PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.11, n.3, 2023
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2023/pmo1121

# Uma investigação sobre a dualidade dos poliedros regulares convexos

Maxwell Aires da Silva   Állisson Henrique Leite Cabral   Luciana Roze de Freitas[1]

**Resumo**

Este artigo tem por objetivo principal fazer um estudo analítico sobre os poliedros regulares convexos e os seus duais. Um poliedro é dito dual de outro quando os vértices de um coincidem com os centros das faces do outro. No caso dos poliedros regulares convexos, pretende-se calcular qual a redução que se deve fazer sobre a aresta de um poliedro a fim de que esse se mostre inscrito no seu dual. Como existem apenas cinco poliedros regulares convexos, serão apresentados todos os casos possíveis de redução visando a completude do trabalho.

**Palavras-chave:** Poliedros; Dualidade; Redução.

**Abstract**

The main objective of this article is to make an analytical study about the regular convex polyhedrons and their duals. A polyhedron is said to be dual of another when the vertices of one coincide with the centers of the faces of the other. In the case of regular convex polyhedra, we intend to calculate which reduction must be made on the edge of a polyhedron so that it appears inscribed in its dual. As there are only five regular convex polyhedra, all possible cases of reduction will be presented in aiming to completeness the work.

**Keywords:** Polyhedron; Duality; Reduction.

## 1. Introdução

Os poliedros são figuras geométricas estudadas há muitos anos por várias civilizações diferentes. Cada povo deu a sua contribuição no sentido de estabelecer e aprimorar os conceitos relacionados a essas figuras [1]. Os poliedros (especialmente os regulares) têm uma forma bastante agradável, o que acaba instigando o aluno em querer aprender mais sobre seus elementos.

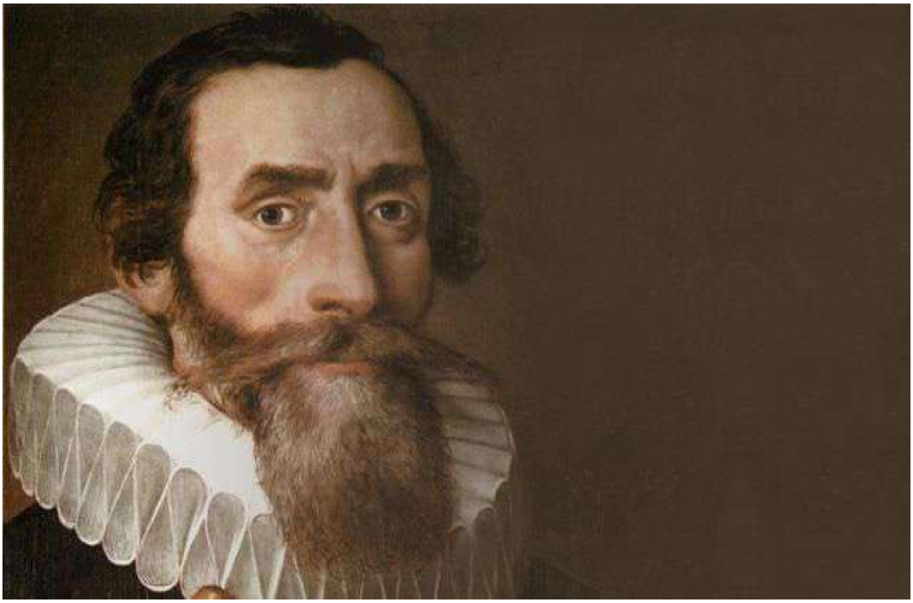
Tais sólidos estiveram presentes em várias obras de artistas clássicos, como em pinturas e na arquitetura. Pode-se encontrar, em [2], alguns relatos que comprovam a confecção de artefatos em forma de poliedro aproximadamente em 500 a.C., mais precisamente de um dodecaedro regular.

[1]Apoiado pela Fundação de Apoio à Pesquisa da Paraíba (Fapesq), Termo de Outorga nº 3024/2021

É importante destacar, também, que o estudo dos poliedros permite-nos consolidar uma revisão sobre os conceitos relacionados às geometrias plana e espacial de um modo geral.

A ideia de dualidade entre dois poliedros é bem intuitiva, pois envolve basicamente a noção de inscrição e circunscrição mútua. A definição de dualidade que vamos adotar neste artigo é devida ao astrônomo e matemático alemão **Johannes Kepler** (1571 - 1630), e pode ser encontrada em seu famoso livro *A harmonia dos mundos*, de 1619.

Figura 1: Johannes Kepler



Fonte: https://maestrovirtuale.com/johannes-kepler-biografia-leis-e-outras-contribuicoes/

Vamos apresentar algumas definições que nos servirão de guia no sentido do que se entende por poliedros regulares e acerca da dualidade destes.

**Definição 1** (Poliedro regular)**.** Chama-se poliedro regular àquele que satisfaz as seguintes condições:

**(1)** Todas as suas faces são formadas por polígonos regulares e congruentes entre si;
**(2)** O número de arestas que concorrem em cada vértice do poliedro é sempre o mesmo.

**Definição 2** (Poliedros duais)**.** Chamam-se poliedros duais àqueles em que um encontra-se inscrito no outro de tal forma que os vértices de um coincidem com os centros das faces do outro e vice-versa.

Um fato interessante acerca dos poliedros regulares convexos é que existem apenas cinco deles, cuja demonstração encontra-se em [1]. Além disso, há outros quatro poliedros não convexos que também são regulares, e esses constituem uma classe de poliedros bastante inusitada, a dos **sólidos de Kepler-Poinsot**. Esses sólidos são obtidos a partir de uma transformação geométrica chamada de **estrelação**. Ao leitor que deseja se aprofundar no tema principal deste artigo, sugerimos ver a referência [1], que faz uma discussão sobre a dualidade existente entre duas importantes classes de poliedros: os **sólidos de Arquimedes** e os **sólidos de Catalan**.

O objetivo principal deste artigo é investigar as relações de dualidade existente entre os poliedros regulares convexos, no sentido de calcular qual a redução que deve ser feita sobre a medida da aresta de um poliedro a fim de que ele se mostre inscrito no seu dual. Em cada caso, vamos considerar, sem perda de generalidade, a redução do poliedro de aresta medindo 1 unidade de comprimento.

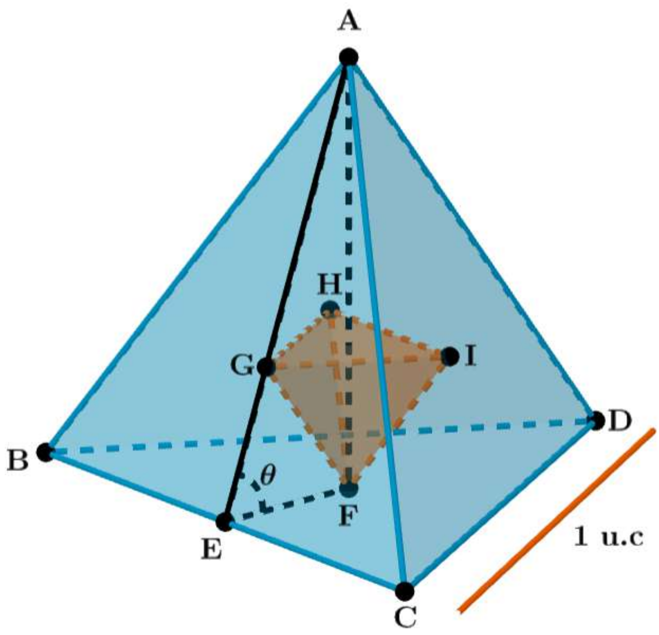
## 2. Autodualidade do tetraedro regular

O tetraedro regular admite uma autodualidade, ou seja, é dual consigo mesmo, sendo denominado um **poliedro hermafrodita**. A seguir, apresentamos um problema de redução envolvendo essa dualidade.

**Problema 1.** Considere um tetraedro regular ABCD de aresta medindo 1 unidade de comprimento. Qual deve ser a redução sobre a medida da aresta a fim de que esse se mostre inscrito no seu dual?

**Solução:** Considere um tetraedro regular ABCD de aresta medindo 1 unidade de comprimento. Tome agora os centros de cada uma de suas faces, os quais denotamos por $\mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{H}$ e I. Trace agora o apótema lateral AE, relativo à face ABC, a altura AF do tetraedro e o segmento EF. Com essa construção, fomenta-se o tetraedro FGHI, dual do tetraedro ABCD, e o ângulo diédrico $\mathrm{A\hat{E}F} = \theta$. Além disso, tome o baricentro G da face lateral ABC, conforme ilustra a Figura 2, a qual nos servirá de guia no decorrer de toda a solução.

Figura 2: Tetraedro regular e seu dual




Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Feito isso, note o seguinte:

$$\overline{\mathrm{AE}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\overline{\mathrm{EF}} = \overline{\mathrm{EG}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Atentando para o triângulo retângulo AFE, calcula-se o cosseno do ângulo $\theta$ :

$$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{EF}}}{\overline{\mathrm{AE}}} = \frac{\sqrt{3}/6}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{3}.$$

Por fim, para determinar $\overline{\mathrm{FG}}$ (aresta do tetraedro dual), basta aplicar a lei dos cossenos ao triângulo GEF. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{GF}}^2 &= \overline{\mathrm{EG}}^2 + \overline{\mathrm{EF}}^2 - 2\cdot\overline{\mathrm{EG}}\cdot\overline{\mathrm{EF}}\cdot\cos\theta \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{9},
\end{aligned}$$

e disso tem-se

$$\overline{\mathrm{GF}}^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \overline{\mathrm{GF}} = \frac{1}{3}.$$

De modo geral, pode-se concluir que a aresta do tetraedro inscrito mede $\frac{1}{3}$ da aresta do tetraedro circunscrito. Observe que a regularidade do tetraedro FGHI inscrito segue da regularidade do tetraedro ABCD, uma vez que as distâncias entre os centros das faces são iguais. Agora, unindo-se consecutivamente os centros das faces do tetraedro regular FGHI, fomenta-se um novo tetraedro regular cuja medida da aresta será igual a $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Portanto, a redução procurada é de **1 para 9**, ou seja, a medida da aresta de um tetraedro regular deve se reduzir a **um nono** do seu tamanho original para que esse mostre-se inscrito no seu dual. As Figuras 3 e 4 a seguir ilustram o que acontece no processo de redução de ABCD :

Figura 3: Antes da redução, $\overline{\mathrm{GH}} = 1/3$

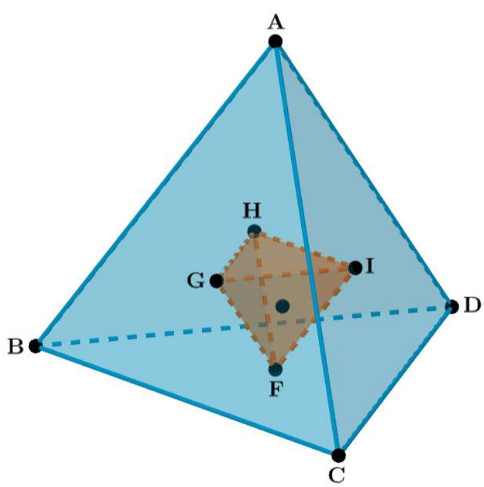
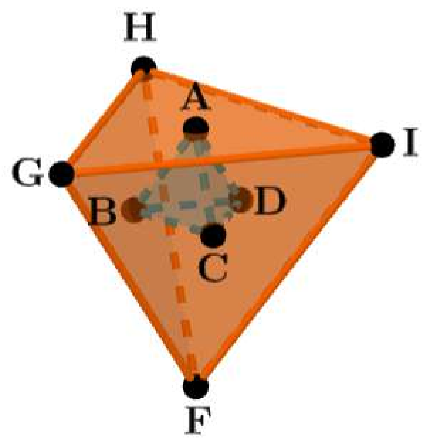



Figura 4: Depois da redução, $\overline{\mathrm{CD}} = 1/9$




Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

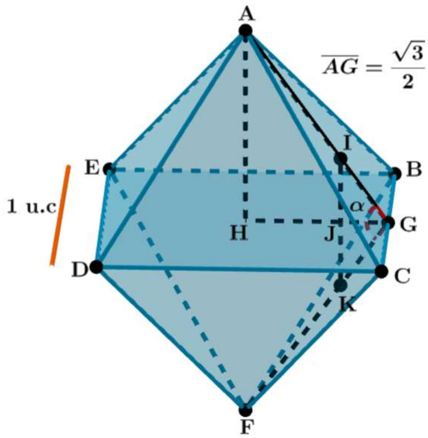
**3. Dualidade octaedro regular - hexaedro regular**

Nesta seção, consideramos o problema de redução dos sólidos duais octaedro e hexaedro regulares.

**Problema 2.** Considere um octaedro regular ABCDEF de aresta medindo 1 unidade de comprimento. Qual deve ser a redução sobre a medida da aresta a fim de que este se mostre inscrito no seu dual, o hexaedro regular?

**Solução:** Considere um octaedro regular ABCDEF de aresta medindo 1 unidade de comprimento. Sejam AG o apótema lateral, e I o baricentro da face ABC desse octaedro, H o centro do quadrado BCDE e J a projeção ortogonal de I sobre o segmento HG, conforme ilustra a Figura 5 a seguir:

Figura 5: Octaedro regular




Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Com isso, pode-se estabelecer o comprimento dos seguintes segmentos de reta:

$$\overline{\mathrm{EA}} = \overline{\mathrm{AB}} = 1$$
$$\overline{\mathrm{AG}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\overline{\mathrm{IG}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

e aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo AHG, tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{AG}}^2 = \overline{\mathrm{AH}}^2 + \overline{\mathrm{HG}}^2 \quad & \Rightarrow \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \overline{\mathrm{AH}}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ & \Rightarrow \quad \overline{\mathrm{AH}}^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \\ & \Rightarrow \quad \overline{\mathrm{AH}}^2 = \frac{1}{2} \\ & \Rightarrow \quad \overline{\mathrm{AH}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Agora, usando o fato de que os triângulos AHG e IJG são semelhantes, obtém-se:

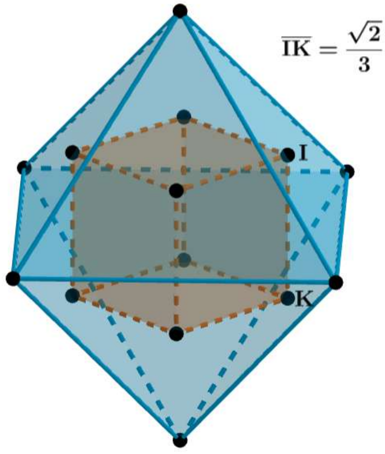
$$\begin{aligned} \frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{IJ}}} = \frac{\overline{\mathrm{AG}}}{\overline{\mathrm{IG}}} \quad & \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}/2}{\overline{\mathrm{IJ}}} = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/6} \\ & \Rightarrow \quad \overline{\mathrm{IJ}} = \frac{\sqrt{2}/2 \cdot \sqrt{3}/6}{\sqrt{3}/2} \\ & \Rightarrow \quad \overline{\mathrm{IJ}} = \frac{\sqrt{2}}{6}. \end{aligned}$$

Como o triângulo IGK é isósceles de base IK, então $\overline{\mathrm{IJ}} = \overline{\mathrm{JK}} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$, e isso nos diz que:

$$\overline{\mathrm{IK}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

e, sendo assim, o hexaedro regular inscrito no octaedro regular ABCDEF tem aresta com medida igual a $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ conforme ilustra a Figura 6 a seguir:

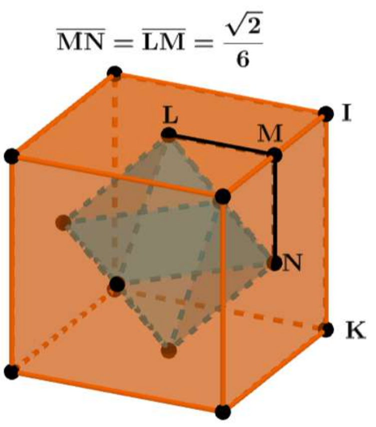
Figura 6: Hexaedro de aresta $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$




Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Agora, vamos determinar a medida da aresta do octaedro regular inscrito nesse hexaedro. Para tanto, basta observar que os pontos $\mathrm{L}, \mathrm{M}$ e $\mathrm{N}$ são vértices de um quadrado de lado $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ (metade da aresta do hexaedro regular), conforme ilustra a Figura 7 a seguir:

Figura 7: Determinando a medida da aresta do octaedro inscrito




Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

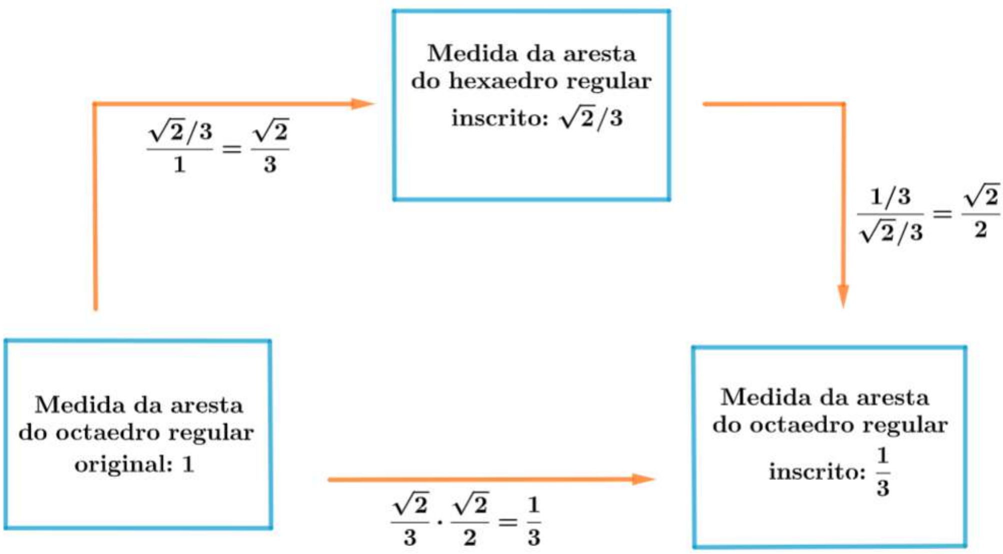
Logo, segue-se:

$$\overline{\mathrm{LN}} = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{3}.$$

Portanto, a redução procurada é de **1 para 3**, ou seja, a medida da aresta de um octaedro regular deve se reduzir a **um terço** para que este se mostre inscrito no seu dual.

Considerando o problema inverso, isto é, supondo que um octaedro regular esteja inicialmente inscrito em um hexaedro regular de aresta medindo 1 unidade de comprimento, qual deve ser a redução sobre a medida da aresta desse a fim de que ele se mostre inscrito naquele? Será que tal redução coincide com a encontrada há pouco? A resposta para essas perguntas é relativamente simples, pois as semelhanças existentes entre os poliedros envolvidos permitem-nos estabelecer o esquema adiante:

Figura 8: Esquema de construção




Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

De acordo com o esquema anterior, para calcularmos a redução sobre a medida da aresta de um hexaedro regular de aresta medindo x unidades de comprimento, é suficiente realizarmos o seguinte produto, percebendo que os fatores de redução $\frac{\sqrt{2}}{3}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$ comutam entre si. De fato,

$$\mathrm{x} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\mathrm{x}}{3},$$

o que nos revela que a redução independe da ordem de inscrição dos sólidos.

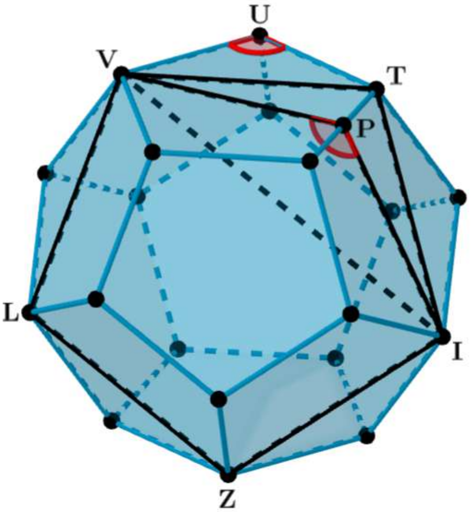
## 4. Dualidade dodecaedro regular - icosaedro regular

Nesta seção, consideramos o problema de redução dos sólidos duais: dodecaedro e icosaedro regulares.

**Problema 3.** Considere um dodecaedro regular de aresta medindo 1 unidade de comprimento. Qual deve ser a redução sobre a medida da aresta para que esse mostre-se inscrito no seu dual, o icosaedro regular?

**Solução:** Inicialmente, deve-se calcular a medida do ângulo diédrico do dodecaedro regular. Para tanto, considere o dodecaedro regular da Figura 9 a seguir:

Figura 9: Dodecaedro regular e alguns elementos




Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

É sabido que a medida de cada ângulo interno de um pentágono regular é 108°. De posse disso, vamos usar a lei dos cossenos no triângulo isósceles UVT, formado por vértices consecutivos do dodecaedro obtendo:

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{VT}}^2 &= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 108^\circ \\ &= 2 - 2 \cdot \cos 108^\circ, \end{aligned}$$

donde tem-se

$$\overline{VT} = \sqrt{2 - 2 \cdot \cos 108^\circ}.$$

No triângulo retângulo VPT, aplicamos o teorema de Pitágoras para descobrir o comprimento da altura VP da face pentagonal do dodecaedro regular. Ou seja,

$$\begin{aligned}
\overline{VT}^2 = \overline{VP}^2 + \overline{PT}^2 \quad &\Rightarrow \quad 2 - 2 \cdot \cos 108^\circ = \overline{VP}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
&\Rightarrow \quad 8 - 8 \cdot \cos 108^\circ = 4\overline{VP}^2 + 1 \\
&\Rightarrow \quad \overline{VP}^2 = \frac{7 - 8 \cdot \cos 108^\circ}{4} \\
&\Rightarrow \quad \overline{VP} = \sqrt{\frac{7 - 8 \cdot \cos 108^\circ}{4}}.
\end{aligned}$$

Agora, foquemos no pentágono regular VTIZL e calculemos a medida da sua diagonal VI, observando que $\overline{VT} = \overline{TI}$. Ou seja,

$$\begin{aligned}
\overline{VI}^2 = \overline{VT}^2 + \overline{TI}^2 - 2 \cdot \overline{VT} \cdot \overline{TI} \cdot \cos(V\hat{T}I) \quad &\Rightarrow \quad \overline{VI}^2 = 2 - 2 \cdot \cos 108^\circ + 2 - 2 \cdot \cos 108^\circ \\
&- \quad 2 \cdot (2 - 2 \cdot \cos 108^\circ) \cdot \cos 108^\circ \\
&\Rightarrow \quad \overline{VI}^2 = 4 - 8 \cdot \cos 108^\circ + 4 \cdot \cos^2 108^\circ \\
&\Rightarrow \quad \overline{VI}^2 = (2 - 2 \cdot \cos 108^\circ)^2 \\
&\Rightarrow \quad \overline{VI} = 2 - 2 \cdot \cos 108^\circ.
\end{aligned}$$

Mais uma vez, aplicamos a lei dos cossenos; dessa vez ao triângulo isósceles VPI, na tentativa de encontrarmos a medida do ângulo $V\hat{P}I$. Note que $\overline{VP} = \overline{PI}$, e, nesse caso,

$$\overline{VI}^2 = \overline{VP}^2 + \overline{PI}^2 - 2 \cdot \overline{VP} \cdot \overline{PI} \cdot \cos(V\hat{P}I)$$

ou seja,

$$4 - 8\cos 108^\circ + 4\cos^2 108^\circ = \frac{7 - 8\cos 108^\circ}{4} + \frac{7 - 8\cos 108^\circ}{4} - 2 \cdot \left(\frac{7 - 8 \cdot \cos 108^\circ}{4}\right) \cdot \cos(V\hat{P}I),$$

ou ainda

$$4 - 8 \cdot \cos 108^\circ + 4 \cdot \cos^2 108^\circ = \frac{7 - 8 \cdot \cos 108^\circ}{2} - \left(\frac{7 - 8 \cdot \cos 108^\circ}{2}\right) \cdot \cos(V\hat{P}I),$$

assim

$$8 - 16 \cdot \cos 108^\circ + 8 \cdot \cos^2 108^\circ = 7 - 8 \cdot \cos 108^\circ - (7 - 8 \cdot \cos 108^\circ) \cdot \cos(V\hat{P}I),$$

e então

$$(7 - 8 \cdot \cos 108^\circ) \cdot \cos(V\hat{P}I) = 8\cos 108^\circ - 8\cos^2 108^\circ - 1,$$

e portanto

$$\cos(V\hat{P}I) = \frac{8\cos 108^\circ - 8\cos^2 108^\circ - 1}{7 - 8 \cdot \cos 108^\circ}.$$

Observe que $108°$ não é um arco notável, e seu cosseno associado é um número irracional, dado por $\cos 108° = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\cos(\mathrm{V\hat{P}I}) &= \frac{8\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\right) - 8\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1}{7 - 8\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\right)} \\
&= \frac{2 - 2\sqrt{5} - \left(\dfrac{1-2\sqrt{5}+5}{2}\right) - 1}{7-(2-2\sqrt{5})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - 2\sqrt{5} - \left(\dfrac{6-2\sqrt{5}}{2}\right)}{5+2\sqrt{5}} \\
&= \frac{2-4\sqrt{5}-6+2\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{5+2\sqrt{5}} \\
&= \frac{-4-2\sqrt{5}}{2(5+2\sqrt{5})} \\
&= \frac{-2-\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}\cdot\frac{5-2\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}} \\
&= \frac{-10+4\sqrt{5}-5\sqrt{5}+10}{25-20}.
\end{aligned}$$

Daí,

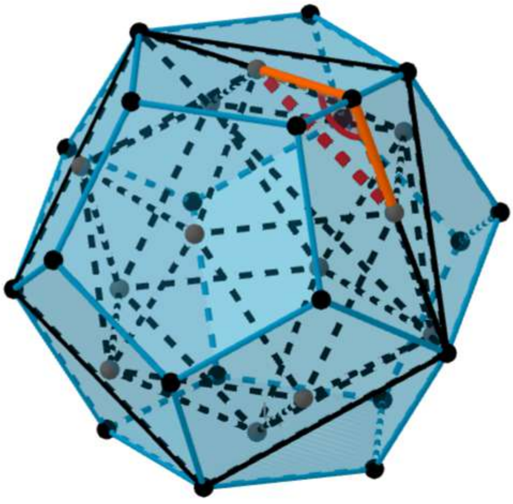
$$\cos(\mathrm{V\hat{P}I}) = \frac{-\sqrt{5}}{5},$$

e isso nos diz que a medida do ângulo formado por duas faces adjacentes do dodecaedro regular vale

$$\arccos\left(\frac{-\sqrt{5}}{5}\right).$$

Além disso, devemos determinar a medida do ângulo diédrico do icosaedro regular. Para tanto, precisamos conhecer o comprimento da aresta do icosaedro regular inscrito em nosso dodecaedro regular de aresta 1. Calculemos a medida da aresta do icosaedro regular destacada em vermelho na Figura 10:

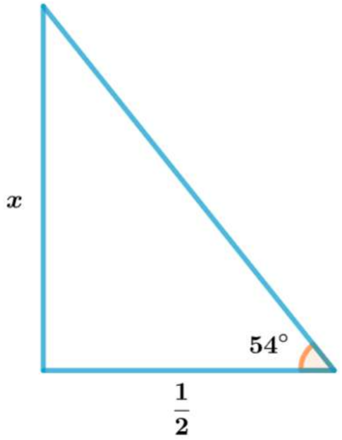
Figura 10: Determinando a aresta do icosaedro regular



Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Perceba que os segmentos destacados em laranja na figura anterior são apótemas das faces pentagonais do dodecaedro regular e o ângulo em evidência é exatamente o ângulo diédrico do mesmo. Lançando mão, novamente, da medida do ângulo interno de um pentágono regular, constrói-se o triângulo retângulo da Figura 11 sobre a face do dodecaedro regular.

Figura 11: Triângulo retângulo construído




Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Na figura anterior, o segmento de medida x corresponde ao apótema da face pentagonal do dodecaedro regular. Tomando a tangente de 54°, obtém-se

$$\tan 54^\circ = \frac{\mathrm{x}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \mathrm{x} = \frac{\tan 54^\circ}{2}. \tag{1}$$

Recordemos o fato de que $\cos 108^\circ = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ e façamos uso da fórmula do cosseno do arco duplo. Teremos o seguinte:

$$\cos 108^\circ = \cos(2 \cdot 54^\circ) = \cos^2 54^\circ - \operatorname{sen}^2 54^\circ = \frac{1-\sqrt{5}}{4}. \tag{2}$$

Mas, da relação fundamental da trigonometria, sabemos que

$$\cos^2 54^\circ = 1 - \operatorname{sen}^2 54^\circ. \tag{3}$$

Daí, substituindo (3) em (2):

$$1 - \operatorname{sen}^2 54^\circ - \operatorname{sen}^2 54^\circ = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

Isto é,

$$2\operatorname{sen}^2 54^\circ = \frac{3+\sqrt{5}}{4}.$$

Daí,

$$\operatorname{sen}^2 54^\circ = \frac{3+\sqrt{5}}{8}, \tag{4}$$

e isso revela-nos

$$\cos^2 54^\circ = 1 - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}\right) = \frac{5-\sqrt{5}}{8}. \tag{5}$$

De (4) e (5), segue-se

$$\tan^2 54^\circ = \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{5+2\sqrt{5}}{5}.$$

Ou seja,

$$\tan 54^\circ = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}. \tag{6}$$

Dessa forma, substituindo (6) em (1):

$$\mathrm{x} = \frac{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}}{2} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}.$$

Agora, apliquemos a lei dos cossenos ao triângulo isósceles destacado na Figura 10. Sendo y a medida do segmento tracejado destacado em vermelho (aresta do icosaedro regular), então

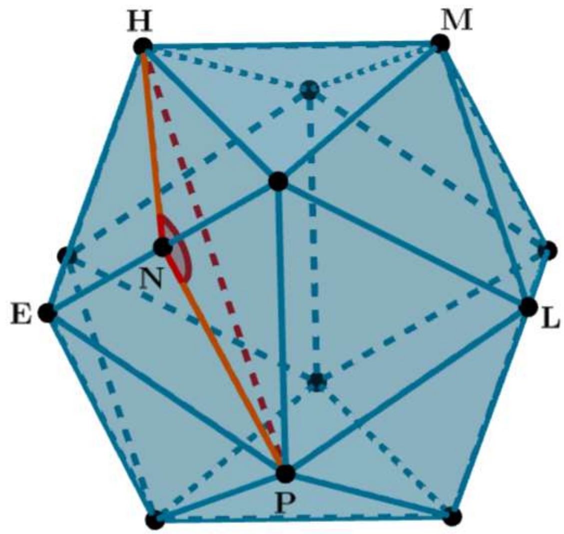
$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{5+2\sqrt{5}}{20} + \frac{5+2\sqrt{5}}{20} - 2 \cdot \left(\frac{5+2\sqrt{5}}{20}\right) \cdot \left(\frac{-\sqrt{5}}{5}\right) \\ &= \frac{5+2\sqrt{5}}{10} + \left(\frac{5\sqrt{5}+10}{50}\right) \\ &= \frac{25+10\sqrt{5}+5\sqrt{5}+10}{50} \\ &= \frac{35+15\sqrt{5}}{50} \\ &= \frac{7+3\sqrt{5}}{10}. \end{aligned}$$

Com isso, a medida da aresta do icosaedro regular inscrito em um dodecaedro regular de aresta 1 é igual

$$\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{10}}.$$

Retornemos ao cálculo do ângulo diédrico de um icosaedro regular. Consideremos o icosaedro regular da figura que segue e encontremos, inicialmente, a medida do segmento tracejado destacado em vermelho (diagonal do pentágono regular EHMLP). Já sabemos que a abertura do ângulo interno $H\hat{E}P$ vale 108°, e nesse caso, deve-se aplicar a lei dos cossenos ao triângulo isósceles HEP, cujos lados congruentes medem $\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{10}}$ (aresta do icosaedro regular).

Figura 12: Ângulo diédrico do icosaedro regular




Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Tem-se

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{HP}}^2 &= \overline{\mathrm{HE}}^2 + \overline{\mathrm{EP}}^2 - 2 \cdot \overline{\mathrm{HE}} \cdot \overline{\mathrm{EP}} \cdot \cos(\mathrm{H\hat{E}P}) \\
&= \frac{7+3\sqrt{5}}{10} + \frac{7+3\sqrt{5}}{10} - 2 \cdot \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{4} \\
&= \frac{7+3\sqrt{5}}{5} - \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{5}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) \\
&= \frac{28+12\sqrt{5}-7+7\sqrt{5}-3\sqrt{5}+15}{20} \\
&= \frac{36+16\sqrt{5}}{20}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\overline{\mathrm{HP}} = \sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{5}}.$$

Prossigamos fixando os olhares sobre o triângulo isósceles HNP, levando em consideração o fato de que os lados HN e PN são alturas das faces do icosaedro regular. Ou seja,

$$\overline{\mathrm{HN}} = \overline{\mathrm{PN}} = \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{10}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aplicando a lei dos cossenos a esse último triângulo mencionado, segue-se

$$\overline{\mathrm{HP}}^2 = \overline{\mathrm{HN}}^2 + \overline{\mathrm{PN}}^2 - 2 \cdot \overline{\mathrm{HN}} \cdot \overline{\mathrm{PN}} \cdot \cos(\mathrm{H\hat{N}P}),$$

daí

$$\frac{9+4\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{10}\right) + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{10}\right) - 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \cos(\mathrm{H\hat{N}P}),$$

ou seja

$$\frac{72+32\sqrt{5}}{40} = \frac{42+18\sqrt{5}}{40} - \frac{42+18\sqrt{5}}{40} \cdot \cos(\mathrm{H\hat{N}P}),$$

e com isso

$$\frac{42+18\sqrt{5}}{40} \cdot \cos(\mathrm{H\hat{N}P}) = \frac{42+18\sqrt{5}}{40} - \frac{72+32\sqrt{5}}{40},$$

ou ainda

$$\frac{42+18\sqrt{5}}{40} \cdot \cos(\mathrm{H\hat{N}P}) = \frac{-30-14\sqrt{5}}{40}.$$

Dessa forma,

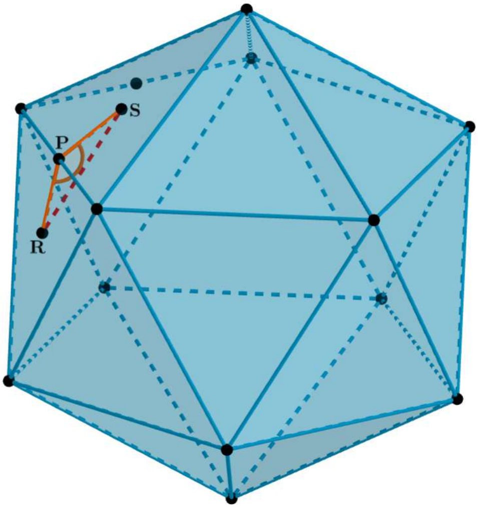
$$\begin{aligned} \cos(\mathrm{H\hat{N}P}) &= \frac{-30-14\sqrt{5}}{42+18\sqrt{5}} \cdot \frac{42-18\sqrt{5}}{42-18\sqrt{5}} \\ &= \frac{-1260+540\sqrt{5}-588\sqrt{5}+1260}{1764-1620} \\ &= \frac{-48\sqrt{5}}{144} \\ &= \frac{-\sqrt{5}}{3}, \end{aligned}$$

e isso diz-nos que a medida do ângulo formado por duas faces adjacentes do icosaedro regular vale

$$\arccos\left(\frac{-\sqrt{5}}{3}\right).$$

Finalmente, estamos aptos a calcular a redução sobre a aresta do dodecaedro regular a fim de que ele passe a se mostrar inscrito no icosaedro regular. Basta considerarmos a inscrição do dodecaedro regular no icosaedro regular, cuja aresta mede $\overline{\mathrm{RS}}$, segmento destacado em vermelho na Figura 13 a seguir:

Figura 13: Aresta do dodecaedro inscrito destacada em vermelho




Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Observe que os segmentos destacados em laranja são apótemas das faces do icosaedro regular, cuja medida da aresta é $\sqrt{\dfrac{7+3\sqrt{5}}{10}}$. Lembre-se que esse icosaedro regular, por sua vez, encontra-se inscrito no dodecaedro regular de aresta 1. Como já salientamos algumas vezes ao longo das aplicações, o comprimento dos apótemas PR e PS vale um terço da medida da altura das faces triangulares, isto é,

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{10}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

E, pela última vez, aplicando a lei dos cossenos ao triângulo isósceles RPS, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{RS}}^2 &= \overline{\mathrm{PR}}^2+\overline{\mathrm{PS}}^2-2\cdot\overline{\mathrm{PR}}\cdot\overline{\mathrm{PS}}\cdot\cos(\mathrm{R\hat{P}S})\\
&= \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{10}\right)\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{10}\right)\cdot\frac{3}{4}-2\cdot\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{10}\right)\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{-\sqrt{5}}{3}\right)\\
&= \frac{21+9\sqrt{5}+21+9\sqrt{5}+14\sqrt{5}+30}{360}\\
&= \frac{9+4\sqrt{5}}{45}.
\end{aligned}$$

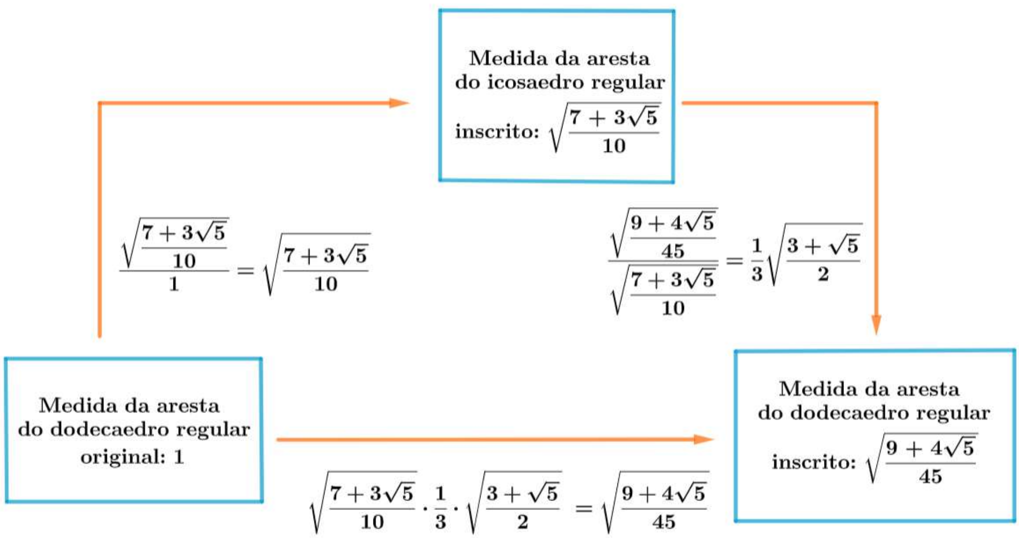
Portanto,

$$\overline{\mathrm{RS}}=\sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{45}}\approx 0,6314,$$

que corresponde à medida da aresta do dodecaedro regular inscrito no icosaedro regular, o qual outrora estava inscrito no dodecaedro regular de aresta 1.

Portanto, a redução procurada é de 1 **para** $\sqrt{\dfrac{9+4\sqrt{5}}{45}}$, a qual é a redução que deve ser feita sobre a medida da aresta do dodecaedro regular para que esse se mostre inscrito no seu dual. Consequentemente, conclui-se que o percentual de redução é de aproximadamente $36,86\%$.

Figura 14: Esquema de construção




Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Analisando o esquema anterior, o qual estabelece os fatores de redução envolvidos no **Problema** 3, pode-se verificar que se considerarmos um dodecaedro regular inicialmente inscrito em um icosaedro regular de aresta medindo 1 unidade de comprimento, a redução sobre a medida da aresta desse a fim de que ele se mostre inscrito nesse será a mesma encontrada há pouco, pois:

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{10}} = \sqrt{\frac{9+4\sqrt{5}}{45}}.$$

## Referências

[1] Cabral, A. H. L. *Poliedros duais e algumas aplicações*. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação - Mestrado em Matemática Profmat. Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande, p. 101. 2019.

[2] Eves, H. *Introdução à história da matemática* - Campinas: Editora Unicamp, 2008.

Maxwell Aires da Silva
Universidade Estadual da Paraíba
<maxwellaires@servidor.uepb.edu.br>

Állisson Henrique Leite Cabral
E.E.E.F.M. Poetisa Vicentina Figueiredo Vital do Rego
<madagascar_kof@hotmail.com>

Luciana Roze de Freitas[2]
Universidade Estadual da Paraíba
<lucianarfreitas@hotmail.com>

Recebido: 13/07/2022
Publicado: 23/08/2023

[2]Apoiado pela Fundação de Apoio à Pesquisa da Paraíba (Fapesq), Termo de Outorga nº 3024/2021