PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.11, n.3, 2023
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2023/pmo1125

Raiz quadrada: complexa ou real?

José Carlos Magossi

Resumo

A matemática é uma linguagem apropriada para resolver problemas e criar modelos, sejam eles representativos do mundo em que vivemos, sejam eles abstratos. Para que esses modelos possam ser lidos de modo único, faz-se necessário precisão nas definições e nomenclatura. Tendo isso em vista, levanta-se um questionamento acerca do símbolo utilizado para raiz quadrada e de sua extensão complementar, qual seja, raiz quadrada para números complexos. O objetivo didático, neste texto, é abrir espaço para a reflexão sobre a possibilidade da utilização de um único símbolo para representar raiz quadrada em $\mathbb{R}$ e para raiz quadrada em $\mathbb{C}$, com vistas a evitar propensas contradições.

Palavras-chave: Raiz quadrada, números reais, números complexos, raiz de números complexos.

Abstract

Mathematics is an appropriate language for solving problems and creating models, whether they are models to the real world or abstracts models. With the aim that these models can be read uniquely, precision in definitions and nomenclature is required. With this in mind, a question arises about the symbol used for the square root, and of its complementary extension, that is, square root for complex numbers. The didactic objective in this text is to open spaces for reflection over the possibility of using a single symbol to represent square root in $\mathbb{R}$ and square root in $\mathbb{C}$, in order to avoid prone contradictions.

Keywords: Square root, real number, complex numbers, complex square root.

1. Introdução

É muito comum, diante da pergunta sobre qual é o valor de $\sqrt{4}$, que a resposta seja ± 2. Essa resposta pode estar correta ou não, dependendo de qual sistema de números esteja sendo utilizado. Se o sistema for o dos números reais, então a resposta está errada, pois em $\mathbb{R}$, $\sqrt{4} = 2$. Se o sistema for o dos números complexos, então a resposta está correta, isto é, em $\mathbb{C}$, $\sqrt{4} = \pm 2$. Além disso, vem à tona também, por conta da pergunta sobre qual é o valor de $\sqrt{4}$, a resolução em $\mathbb{R}$, da equação do segundo grau $x^2 - 4 = 0$, que, em razão da fórmula de Bhaskara, tem como resultado duas raízes, quais sejam, $+2$ e -2. Ou seja, a solução de $x^2 - 4 = 0$ é $x = \pm\sqrt{4}$, que é $x = \pm 2$. Nesse caso, o sinal $\pm$ é herança da fórmula de Bhaskara e não do valor da raiz quadrada.

Os símbolos associados à raiz quadrada, cúbica etc., alteraram-se ao longo dos anos. O historiador Florian Cajori indica que o símbolo $\sqrt{}$ de raiz quadrada surgiu na Alemanha, mas outros símbolos datam de épocas anteriores [2]. Por exemplo, segundo [2], à página 366, o símbolo (.) foi utilizado, em 1480, para representar raiz quadrada. Por sua vez, dois símbolos (..) representavam a raiz quadrada da raiz quadrada, (...) representavam a raíz cúbica etc. Conforme observado ainda em [2], esse sistema não foi uma boa escolha, haja vista que três pontos poderiam sim representar a raiz quadrada da raiz quadrada da raiz quadrada, isto é, raiz oitava. A lista de símbolos para raiz quadrada é longa e há indicações de ocorrência deles inclusive no Egito antigo, e seria necessário um trabalho minucioso para representar os diferentes símbolos tais como foram exibidos em suas respectivas épocas. Não é objetivo neste artigo indicar um novo símbolo para raiz quadrada, nem analisar a trajetória de suas alterações simbólicas ao longo da história da matemática, mas sim, abrir espaço para reflexões sobre como evitar propensas contradições matemáticas associadas ao conceito de raiz quadrada em $\mathbb{R}$, e em $\mathbb{C}$, ao lidar com símbolos distintos de raiz. Com inspirações no contexto histórico, talvez seja o caso, com um pouco de preciosismo, diga-se excesso, de utilizar o símbolo $\sqrt{x}$ para raiz quadrada de um número real x, e $\overline{\sqrt{x}}$ para raiz quadrada de número complexo[1], o "completamento" de uma raiz em $\mathbb{R}$. O objetivo, com essa sutil caracterização do símbolo de "raiz quadrada", é evitar a ocorrência de algumas conhecidas contradições, além de fortalecer o conceito de raiz quadrada no sentido geral, para $\mathbb{R}$ e para $\mathbb{C}$. Por exemplo, nos números complexos, $\overline{\sqrt{-1}} = \pm i$ (a ser calculado na seção 3), haja vista que $i^2 = -1$ e $(-i)^2 = -1$. Por outro lado, não existe $\sqrt{-1}$ no conjunto dos números reais. Ou seja (ver [1]):

$$\underbrace{1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)}}_{\text{em } \mathbb{R}} \neq \underbrace{\overline{\sqrt{-1}}\;\overline{\sqrt{-1}} = \left(\overline{\sqrt{-1}}\right)^2 = (\pm i)^2 = -1}_{\text{em } \mathbb{C}}.$$

Em $\mathbb{R}$, não faz sentido a multiplicação $\sqrt{-1}\sqrt{-1}$, uma vez que $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ se e somente se $a, b \geq 0$. Por conseguinte, em $\mathbb{C}$, tem-se que $\overline{\sqrt{-1}}\;\overline{\sqrt{-1}} = -1$, e em $\mathbb{R}$, $\sqrt{(-1)\cdot(-1)} = 1$. Note-se que

$$\underbrace{\overline{\sqrt{-1}}\;\overline{\sqrt{-1}}}_{\mathbb{C}} \neq \underbrace{\sqrt{(-1)\cdot(-1)}}_{\mathbb{R}}.$$

2. Raiz quadrada em $\mathbb{R}$.

No sistema de números reais a definição de raiz quadrada é dada como:

$$\sqrt{x} = a \quad \Leftrightarrow \quad (x = a^2) \text{ e } (a \geq 0). \tag{1}$$

Nesse caso, como exemplo, tem-se que $\sqrt{4} = a$ se e somente se $4 = a^2$. Isto é, com base na fórmula de Bhaskara, essa equação tem duas raízes reais[2], $a = \pm 2$. Como, pela definição de raiz quadrada em $\mathbb{R}$, deve-se ter que $a \geq 0$, tem-se então que $\sqrt{4} = 2$.

3. Raiz n–ésima em $\mathbb{C}$.

Um número complexo não nulo $z = a + bi$ pode ser escrito, num modo conhecido por forma polar, como:

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta),$$

[1]Neste texto, utiliza-se a cor vermelha para raiz de números complexos, mas o objetivo, neste caso, é simplesmente o de fortalecer, e destacar, a diferença entre os símbolos de raiz para $\mathbb{R}$ e para $\mathbb{C}$.

[2]Nota-se, nesse caso, que +2 e −2 se referem apenas às duas raízes da equação $a^2 - 4 = 0$.

em que $a = r\cos\theta$ e $b = r \operatorname{sen}\theta$ são números reais (figura 1). Note-se também que $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ é a conhecida fórmula de Euler ([4], pp.58-59). Além disso, se $z \neq 0$ e $z = a + bi$, tem-se que $\theta = \operatorname{tg}\frac{b}{a}$, e o valor de r é seu comprimento, denotado por $r = |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

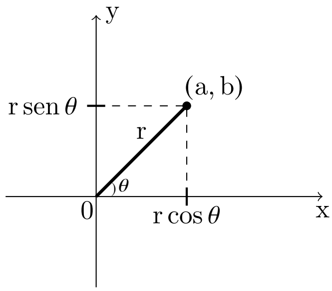

Figura 1: O ponto (a, b) equivale a $(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$

Assim, por exemplo, para $z = 1 + i$, o ângulo θ vale $\frac{\pi}{4}$ radianos, $r = \sqrt{2}$, e

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}.$$

Por outro lado, conforme figura 2, para $z = 1 - i$, o conjugado[3] de z, tem-se que $\theta = \frac{-\pi}{4}$, e ainda $r = \sqrt{2}$. Logo,

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos\frac{-\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{-\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}i}.$$

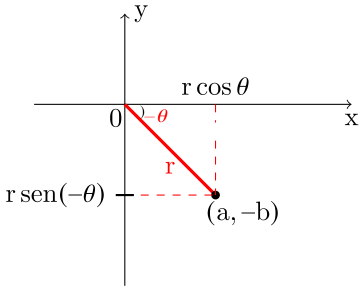

Figura 2: O ponto $(a, -b)$ equivale a $(r\cos\theta, r\operatorname{sen}(-\theta))$

Tendo em conta a forma polar de z, a raiz n–ésima de z é dada, seguindo a notação diferenciada para raiz de números complexos exposta neste artigo, por:

$$\overline{\sqrt[n]{z}} = \overline{\sqrt[n]{re^{i\theta}}} = \left(re^{i\theta}\right)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{\theta}{n}i} = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{\theta}{n}i} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{n}\right).$$

Com os olhares nas figuras 1 e 2, é possível certificar-se de um fato bem comum no trato com funções trigonométricas (nesse caso $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$), qual seja, o de que o ponto (a, b) é o mesmo,

[3] Se $z = a + bi$ é um número complexo, o conjugado de z é $\bar{z} = a - bi$ (Ver [3]).

tanto para o ângulo θ quanto para $\theta + 2k\pi$, em que $k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, com o ângulo θ sendo medido em radianos[4]. Segue-se, então, para $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$, que

$$\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\, e^{(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})i} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right). \tag{2}$$

Em síntese, raiz n–ésima de z, em $\mathbb{C}$, terá sempre n valores como solução, um valor para cada valor de k, isto é, as raízes n–ésimas de z, em símbolos $\sqrt[n]{z} = z_k$, são $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$. Por exemplo, as raízes quadradas de 1, isto é, $\sqrt[2]{1}$, são: $z_0 = 1$, $z_1 = -1$. As raízes quadradas de -1, isto é, $\sqrt[2]{-1}$, são: $z_0 = i$, $z_1 = -i$.[5] As raízes cúbicas de 1, isto é, $\sqrt[3]{1}$, são: $z_0 = 1$, $z_1 = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$ e $z_2 = (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$. As raízes quartas de 1, isto é, $\sqrt[4]{1}$, são: $z_0 = 1, z_1 = i, z_2 = -1$ e $z_3 = -i$ (ver [3]).

Raiz quadrada em $\mathbb{C}$. Considere-se um caso particular da raiz n–ésima de z, a raiz quadrada de 4 quando $n = 2$. Nesse caso, conforme pode ser observado na figura 3, o valor de θ é zero e o módulo de $z = 4 + 0.i$ é $r = |z| = 4$. Os valores de k, conforme a fórmula 2, são: $k = 0$ e $k = 1$.

$$\sqrt[2]{4} = \sqrt[2]{4}\, e^{(\frac{\theta}{2} + \frac{2k\pi}{2})i}.$$

Para $k = 0$, tem-se que:

$$\sqrt[2]{4} = \sqrt[2]{4}\, e^{(\frac{0}{2}i)} = 2(\cos 0 + i\,\mathrm{sen}\,0) = 2.$$

Para $k = 1$, tem-se que:

$$\sqrt[2]{4} = \sqrt[2]{4}\, e^{(\frac{0}{2} + \frac{2\pi}{2})i} = 2(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi) = -2.$$

Portanto, $\sqrt[2]{4} = \pm 2$.

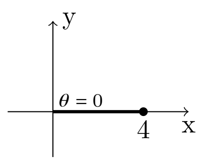

Figura 3: O número complexo $4 + 0i$

Raiz n–**ésima de** $z = a + 0i$. Considere-se, ainda, outro caso particular: as raízes n–ésimas dos números complexos do tipo $z = a + 0i$, em que $a \neq 0$. Note-se que, neste caso, $z = a$ é um número real.

[4]Segue-se, para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, que $e^{(\theta + 2k\pi)i} = \cos(\theta + 2k\pi) + i\,\mathrm{sen}(\theta + 2k\pi) = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta = e^{i\theta}$.

[5]Nesse caso, utiliza-se $\theta = \pi$, $n = 2$ e $k = 0, 1$ na fórmula 2. Além disso, deve-se notar que, em $\mathbb{R}$, indica-se que $\sqrt{-1} = i$.

- Para $\theta = 0$, caso em que $a > 0$, e $r = |a| = a$, tem-se, conforme a fórmula 2, que:

$$\overline{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a}\, e^{(\frac{2k\pi}{n})i} = \sqrt[n]{a}\left(\cos(\frac{2k\pi}{n}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{2k\pi}{n})\right). \tag{3}$$

- Para $\theta = \pi$, caso em que $a < 0$, e $r = |a| = a$, tem-se, conforme a fórmula 2, que:

$$\overline{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a}\, e^{(\frac{\pi}{n}+\frac{2k\pi}{n})i} = \sqrt[n]{a}\left(\cos(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n})\right). \tag{4}$$

Isso significa que $\overline{\sqrt[n]{a}}$ terá sempre n soluções, uma para cada valor de $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$.

Como um outro caso particular, considera-se um número real $a \in \mathbb{R}$ estritamente positivo e $n = 2$. Tendo em conta a fórmula 3, haja vista que se considera que $a > 0$ e $n = 2$, tem-se que $k = 0$ e $k = 1$. Assim,

- $k = 0$

$$\overline{\sqrt[2]{a}} = \sqrt[2]{a}\left(\cos(\frac{0}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{0}{2})\right) = \sqrt[2]{a}.$$

- $k = 1$

$$\overline{\sqrt[2]{a}} = \sqrt[2]{a}\left(\cos(\frac{2\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{2})\right) = \sqrt[2]{a}(-1) = -\sqrt[2]{a}.$$

Conclui-se que $\overline{\sqrt[2]{a}} = \pm\sqrt{a}$. Se $a = 1$, tem-se que a raiz quadrada complexa de 1 é dada por $\overline{\sqrt{1}} = \pm\sqrt{1}$. Como em $\mathbb{R}$ se tem que $\sqrt{1} = 1$, então se segue que $\overline{\sqrt{1}} = \pm 1$. Nesse caso, convém reforçar a diferença entre a raiz quadrada complexa e a raiz quadrada real:

$$\overline{\sqrt{1}} = \pm 1 = \pm\sqrt{1}.$$

Segue-se também que, se $a = 4$, a raiz quadrada complexa de 4 é dada por $\overline{\sqrt{4}} = \pm 2$ e daí,

$$\overline{\sqrt{4}} = \pm 2 = \pm\sqrt{4}.$$

4. Exemplos

Nesta seção, expõem-se alguns exemplos com fins de esclarecimento das diferenças entre raiz complexa e real e, por conseguinte, para indicar possíveis alterações na fórmula de Bhaskara, por exemplo.

Resolução de equações em $\mathbb{R}$. Por mais que possam parecer simples, as discussões acerca de raízes em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$ podem gerar alguma confusão quando no trato com equações em que a raiz quadrada esteja envolvida.

Ao resolver em $\mathbb{R}$ a equação $\sqrt{x-1} = x-7$, tem-se a seguinte solução, levando-se em conta a definição 1 de raiz quadrada em $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x-1} = x-7 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1) = (x-7)^2 \text{ e } (x-7) \geq 0.$$

Note-se que $x-1 = (x-7)^2$ implica $x-1 = x^2-14x+49$, que tem como resultado os valores $x = 10$ e $x = 5$. No entanto, como por hipótese da definição 1, $x \geq 7$, a resposta é então $x = 10$. Note-se que em $\mathbb{R}$ o valor $x = 5$ não pode ser visto como resposta. No entanto, em $\mathbb{C}$, $\overline{\sqrt{x-1}} = x-7$, para $x = 5$, tem-se que $\overline{\sqrt{5-1}} = 5-7$, o que conduz a $\overline{\sqrt{4}} = -2$, o que é verdade.

Resolução de equações em $\mathbb{C}$. Nem sempre é necessário, às vezes pode não ser possível, utilizar a fórmula 2 para determinar a raiz quadrada de um número complexo. Seja, como exemplo, a situação em que se quer resolver a equação $z^2-4 = 0$. Supõe-se que, para resolvê-la, faz-se a migração para o sistema de números reais, ou seja, reescreve-se a equação tendo em conta que $z = a+bi$, com a e b sendo números reais.

$$\begin{aligned} z^2 &= 4, \\ (a+bi)^2 &= 4, \\ a^2+2abi+(bi)^2 &= 4, \\ (a^2-b^2)+2abi &= 4, \end{aligned}$$

desde que $(bi)^2 = b^2i^2 = b^2(-1) = -b^2$. Como $4 = 4+0.i$, então, de $(a^2-b^2)+2abi = 4$, se tem que $(a^2-b^2)+2abi = 4+0.i$. Segue-se então que

$$\begin{cases} a^2-b^2 &= 4 \\ 2ab &= 0 \end{cases}.$$

Note-se que, nesse sistema de equações, apenas números reais estão envolvidos, haja vista que a e b são números reais. Assim, $2ab = 0$ se e somente se $a = 0$ ou $b = 0$. Se $a = 0$, tem-se que $-b^2 = 4$, impossível de se resolver em $\mathbb{R}$. Por outro lado, se $b = 0$, tem-se que $a^2 = 4$, isto é $a = \pm 2$.

Portanto, a solução de $z^2 = 4$, no conjunto dos números complexos, é $z = 2+0i$ e $z = -2+0.i$. Note-se que $z^2 = 4$ nada mais é do que extrair a raiz quadrada, em $\mathbb{C}$, de 4, ou seja,

$$z^2-4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad z = \overline{\sqrt[2]{4}} \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm 2.$$

Fórmula de Bhaskara. Para aplicar a fórmula $x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$, conhecida como fórmula de Bhaskara, para determinar as raízes de uma equação do segundo grau, $ax^2+bx+c = 0$, em que $a \neq 0$, considera-se que o domínio é o conjunto $\mathbb{R}$, tendo-se em conta que $\Delta = b^2-4ac$. No entanto, nas situações em que $\Delta < 0$, é possível aplicar as fórmulas 3 e 4 e obter duas raízes complexas. Como apenas números reais estão envolvidos, a fórmula de Baskhara poderia então ser escrita, ao considerar que $\sqrt{-1} = i$ como:

$$x = \frac{-b+\overline{\sqrt{\Delta}}}{2a}.$$

Isso se deve ao fato, por exemplo, de que $\overline{\sqrt{4}} = \pm 2$, $\overline{\sqrt{-4}} = \pm 2i$ etc.

Nesse caso, com o símbolo para raiz de x em $\mathbb{C}$, indicado neste texto por $\overline{\sqrt{x}}$, o sinal $\pm$ da fórmula tradicional de Bhaskara não se faz necessário, haja vista que a raiz em $\mathbb{C}$ terá dois valores com resposta.

Convém reafirmar a diferença. Com a notação tradicional para raiz quadrada, a solução em $\mathbb{R}$ da equação do segundo grau $x^2 - 4 = 0$ tem como resposta $x = \pm\sqrt{4}$, isto é $x = \pm 2$. Nesse caso, percebe-se que $\sqrt{4}$ se aplica a $\mathbb{R}$ e, por isso, seu resultado é apenas +2, e o sinal $\pm$ vem da fórmula de Bhaskara em $\mathbb{R}$. Por outro lado, a solução em $\mathbb{C}$ de $x^2 - 4 = 0$ seria simplesmente $x = \overline{\sqrt{4}}$, que por sua vez é ± 2. Neste caso, o sinal $\pm$ vem da raiz quadrada em $\mathbb{C}$ e não da fórmula de Bhaskara.

Referências

[1] Lima, E. L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias.* Coleção Fundamentos da matemática elementar. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1987.

[2] Cajori, F. *A History of Mathematical Notations.* Two Volumes Bound as One. I. Notations in Elementary Mathematics. II. Notations Mainly in Higher Mathematics. Dover Publications, New York, 1993. (First published in two volumes by The Open Court Publishing Company. La Salle, Illinois: Open Court, 1928–29).

[3] Churchill, R. V. *Variáveis Complexas e suas Aplicações.* McGraw-Hill, São Paulo, 1975.

[4] Hairer, E., Wanner, G.. *Analysis by Its History.* New York, Springer-Verlag, 1996.

José Carlos Magossi
Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Tecnologia - FT
<magossi@unicamp.br>

Recebido: 12/05/2023
Publicado: 25/09/2023