PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.11, n.3, 2023
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2023/pmo1122

# A conjectura de Galileu e o movimento em queda livre

Jaime Bruck Ripoll

**Resumo**

Apresentamos o trabalho de Galileu sobre o movimento em queda livre. Mostramos que podemos trocar volocidade instântanea por velocidade média, o que permite abordar este estudo de Galileu, de uma forma matematicamente consistente, no Ensino Médio.

**Palavras-chave:** Conjectura de Galileu; movimento em queda livre

**Abstract**

We explain the work of Galileu about the free fall motion. We prove that it is possible to change the infinitesimal speed by the mean speed, what allows to present this study of Galileu, on a mathematically consistent form, to middle school students.

**Keywords:** Galileu conjecture; free fall motion

## 1. Introdução

O estudo do movimento de queda livre tem uma longa história. Até Galileu tomava-se como correta a concepção de Aristóteles de que a velocidade de um corpo em queda livre dependia de sua massa (ou do seu peso). Galileu refutou tal ideia, embora nunca tenha apresentado uma comprovação experimental de por que a refutava. Atribuem algumas vezes a ele uma experiência largando objetos da torre de Pisa. Mas isso aparentemente não passa de lenda pois, como experiência, é inconclusiva: deixa sempre a dúvida de que talvez as alturas utilizadas não sejam suficientemente grandes, ou de os pesos não serem suficientemente distintos, para comprovar qualquer uma das concepções, tanto a de Aristóteles quanto a de Galileu.

Apesar de Galileu não ter apresentado nenhuma comprovação empírica de sua opinião, ele fazia uso de uma interessante argumentação hipotética envolvendo um raciocínio por contradição (veja [1] ).

Pois bem: assumindo que a velocidade com que cai um corpo não depende da massa do corpo, Galileu foi adiante e conjecturou que a velocidade era diretamente proporcional ao tempo de queda. Ou seja, existe uma constante universal $c > 0$ tal que a velocidade $v(t)$ de um corpo que cai em queda livre, partindo do repouso, após um tempo $t$, é $v(t) = ct$. A questão então era como comprovar essa conjectura e determinar $c$.

Para isso, Galileu considerou o seguinte fato mais geral: se um corpo rola livremente em um plano inclinado a partir do repouso, e se o corpo leva um tempo $t$ para chegar à base do plano, então sua velocidade $v(t)$ nesse momento será $v(t) = c_\alpha t$, onde $c_\alpha$ é uma constante que depende apenas do ângulo $\alpha$ que o plano forma com o plano horizontal. Em tal caso, teríamos $c = c_{\pi/2}$.

Galileu então realizou uma experiência que ficou muito famosa para comprovar sua conjectura, a experiência dos planos inclinados. Esta experiência permitia trocar medidas de velocidades por medidas de distâncias, essas últimas mais fáceis de serem obtidas. Com esse experimento Galileu comprovou empiricamente que a distância percorrida por uma bola rolando em um plano inclinado é uma função quadrática do tempo de percurso. Parece que chegou a estimar que $c \approx 4m/s^2$. Uma linda exposição desse experimento encontra-se em [2]. Historiadores consideram que Galileu introduziu o método experimental em Física.

Quando falamos em velocidade no tempo $t$ estamos nos referindo a velocidade instantânea que, para ser bem definida, precisa da noção de derivada, estudada nos cursos universitários de Cálculo Diferencial, inviável portanto de ser abordada na escola básica. Mas veremos a seguir que podemos evitar o uso do Cálculo Diferencial, trocando velocidade instantânea por velocidade média.

Lembramos que a velocidade média no intervalo $t_0$, $t_0 + t$, $t \neq 0$, é dada por

$$v_m(t_0, t_0 + t) = \frac{d(t_0 + t) - d(t_0)}{t}.$$

A velocidade média no intervalo $t_0$, $t_0 + t$ nada mais é do que a taxa de variação $\Delta d/\Delta t$ da função distância nesse intervalo. O que afirmamos decorre do seguinte resultado de cálculo.

**Proposição 1.** *Considere uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ .

*(a) Se* $f$ *é derivável e* $f'(t) = ct$ *então a taxa de variação de* $f$ *nos intervalos de extremidades* $0$ *e* $t$ *é dada por*

$$\frac{\Delta f}{\Delta t}(0, t) = \frac{1}{2}ct. \tag{1}$$

*(b) Se a taxa de variação de* $f$ *é dada por (1) para todo* $t$ *com* $t \neq 0$ *então* $f$ *é derivável em* $\mathbb{R}$ *e* $f'(t) = ct$.

*Demonstração.* (a) Do cálculo,

$$f(t) = \frac{c}{2}t^2 + d$$

de modo que

$$\frac{\Delta f}{\Delta t}(0, t) = \frac{\frac{c}{2}t^2 + d - d}{t} = \frac{1}{2}ct.$$

(b) Tomando $t$ qualquer não nulo em (1) vem

$$\frac{1}{2}ct = \frac{\Delta f}{\Delta t}(0, t) = \frac{f(t) - f(0)}{t}, \tag{2}$$

de modo que

$$f(t) = \frac{1}{2}ct^2 + f(0)$$

donde segue que $f$ é derivável em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $f'(t) = ct$, $t \neq 0$. Além disso, temos de (2)

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{2}ct\right) = 0,$$

de modo que $f$ é derivável em $t = 0$ e $f'(0) = 0$, o que prova (b). □

Tal proposição mostra que podemos trocar, na conjectura de Galileu, a velocidade instantânea pela velocidade média. Ou seja: conjecturar que a velocidade média $v_m$ de um corpo, qualquer, que cai em queda livre, a partir do repouso, em um instante $t \geq 0$, é proporcional a t ou seja, $v_m(0,t) = ct$, para alguma constante positiva c.

Além disso, o experimento do plano inclinado permite comprovar empiricamente essa conjectura. De fato: comprovando que a distância $d(t)$ de um corpo em queda livre que parte do repouso (sendo d, a distância em relação ao ponto de largada) é diretamente proporcional ao quadrado de t, $d(t) = ct^2$, tem-se:

$$v_m(0,t) = \frac{d(t) - d(0)}{t} = ct.$$

A partir daí o professor de Matemática, junto com o de Física, podem relembrar essa história do Galileu e, quem sabe, tentar reproduzir a experiência dos planos inclinados bolada por Galileu para comprovar empiricamente tal conjectura, usando velocidade média no lugar de velocidade infinitesimal ou instantânea. Uma ótima lição de Ciência com letra maiúscula.

**Observações.**

1) A escola não dispondo de um laboratório de marcenaria suficientemente bem equipado, torna-se difícil a construção de um modelo físico para comprovar, com boa precisão, através da experiência dos planos inclinados, a conjectura de Galileu. Contudo, essa construção pode ser modelada computacionalmente como feito em [3], o que abre uma janela para uma interaçâo entre Matemática, Física e Computação.

2) Uma questão interessante que surge naturalmente é: qual o valor da constante de proporcionalidade $c_\alpha$ na fórmula $v(t) = c_\alpha t$ em termos da inclinação $\alpha$ do plano? Usando a fórmula $d = c_\alpha t^2$ é necessário bem pouca coisa para, experimentalmente, estimar $c_\alpha$ para alguns valores de $\alpha$. Fica como desafio.

## Referências

[1] https://physics.stackexchange.com/questions/92849/is-galileis-reasoning-on-free-fall-valid

[2] https://www.youtube.com/watch?v=eghdN-GFuqo

[3] Luiz A. Ribeiro Junior, Marcelo F. Cunha e Cássio C. Laranjeiras. "Simulação de experimentos históricos no ensino de física: uma abordagem computacional das dimensões histórica e empírica da ciência na sala de aula."*Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 34, n° 4, 4602 (2012), http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/344602.pdf

Jaime Bruck Ripoll
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
<jaime.ripoll@ufrgs.br>

Recebido: 18/05/2023
Publicado: 24/08/2023