PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.11, n.3, 2023
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2023/pmo1124

Determinantes de Hurwitz para verificar quando polinômios possuem somente raízes reais.

Fábio Rodrigues Lucas [1]   Oyran Silva Raizzaro [2]

Resumo

Em se tratando de equações polinomiais, no século XII, o matemático Sridhara determinou a fórmula atual para resolução das equações do segundo grau, conhecidas como Bhaskara. Em 1545 Girolamo Cardano publicou o método para resolução das equações do terceiro e quarto graus, atualmente conhecido como método de Cardano-Tartaglia. Mas foi o matemático francês E. Galois que ao completar o trabalho de Abel mostrou não ser possível uma solução por radicais para equações polinomiais de grau maior que quatro. Baseado no contexto acima é fácil saber se um polinômio de grau menor ou igual a quatro possui somente raízes reais. Dessa forma, utilizando as matrizes de Hurwitz vamos abordar o método que verifica quando um polinômio de grau qualquer possui somente raízes reais e confrontar tal método com as soluções por radicais das equações de grau: dois, três e a equação biquadrática.

Palavras-chave: Polinômios; Equações; Raízes, Matrizes de Hurwitz

Abstract

When it comes to polynomial equations, the mathematician Sridhara in the twelfth century determined the current formula for solving quadratic equations, known as Bhas kara. In 1545 Girolamo Cardano published the method for solving equations of the third and fourth degree currently known as the Cardano-Tartaglia method. But it was the French mathematician E. Galois who, upon completing Abel's work, showed that a solution by radicals for polynomial equations of degree greater than four is not possible. Based on the above context, it is easy to know if a polynomial of degree less than or equal to four has only real roots, in this way, using the Hurwitz Matrices, we will approach the method that verifies when a polynomial of any degree has only real roots and confront this method with the solutions by radicals of the equations of degree: two, three and the biquadratic equation.

Keywords: Polynomials; Equations; Roots, Hurwitz Matrices

1. Introdução

[1]Apoiado pela PROPI-Uems
[2]Apoiado pela PROPI-Uems

Considere o polinômio de grau n com coeficientes reais

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0 \tag{1}$$

e seja g(z) a derivada do polinômio (1), ou seja:

$$g(z) = na_n z^{n-1} + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + \ldots 2za_2 + a_1. \tag{2}$$

Utilizando os polinômios f e g acima definimos as chamadas matrizes de Hurwitz que serão a base para darmos condições necessárias e suficientes para que o polinômio f tenha somente raízes reais. Denotaremos por $H_{2n-1}(g, f)$ a matriz de Hurwitz de ordem $2n-1$ definida da seguinte forma:

$$H_{2n-1}(g,f) = \begin{pmatrix} na_n & (n-1)a_{n-1} & \ldots & a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & na_n & \ldots & 2a_2 & a_1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & \ldots & a_2 & a_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & \ldots & na_n & (n-1)a_{n-1} & \ldots & 2a_2 & a_1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Vale observar, sempre que dados dois polinômios p e q de graus respectivamente n e $n-1$, é sempre possível construir a matriz de Hurwitz $H_{2n-1}(q, p)$ de ordem $2n-1$. Em (3) já construimos a matriz de Hurwitz no caso particular em que o polinômio q é a derivada de f pois iremos utilizar este caso em particular no desenvolvimento deste artigo. A construção da matriz de Hurwtiz é bem simples, vamos dar dois exemplos. No primeiro caso considere o polinômio:

$$p(z) = z^5 - 13z^4 + 49z^3 - 43z^2 - 50z + 56,$$

calculemos sua derivada que denotaremos por q(z), ou seja,

$$q(z) = 5z^4 - 52z^3 + 147z^2 - 86z - 50.$$

Como o polinômio p é de grau 5 e a matriz de Hurwitz tem sempre ordem $2n-1$ onde n é grau do polinômio, nossa matriz de Hurwitz será de ordem 9. Para sua construção, inicie na primeira linha com os coeficientes da derivada completando com zero no final até termos um total de 9 colunas. Na segunda linha coloque os coeficientes do polinômio acrescentando zeros ao final da linha. Na terceira e quarta linha adicione zero nas entradas da primeira coluna da matriz e repita o processo inicial. Na quinta e sexta linha acrescente zeros nas entradas iniciais da primeira e segunda coluna e repita o processo inicial. Vamos repetir esses passos até obtermos uma matriz de ordem 9x9. Tal matriz é a seguinte:

$$H_9(q,p) = \begin{pmatrix} 5 & -52 & 147 & -86 & -50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -13 & 49 & -43 & -50 & 56 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -52 & 147 & -86 & -50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -13 & 49 & -43 & -50 & 56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -52 & 147 & -86 & -50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & 49 & -43 & -50 & 56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -52 & 147 & -86 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -13 & 49 & -43 & -50 & 56 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -52 & 147 & -86 & -50 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Para o segundo caso considere o polinômio $p_1(z)$ e sua sua derivada $q_1(z)$ dados como:

$$p_1(z) = z^4 - 7z^3 + 11z^2 - 7z + 10$$

e

$$q_1(z) = 4z^3 - 21z^2 + 22z - 7.$$

A matriz de Hurwitz $H_7(q_1, p_1)$ é dada por:

$$H_7(q_1, p_1) = \begin{pmatrix} 4 & -21 & 22 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 11 & -7 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -21 & 22 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 11 & -7 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -21 & 22 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -21 & 22 & -7 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Nos dois exemplos acima, dados os polinômios, calculamos suas derivadas e construimos suas respectivas matrizes de Hurwitz. A diferença entre os dois polinômios está no fato de que o polinômio $p(z)$ tem somente zeros reais, e o polinômio $p_1(z)$ possui duas raízes real e duas complexas. Dessa forma, dado um polinômio qualquer e construindo sua respectiva matriz de Hurwitz, como podemos identificar se tal polinômio possui somente raízes reais? A resposta está no Teorema abaixo, que pode ser encontrado no artigo [2] Teorema 4.18, que utiliza somente os determinantes dos menores principais de ordem impares denotados por $\delta_i(p)$, $i = 1 \ldots 2n - 1$ da matriz de Hurwitz.

Teorema 1. *O polinômio* p *de grau* n *possui* $m(\leq n)$ *raízes reais e distintas se, e somente se,*

$$\begin{matrix} \delta_1(p) > 0, \quad \delta_3(p) > 0, \quad \delta_5(p) > 0 \quad \ldots \quad \delta_{2m-1}(p) > 0 \\ \delta_j(p) = 0, \quad j > 2m. \end{matrix} \tag{6}$$

Como estamos querendo verificar quando um polinômio de grau n possui exatamente n raízes reais distintas ou não, o Teorema acima pode ser reformulado da seguinte forma:

Teorema 2. *O polinômio* $p(z)$ *de grau* n *possui* n *raízes reais se, e somente se,*

$$\delta_1(p) \geq 0, \quad \delta_3(p) \geq 0, \quad \delta_5(p) \geq 0 \quad \ldots \quad \delta_{2n-1}(p) \geq 0. \tag{7}$$

Para exemplificar vamos aplicar as desigualdades em (7) para as matrizes de Hurwitz (4) e (5) dos exemplos dados. Já sabemos que a matriz de Hurwitz (4) foi gerada a partir de um polinômio com somente raízes reais. Dessa forma, pelo Teorema 2 precisamos que todos os determinates dos menores principais de ordem impares sejam maiores ou iguais a zero. Temos:

$$\delta_1(p) = 5, \quad \delta_3(p) = \det\begin{pmatrix} 5 & -52 & 147 \\ 1 & -13 & 49 \\ 0 & 5 & -52 \end{pmatrix} = 186, \quad \delta_5(p) = \det\begin{pmatrix} 5 & -52 & 147 & -86 & -50 \\ 1 & -13 & 49 & -43 & -50 \\ 0 & 5 & -52 & 147 & -86 \\ 0 & 1 & -13 & 49 & -43 \\ 0 & 0 & 5 & -52 & 147 \end{pmatrix} = 44604,$$

$$\delta_7(\mathrm{p}) = \det\begin{pmatrix} 5 & -52 & 147 & -86 & -50 & 0 & 0 \\ 1 & -13 & 49 & -43 & -50 & 56 & 0 \\ 0 & 5 & -52 & 147 & -86 & -50 & 0 \\ 0 & 1 & -13 & 49 & -43 & -50 & 56 \\ 0 & 0 & 5 & -52 & 147 & -86 & -50 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & 49 & -43 & -50 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -52 & 147 & -86 \end{pmatrix} = 34020000$$

$$\delta_9(\mathrm{p}) = \det\begin{pmatrix} 5 & -52 & 147 & -86 & -50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -13 & 49 & -43 & -50 & 56 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -52 & 147 & -86 & -50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -13 & 49 & -43 & -50 & 56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -52 & 147 & -86 & -50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & 49 & -43 & -50 & 56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -52 & 147 & -86 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -13 & 49 & -43 & -50 & 56 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -52 & 147 & -86 & -50 \end{pmatrix} = 16796160000.$$

No segundo exemplo dado em (5) a matriz de Hurwitz foi gerada por um polinômio de grau quatro com apenas duas raízes reais. Dessa forma pelo Teorema 2 vamos ter pelo menos um determinante negativo. Temos:

$$\delta_1(\mathrm{p}_1) = 4, \quad \delta_3(\mathrm{p}_1) = \det\begin{pmatrix} 4 & -21 & 22 \\ 1 & -7 & 11 \\ 0 & 4 & -21 \end{pmatrix} = 59 \quad \delta_5(\mathrm{p}_1) = \det\begin{pmatrix} 4 & -21 & 22 & -7 & 0 \\ 1 & -7 & 11 & -7 & 10 \\ 0 & 4 & -21 & 22 & -7 \\ 0 & 1 & -7 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & -21 & 22 \end{pmatrix} = -2228$$

$$\delta_7(\mathrm{p}_1) = \det\begin{pmatrix} 4 & -21 & 22 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 11 & -7 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -21 & 22 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 11 & -7 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -21 & 22 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -21 & 22 & -7 \end{pmatrix} = -608400.$$

Vale ressaltar que no Teorema 2 também consideramos a possibilidade de os δ_i serem nulos. Tal fato ocorre quando o polinômio possui raízes de multiplicidade maior que 1, como, por exemplo:

$$\mathrm{p}_2(z) = (z-1)(z-1)(z+2) = z^3 - 3z + 2.$$

E ao construir sua respectiva matriz de Hurwitz obtemos;

$$\delta_1(\mathrm{p}_2) = 3, \quad \delta_3(\mathrm{p}_2) = 18 \quad \delta_5(\mathrm{p}_2) = 0.$$

2. Equação Polinomial de Grau Dois.

Dado a equação polinomial do segundo grau

$$\mathrm{p}_2(z) = az^2 + bz + c = 0 \quad a > 0, \tag{8}$$

sabemos que (8) possui somente raízes reais se, e somente se,

$$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0. \tag{9}$$

vamos construir a matriz de Hurwitz associada ao polinômio p_2 e relacionar os determinantes dos menores principais de ordem impares com (9). Seja q_2 a derivada de p_2, isto é:

$$q_2(z) = 2az + b,$$

temos:

$$H_3(q_2, p_2) = \begin{pmatrix} 2a & b & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 2a & b \end{pmatrix}.$$

Ao calcular os determinantes dos menores de ordem ímpares obtemos:

$$\delta_1(p_2) = 2a, \qquad \delta_3(p_2) = a(b^2 - 4ac) = a\Delta. \tag{10}$$

Concluímos a equivalência entre o Teorema 2 e o Δ em (9) para que o polinômio (8) tenha somente raízes reais.

3. Equação Polinomial de Grau Três.

Considere a equação polinomial de grau três:

$$p_3(z) = Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0 \qquad A > 0. \tag{11}$$

Antes de construirmos sua respectiva matriz de Hurwitz, vamos eliminar os termos quadrático em (11). Primeiro vamos dividir toda equação por A, obtendo.

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0, \quad \text{onde} \quad a = \frac{B}{A}, \quad b = \frac{C}{A} \quad \text{e} \quad c = \frac{D}{A}. \tag{12}$$

Fazendo a mudança de variável $z = t + h$ temos que:

$$t^3 + (3h + a)t^2 + (3h^2 + 2ah + b)t + h^3 + ah^2 + bh + c = 0 \tag{13}$$

Assim para eliminarmos o termo t^2 temos que ter $h = \frac{-a}{3}$. Dessa forma, ao substituir $z = t - \frac{a}{3}$ em (12) obtemos:

$$t^3 + pt + q = 0 \tag{14}$$

onde,

$$p = b - \frac{a^2}{3} \quad \text{e} \quad q = c + \frac{2a^3 - 9ab}{27}.$$

Ao chegarmos nas raízes da equação cúbica (14) pelo método de Cardano - Tartaglia, veja [3], seu discriminante:

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \tag{15}$$

determina como serão as raízes da equação, ou seja:

Se $\Delta = 0$, a equação terá três raízes reais, sendo pelo menos duas iguais.

Se $\Delta > 0$, a equação terá uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.

Se $\Delta < 0$, a equação terá todas as três raízes reais distintas.

Logo queremos relacionar o Teorema 2 aos casos onde $\Delta \leq 0$ a fim de que (11) tenha somente raízes reais.

Vale ressaltar que estamos interessados em saber se todas as raízes do polinômio (11) são reais. A mudança de variável feita em (13) não altera tal verificação, pois se o polinômio (14) possui uma raiz t_0, a raiz do polinômio inicial (11) será $t_0 + \frac{a}{3}$. Dessa forma vamos construir a matriz de Hurwitz utilizando o polinômio $p_3(t) = t^3 + pt + q$ e sua derivada $q_3(t) = 3t^2 + p$. Seja

$$H_5(q_3, p_3) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & p & 0 & 0 \\ 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{pmatrix}. \tag{16}$$

O determinante dos menores principais de ordem ímpares são:

$$\delta_1(p_3) = 3 \qquad \delta_3(p) = \det\begin{pmatrix} 3 & 0 & p \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -6p, \tag{17}$$

e

$$\delta_5(p_3) = \det\begin{pmatrix} 3 & 0 & p & 0 & 0 \\ 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{pmatrix} = -4p^3 - 27q^2 = -4x27\left(\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}\right) = -108\Delta \tag{18}$$

Pelo Teorema 2, se δ_1, δ_3 e δ_5 são maiores ou iguais a zero, segue que de (17) e (18), $p \leq 0$ e $\Delta \leq 0$ o que implica pela fórmula de Cardano-Tartaglia que todas as raízes do polinômio (14) são reais. Por outro lado, supondo que todas as raízes de (14) sejam reais pela fórmula de Cardano-Tartaglia o Δ em (15) é menor ou igual a zero, implicando $\delta_5(p_3) \geq 0$ visto que $\delta_5(p_3) = -108\Delta$.

Além disso $\Delta = \left(\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}\right) \leq 0$ isto é, $p^3 \leq \frac{-27}{4}q^2$ mostrando que tal desigualdade ocorre somente quando $p \leq 0$, concluindo que $\delta_3(p_3) = -6p$ é maior ou igual a zero. Portanto, temos que $\delta_1(p_3)$, $\delta_3(p_3)$ e $\delta_5(p_3)$ são maiores ou iguais a zero, e, Teorema 2, todas as raízes do polinômio (14) são reais.

4. Equação Polinomial de Grau Quatro.

Nesta seção vamos considerar as equações biquadráticas ou seja, equações do quarto grau que quando reduzidas ficam na forma:

$$pz^4 + qz^2 + r = 0, \quad \text{onde} \quad p > 0. \tag{19}$$

Tal equação reduz-se a uma equação do segundo grau fazendo a mudança de variável $z^2 = x$, de modo que

$$px^2 + qx + c = 0, \quad \text{com} \quad p > 0. \tag{20}$$

Os valores de x que satisfazem (20) são:

$$x = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4pr}}{2p}. \tag{21}$$

Logo as raízes de (19) são:

$$z = \pm\sqrt{\frac{-q + \sqrt{q^2 - 4pr}}{2p}} \quad \text{e} \quad z = \pm\sqrt{\frac{-q - \sqrt{q^2 - 4pr}}{2p}}. \tag{22}$$

Vamos construir a matriz de Hurwitz para o polinômio em (19) e mostrar a equivalência entre o Teorema 2 e as raízes obtidas em (22). Sejam $p_4(z) = pz^4 + qz^2 + r$ e sua derivada $q_4(z) = 4pz^3 + 2qz$, temos que:

$$H_7(q_4, p_4) = \begin{pmatrix} 4p & 0 & 2q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & q & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 4p & 0 & 2q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & q & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 4p & 0 & 2q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & q & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 4p & 0 & 2q & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Calculando todos os determinantes dos menores principais de ordem ímpares, obtemos:

$$\delta_1(p_4) = 4p, \quad \delta_3(p_4) = \det\begin{pmatrix} 4p & 0 & 2q \\ p & 0 & q \\ 0 & 4p & 0 \end{pmatrix} = -8p^2q, \tag{24}$$

$$\delta_5(p_4) = \det\begin{pmatrix} 4p & 0 & 2q & 0 & 0 \\ p & 0 & q & 0 & r \\ 0 & 4p & 0 & 2q & 0 \\ 0 & p & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 4p & 0 & 2q \end{pmatrix} = -8p^2q(q^2 - 4pr), \tag{25}$$

$$\delta_7(p_4) = \det(H_7(q_4, p_4)) = 16(p^2q^4r - 8p^3q^2r^2 + 16p^4r^3) = 16p^2r(q^2 - 4pr)^2. \tag{26}$$

Considerando inicialmente que as raízes em (22) são todas reais, precisamos que os termos dentro das raízes quadradas sejam todos maiores ou iguais a zero, desconsiderando o sinal de p, pois por hipótese consideramos o polinômio p_4 em (19) com o coeficiente de maior grau $p > 0$. Assim:

$$-q + \sqrt{q^2 - 4pr} \geq 0, \tag{27}$$

$$-q - \sqrt{q^2 - 4pr} \geq 0 \tag{28}$$

e

$$q^2 - 4pr \geq 0. \tag{29}$$

Por hipótese como $p > 0$ já temos que $\delta_1(p_4) \geq 0$. Somando (27) e (28) membro a membro concluímos diretamente que $q \leq 0$, ou seja, $\delta_5(p_4) \geq 0$. Falta mostrar que $\delta_7(p_4) \geq 0$, isto é, $r \geq 0$.

Multiplicando (27) e (28) membro a membro temos:

$$\left(-q + \sqrt{q^2 - 4pr}\right)\left(-q - \sqrt{q^2 - 4pr}\right) = (-q)^2 + \left(\sqrt{q^2 - 4pr}\right)^2 = 4pr \geq 0.$$

Como p é positivo implica que $r \geq 0$, mostrando que $\delta_7(p_4) \geq 0$. Concluimos, assim, que todas as desigualdades no Teorema 2 são maiores ou iguais a zero, quando o polinômio possui somente raízes reais. Vamos considerar agora que todas as desigualdades no Teorema 2 são satisfeitas ou seja, (24), (25) e (26) são maiores ou iguais a zero. Claramente temos que:

$$q \leq 0, \quad q^2 - 4pr \geq 0 \quad \text{e} \quad r \geq 0,$$

podendo concluir que

$$-q + \sqrt{q^2 - 4pr} \geq 0. \tag{30}$$

Como $r \geq 0$ e $p > 0$, segue que $q^2 \geq q^2 - 4pr$, implicando $|q| \geq \sqrt{q^2 - 4pr}$, ou seja:

$$q \geq \sqrt{q^2 - 4pr} \quad \text{ou} \quad q \leq -\sqrt{q^2 - 4pr}. \tag{31}$$

A primeira desigualdade em (31) não é válida visto que $q \leq 0$, concluindo pela segunda desigualdade que:

$$-q - \sqrt{q^2 - 4pr} \geq 0. \tag{32}$$

Por (30), (32) e o fato que $q^2 - 4pr \geq 0$ segue de (22) que todas as raízes do polinômio $p_4(z)$ dado em (19) são reais.

Como podemos concluir, o Teorema 2 pode ser apresentado aos estudantes do ensino médio de forma simples, com a finalidade de verificar quando um polinômio de grau n possui somente raízes reais. Além disso é possível sugerir aos estudantes fixar valores para os coeficientes de um polinômio qualquer, deixando apenas um dos coeficientes como variável, e, a partir das desigualdades do Teorema 2, encontrar os possíveis intervalos que garantam que todas suas raízes sejam reais. Por exemplo:

Dado o polinômio $t(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 4x^2 + ax + 1$, para quais valores de a, $t(x)$ possui somente raízes reais? Basta encontrar o intervalo que satisfaça todas as desigualdades do Teorema 2.

Referências

[1] Lima, E. L. "A Equação do Terceiro Grau", *Revista Matemática Universitária*, nº 5, pp 9-23, 1987.

[2] Olga. H. and M. Tyaglov, "Structured matrices, continued fractions, and root localization of polynomials", *SIAM Review*, 54, n° 3, pp. 421 -509, 2012.

[3] Iezzi, G. *Fundamentos de Matemática Elementar: Complexos, Polinômios, Equações*. Vol. 6. 2ª ed. São Paulo: Atual, 1977.

Fábio Rodrigues Lucas
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul - Uems
<fabiorodrigues@uems.br>

Oyran Silva Raizzaro
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul - Uems
<oyran@uems.br>

Recebido: 08/11/2022
Publicado: 13/09/2023