbitos}}{N} + \frac{\text{número de indivíduos recuperados}}{\text{número de indivíduos infectados}} \tag{2}$$

e, na maioria das vezes, ela é conhecida como taxa de recuperação ou remoção.
Assim, conforme foi mencionado anteriormente de como é o funcionamento do modelo SIS, observamos que quando o número de indivíduos suscetíveis entra em contato com os infectados, o número deles diminui, enquanto o número de pessoas infectadas aumenta na mesma proporção. Daí, deve-se subtrair $(\alpha \cdot S_n \cdot I_n)$ e adicionar $(\beta \cdot I_n)$. Logo, a variação do número de indivíduos suscetíveis será dada por

$$S_{n+1} - S_n = -\alpha \cdot S_n \cdot I_n + \beta \cdot I_n, \tag{3}$$

o que implica $\Delta S_n = -\alpha \cdot S_n \cdot I_n + \beta \cdot I_n$. Agora, para obter a variação do número de pessoas infectadas com a doença, também no tempo n, basta ver que o número delas diminui, uma vez que algumas são curadas. Isto é, para os indivíduos recuperados que agora voltaram para a categoria inicial, devem ser subtraídos $(\beta \cdot I_n)$ de $(\alpha \cdot S_n \cdot I_n)$. Daí, temos

$$I_{n+1} - I_n = \alpha \cdot S_n \cdot I_n - \beta \cdot I_n, \tag{4}$$

ou melhor, $\Delta I_n = \alpha \cdot S_n \cdot I_n - \beta \cdot I_n$.
Com isso, a dinâmica da disseminação de uma doença pode ser descrita pelo sistema de equações,

$$\begin{cases} \Delta S_n = -\alpha \cdot S_n \cdot I_n + \beta \cdot I_n \\ \\ \Delta I_n = \alpha \cdot S_n \cdot I_n - \beta \cdot I_n \end{cases}, \tag{5}$$

onde $S_n + I_n = N$. Mas, conforme está em [1], podemos encontrar uma fórmula de recorrência para obtermos S_{n+1}. Em outras palavras, perceba que ao substituir $I_n = N - S_n$ em (3), teremos

$$S_{n+1} = S_n - \alpha S_n \cdot (N - S_n) + \beta \cdot (N - S_n) \tag{6}$$

ou, ainda,

$$S_{n+1} = \alpha S_n^2 + S_n \cdot (1 - \alpha N - \beta) + \beta N, \tag{7}$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

3. Uma situação-problema para o modelo

Vejamos:

"O vírus da gripe é muito comum em crianças. Sendo assim, suponha que em uma escola com 1.000 crianças, 2 dessas crianças estejam com o vírus. Para a gripe, o período infeccioso é tipicamente de 1 a 3 dias. Se o considerarmos, por exemplo, igual a 2 dias, isso significa que a taxa de recuperação será $\beta = \frac{1}{2}$ (por criança e por dia), mostrando com isso que em um dia metade das crianças com gripe se recuperaram. Avalie o surto de gripe nessa população fixa, passados 20 dias do começo da disseminação da doença."

Sabemos que o total de crianças é $N = 1.000$. A incidência da propagação da gripe será igual a $\alpha = \frac{2}{1.000} = 0,002$, e a constante de recuperação será igual a $\beta = \frac{1}{2} = 0,5$. Substituindo esses valores em (7), o número de crianças suscetíveis será calculado através da equação

$$S_{n+1} = 0,002 S_n^2 - 1,5 S_n + 500 \tag{8}$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, 20$ e, paralelamente, será encontrado o número de crianças infectadas, onde inicialmente $I_0 = 2$.

3.1. Construindo uma tabela e o gráfico para análise

Através da equação (8), construiremos a Tabela 1 e a Figura 1 a seguir, que exibem o número de crianças suscetíveis e infectadas.

n	Crianças suscetíveis	Crianças infectadas
0	$= 998$	$= 2$
1	≈ 995	≈ 5
2	≈ 988	≈ 12
3	≈ 969	≈ 31
4	≈ 925	≈ 75
5	≈ 824	≈ 176
6	≈ 621	≈ 379
7	≈ 340	≈ 660
8	≈ 221	≈ 779
9	≈ 266	≈ 734
10	≈ 242	≈ 758
11	≈ 254	≈ 746
12	≈ 248	≈ 752
13	≈ 251	≈ 749
14	≈ 250	≈ 750
15	≈ 250	≈ 750
16	≈ 250	≈ 750
17	≈ 250	≈ 750
18	≈ 250	≈ 750
19	≈ 250	≈ 750
20	≈ 250	≈ 750

Tabela 1:

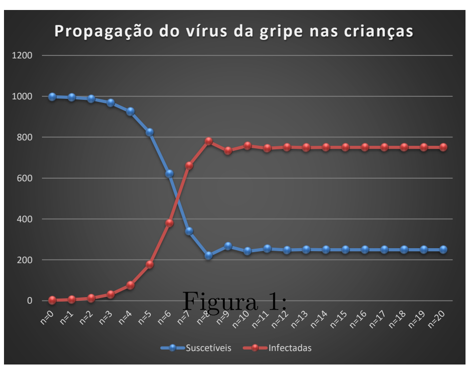

Figura 1:

Analisando-os, observe que, no primeiro momento, até o 8º dia, o número de crianças suscetíveis vem diminuindo rapidamente, enquanto o número de crianças infectadas vai aumentando; elas estão saindo da classe dos suscetíveis. E foi nesse dia que houve o pico de crianças infecciosas. No 9º dia, vemos que um pequeno grupo de crianças infectadas estão voltando para a classe dos suscetíveis. Do 10º dia até o 13º dia, percebemos uma oscilação bem pequena entre o número de crianças suscetíveis e infectadas. Sem nenhuma dificuldade, existe uma instabilidade no comportamento do número de crianças suscetíveis e infectadas até o 13º dia. Agora, quanto ao(s) ponto(s) de equilíbrio dessa situação-problema, podemos encontrá-lo(s)? A resposta é sem sombra de dúvida, para $S_n = 250$ $(14 \leq n \leq 20)$ e, consequentemente, para $I_n = 1.000 - 250 = 750$ (também no mesmo intervalo), pois observa-se uma convergência para a solução desse problema. Outro ponto de equilíbrio que pode ser visto é quando temos $S = N$ e $I = 0$, mas o que vemos em todo momento é $I \neq 0$, comprovando com isso a propagação da gripe [1]. Um outro dado de grande importância para os epidemiologistas é o valor basal de reprodução (ou reprodutividade basal), que significa o valor médio de novas crianças infectadas que são geradas por uma única criança infectada com a gripe na população quase totalmente suscetível, ou seja, esse valor avalia a situação do problema que estão enfrentando e é calculado conforme está em [2], fazendo $\frac{0{,}002}{0{,}5} \times 1.000 = 4 > 0$ (perceba que esse valor foi encontrado a partir da 2ª equação de (5), fazendo $\Delta I_n > 0$ e $S_n = 1.000$). De acordo com [2], quando esse valor de reprodutividade basal é > 1, a doença propaga-se e persiste na população; por outro lado, quando é < 1, a doença morre. Veja que, na população constituída das 1.000 crianças, o vírus da gripe propaga-se e persevera durante os 20 dias!

4. Considerações Finais

Finalizando, para aguçar a curiosidade do leitor, sugerimos que aprecie o funcionamento de outros modelos epidêmicos discretos, como o modelo SIR (Suscetível-Infectado-Recuperado) usado para modelar a dinâmica do vírus da dengue, o modelo SI (Suscetível-Infectado) usado para modelar o vírus do HIV, entre outros modelos, e apresente-os em sala de aula para estimular a aprendizagem e torná-la mais harmoniosa.

Agradecimentos

Um agradecimento especial ao colega Prof. Alexandre J. M. Antunes, na editoração em Latex desse trabalho.

Referências

[1] BASSANEZI, R. C.; JR, W. C. F. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo: Editora Harbra, 1988.

[2] CODEÇO, C. T.; COELHO, F. C. Modelagem de Doenças Transmissíveis. *Revista Oecologia Autralis*, 2012.

[3] DIPRIMA, R. C.; BOYCE, W. E. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2012.

[4] MASSAD, E. e outros. *Métodos Quantitativos em Medicina*. São Paulo: Editora Manole, 2004.

Carlos Alberto Martins de Assis
Rede Estadual de Educação - RJ
Universidade Estácio de Sá - Unesa/RJ
<carlosalbertodeassis@gmail.com>

Recebido: 28/04/2020
Publicado: 14/10/2020