PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.11, n.3, 2023
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2023/pmo1126

Um resgate histórico-didático do trabalho original sobre a *Versiera* de Agnesi (a bruxa de Agnesi) para ser usado em sala de aula: entendendo a Matemática para discutir a questão de gênero na Ciência

Daniel C. de Morais Filho[1] Leticia Dornellas Dias[2] Luis Filipe R. C. da Silva[3]
Bruna Alves da Silva Santos[4]

Resumo

Neste artigo apresentamos a *Versiera*, a famosa Curva da Bruxa, da matemática italiana Agnesi (1718-1799), de maneira que possa ser usado por alunos do Ensino Básico para estimulá-los a conhecer e discutir a questão histórica de gênero na Matemática e incentivar o debate sobre a inserção das mulheres no mundo científico. Optamos por tratar o tema de modo diferente, não focando nos aspectos biográficos de Agnesi, mas na Matemática de sua época, apresentando uma versão em língua portuguesa do trabalho original em italiano, onde a curva apareceu no seu livro *Instituzioni Analitiche ad uso de la Gioventú*. Comparamos também a versão original com a moderna, dada hoje dia, oportunizando os leitores a conhecer e comparar como era a Matemática no tempo de Agnesi com a linguagem e a Matemática de nossos dias.

Palavras-chave: história da matemática; curva de Agnesi; mulheres na matemática.

Abstract

In this article we present the *Versiera*, the famous Witch´s Curve due to the Italian mathematician Agnesi (1718-1799), so that it can be used by Basic Education students to encourage them to know and discuss the historical questions of gender in Mathematics and encourage the debate on the insertion of women in the scientific world. We chose to treat the theme differently, not focusing on the biographical aspects of Agnesi, but on the Mathematics of her time, presenting a Portuguese version of the original work in Italian, where the curve appeared in her book *Instituzioni Analitiche ad uso de la Gioventú*. We also compare the original version with the modern one known today, giving readers the opportunity to compare what Mathematics was like in Agnesi's time with the current approach.

Keywords: history of mathematics; Agnesi's curve; women in mathematics.

[1]Tutor egresso do PET-Matemática UFCG (Programa de Educação Tutorial), ao qual agradecemos o financiamento parcial, quando do começo da feitura desse artigo.
[2]Bolsista egressa do PET-Matemática UFCG.
[3]Bolsista egresso do PET-Matemática UFCG.
[4]Bolsista egressa do PET-Matemática UFCG.

1. Introdução

No mundo educacional da atualidade, uma pauta extremamente importante, estudada e observada pelas mídias e pelo mundo acadêmico, é o papel das mulheres nas atividades sociopolíticas, e, principalmente, nas ciências. Em nossos dias, o interesse da inclusão feminina nas ciências traz à tona questionamentos históricos na busca de compreender a produção científica das mulheres ao longo dos séculos, em particular na Matemática, onde teoremas, leis e resultados mais conhecidos possuem tradicionalmente apenas nomes masculinos.

Essa inquietação bifurca-se em duas vertentes: a primeira tenta resgatar uma dívida histórica e inadiável de inclusão feminina no mundo científico, cuja maior constatação pode ser a criação das várias associações atuais que acompanham e incentivam essa inclusão, como o Commitee for Women in Mathematics da International Mathematical Union (CWM), a Association for Women in Mathematics (AW in M. 2023), a European Women in Mathematics (EW in M, 2023), além de alguns comitês de observação, como esse no Brasil: (GÊNERO SBM-SBMAC, 2023) e esse, da London Mathematical Society: (LMS, 2023), dentre outros pelo mundo a fora.

A segunda vertente foca-se em estudar e compreender a produção matemática das mulheres ao longo da História, investigar e entender aspectos históricos, sociais, políticos e acadêmicos envolvendo a questão histórica de gênero e, com isso, poder incentivar as novas gerações da população feminina para estudar Matemática. Nesse sentido, objetiva-se principalmente estimular toda sociedade a discutir e elaborar ações acadêmicas, administrativas e comportamentais inclusivistas sobre o assunto.

Sabe-se que a produção matemática feminina de maior impacto se inicia tardiamente (e sabemos as razões!), por volta da segunda metade do século XIX, quando várias áreas da Matemática já estavam adiantadas em seu processo de criação. Dessa forma, na atualidade, toma-se contato com essa produção, identificada por ideias e resultados batizados com nomes femininos, e se começa a entender a parte Matemática dessa produção, só em disciplinas bem avançadas de cursos de Graduação ou em disciplinas de Pós-Graduação. Como representatividade dessa matemática mais avançada da produção feminina, pouco conhecida popularmente, mas já batizada com nomes de mulheres, citamos, como clássicos exemplos:


Figura 1: Sophie Germain (https://pt.wikipedia.org/wiki/Sophie_Germain#/media/Ficheiro:Germain.jpeg)

a) *Números primos de Sophie Germain*, da parisiense Marie Sophie Germain (1776-1831), cuja principal importância foi, de fato, a demonstração que fez do Último Teorema de Fermat para o caso particular em que o expoente é o que hoje se conhece como *número primo de Sophie Germain* (RIBEMBOIM, P. 1979). Esses são números primos p tais que 2p+1 é também primo. Exemplo, 3,5,89 etc. De compreensão rápida é a chamada Identidade de Sophie Germain, usada em exercícios por estudantes do Ensino Básico:

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2)$$

b) *Teorema de Cauchy-Kovalevskaya* (EVANS, 2010) sobre existência de soluções para equações diferenciais, demonstrado pela russa Sofia Kovalevskaya (ou Sonia Kovalevsky) (1850-1891), a primeira mulher a obter um doutorado acadêmico em Matemática (SVK, MACTUTOR, 2023; DE MORAIS FILHO, D. C. 2, 1997)


Figura 2: Sofia Kovalevskaya (https://pt.wikipedia.org/wiki/Sofia_Kovalevskaya#/media/Ficheiro:Sofja_Wassiljewna_Kowalewskaja_1.jpg)


Figura 3: Emmy Noether (https://pt.wikipedia.org/wiki/Emmy_Noether#/media/Ficheiro: Noether.jpg)

c) *Anéis noetherianos*, estudados em Álgebra Comutativa (ATIYAH e MACDONALD, 1969; D.M. BURTON 1970) e o *Teorema de Noether*, que aparece na Física e é importante na Teoria da Relatividade (LEMOS, 2007). Teorias e resultados criados pela alemã Emmy Noether (1882–1935), que foi, realmente, a fundadora de uma prolífica escola da Álgebra. (EMMY1, 2023; EMMY2, 2023; EMMY3, 2018).

Dessa maneira, seguindo a segunda vertente citada anteriormente, compreender a produção matemática feminina ao longo da História traz um empecilho para ser apresentado e difundido no Ensino Básico. Que matemática produzida por mulheres poderia ser inteligível a ponto de ser apresentada em nível de conhecimento do Ensino Básico, e, portanto, factível de ser mais bem popularizada?

Em uma época em que não havia ainda muito interesse pelo assunto e de poucas informações disponíveis sobre o tema em língua portuguesa, a começar pelos livros de Malba Tahan, onde, em sua adolescência, o primeiro autor deste artigo teve conhecimento do nome de uma mulher na Matemática, passando ao que se parecem ser os primeiros artigos publicados no Brasil abordando o tema (DE MORAIS FILHO, D.C. 1, 1996; DE MORAIS FILHO, D.C. 2, 1997), os textos resumem-se especificamente apenas em descrever episódios biográficos de mulheres matemáticas.

Constatamos – e não é uma crítica! – que a maioria dos textos sobre a produção matemática feminina, que muito abundam a Internet, encontros educacionais e artigos, em sua maioria também não conseguem reproduzir de modo inteligível aos leitores do Ensino Básico os trabalhos originais que essas mulheres matemáticas produziram. Sabemos da dificuldade em trazer para esse público a matemática da época, que ilustra historicamente a linguagem e o tipo de apresentação de quando foram produzidos.

Com essa preocupação, trataremos neste artigo sobre uma curva no plano, conhecida como Curva da Bruxa, Bruxa de Agnesi ou *Versiera*, estudada pela matemática italiana Maria Gaetana Agnesi (1718-1799). A Curva da Bruxa parece ter caído no gosto popular, a ponto do Google, em 2014, lhe ter devotado um doodle (DOODLE, 2014). Pela curva ter esse nome chamativo e ser necessária apenas matemática básica para compreendê-la, há uma enorme quantidade de material disponível sobre ela e sua construção, bem como sobre a admirável biografia de Agnesi. Geralmente esse material traz apenas apresentações com um tratamento moderno da curva, sem, efetivamente, expor e explicar os textos originais, e não compara apresentações originais com as atuais. Faremos isso neste artigo, mais ainda, apresentaremos uma tradução em língua portuguesa, até onde nos consta, inédita, do texto original de como Agnesi apresentou a curva, e a compararemos com as exposições modernas usuais. Focamos nosso trabalho de tal maneira, que esse artigo possa ser inteligível a alunos do Ensino Básico, dando aos estudantes, com esse nível de escolaridade, a oportunidade de compreender e comparar a História da Matemática da época de Agnesi com a visão moderna da curva e seus corriqueiros tratamentos.

Esperamos, por meio do uso de História da Matemática, estimular a compreensão e o debate sobre a questão histórica de gênero na Matemática e situar os alunos com o que Maria Gaetana produziu e vivenciou, de modo a poderem compreender como a matemática era feita naquele tempo. Pretendemos também traçar paralelos entre a linguagem matemática antiga com a atual, sem que percamos de vista as duas vertentes citadas no começo do artigo sobre o estudo da produção matemática feminina.

2. A criadora da "Curva da Bruxa"


Figura 4: Maria Agnesi (https://pt.wikipedia.org/wiki/Maria_Gaetana_Agnesi#/media/Ficheiro:Maria_Gaetana_ Agnesi.jpg)

Não entraremos em detalhes da vida e do que fez Maria Gaetana Agnesi, pois, como já frisamos, há um vasto material disponível em língua portuguesa sobre sua biografia (UNLU, 1995; DE MORAIS FILHO, D.C. 1, 1996 etc.).
A prodigiosa e poliglota menina, na sua juventude, estudou os trabalhos de Newton, Leibniz, Euler, dos irmãos Bernoulli, de Fermat e de Descartes, portanto, tudo o que se poderia denominar de "pesquisa de ponta" da Matemática de sua época. Após 10 anos de preparo, e na maturidade de seus 30 anos, escreveu sua obra magna, o *Instituzioni Analitiche ad uso de la Gioventù Italiana* (Instituições analíticas para o uso da juventude italiana) (AGNESI, 1748), um dos primeiros textos, incluindo o Cálculo, escrito de forma didática e sistemática para jovens interessados em Matemática (diz-se que foi escrito para um de seus irmãos mais novos!). O livro consiste em quatro grandes volumes, com mais de 1000 páginas, abordando tópicos de Álgebra, Geometria Analítica, Cálculo e Equações Diferenciais (DE MORAIS FILHO, D.C. 1, 1996).

Esse é o livro que nos interessa (veja Figura 5), pois nele Agnesi apresenta a curva que leva seu nome e começaremos a estudar essa curva a seguir.

3. Quem tem medo da Curva da Bruxa? De onde vem esse nome?

Veremos mais adiante, na Parte II da Subseção 5.1 desse artigo que, ao definir sua curva, a própria Agnesi, em seu *Instituzioni*, a chama pelo nome de *Versiera*. Em várias línguas, a curva é também conhecida como *Curva da Bruxa, Feiticeira de Agnesi*, ou *Bruxa de Agnesi*. Uma curva ter em seu nome a palavra "bruxa" é motivo para suscitar bastante curiosidade do público: o que uma curva com esse nome teria a ver com Matemática? Talvez por esse motivo, a *Versiera* tenha o privilégio de ser a única curva a ter um dia do ano dedicado a ela, comemorado no dia do Halloween americano (DIA DA BRUXA, 2017). É importante ressaltar que, apesar desse nome, a curva passa longe de ter envolvimento com o paganismo e, muito menos, por seu formato relembrar um "chapéu de uma bruxa". Expliquemos como surgiu esse nome.

Guido Grandi (1672-1742) era um padre jesuíta interessado em ciências, que contribuiu em Hidráulica e Geometria. Em um livro, publicado em 1718, *Uma nota sobre o tratado de Galileo sobre a movimento natural*, ele definiu a curva e a batizou de *Versiera* ou *sinus versus* (GRANDI- MACTUTOR, 2014). Também utilizou o termo latino *versoria*, vocábulo vindo da palavra latina *vertere*, que significa *virar* (GRINSTEIN, CAMPBELL, 1987). Agnesi no *Instituzioni*, seguindo Guido, usa a palavra *Versiera* para denominar a curva que estuda (Parte II da Subseção 5.1, deste artigo).
O matemático inglês John Colson (1680-1760), professor de Cambrige, ficou fascinado pelo *Instituzioni Analitiche* de Maria Gaetana Agnesi, e, mesmo em avançada idade, resolveu aprender Italiano apenas para traduzir o *Instituzioni* para o Inglês, o que ocorreu em 1801 (COLSON, 1801). Com isso, em sua opinião, iria prestar um grande serviço à juventude e às jovens inglesas de sua época.

Figura 5: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Agnesi_-__Instituzioni__analitiche__ad__uso__della__giovent%C3%B9__italiana,__1748__-__52440.jpg

Para explicarmos esse nome esquisito da curva, é preciso observar que, segundo (NORANDO, T. & MAGNAGHI-DEFINO, 2019), na Itália dessa época, para evitar usar diretamente a palavra *demônio*, era comum chamar o *adversário de Deus* de *avversiero* ou *avversiera*, palavras que derivam da palavra latina *adversarius* (*adversário*, em Português). Como em Latim eclesiástico da época, a palavra *Versiera* ganhou o significado de *mulher contraria a Deus*, ou seja, *bruxa* (MULCRONE, 1957) (isso é o que, atualmente, a palavra *Versiera* continua significando em Italiano (vide (DIZIONARIO, 2023)))), Colson traduziu a palavra *Versiera* "ao pé da letra", simplesmente como *the witch*, traduzida em Português como *a bruxa, a feiticeira* (MULCRONE, 1957; GRINSTEIN, CAMPBELL, 1987; EVES, 2004). Daí, esse nome, *Witch of Agnesi* (Bruxa de Agnesi), vindo de um erro de tradução, e é como atualmente se conhece a curva em países de Língua Inglesa e em todo mundo.

Antes de Colson, a *Versiera* apareceu em trabalhos anteriores de Fermat, Newton, Huygens e Leibniz, mas não lhe tinham dado importância suficiente para ter um nome de batismo (NORANDO, T. & MAGNAGHI-DEFINO, 2019).

Há um fato irônico a ser destacado na vida de Agnesi. Muito longe de ter qualquer ligação como o paganismo, em sua juventude, Agnesi tentou ser uma religiosa, mas seu pai não a permitiu, dissuadindo-a de ser freira. Apenas após a morte do pai ela abandonou todos seus estudos, doou seus bens, fez voto de pobreza e decidiu passar o resto de seus dias como uma freira, devotando-se a fazer caridades aos necessitados de sua região (MARTINS, 2015; MAZZOTTI, M., 2020).

4. Apresentação moderna e usual da curva da bruxa para turmas do Ensino Básico

4.1. A construção moderna usual da *Versiera*

Descreveremos a seguir a maneira usual que a *Versiera* é apresentada atualmente. Mais adiante, na Seção 6, compararemos essa apresentação com a original, dada por Agnesi, que apresentaremos na Seção 5.

Inicialmente, desenhe um círculo $\mathscr{C}$ e duas retas paralelas s e r, tangentes a esse círculo, respectivamente nos pontos C e A, simétricos em relação ao diâmetro vertical do círculo.

Partindo do ponto A, tracemos uma reta i em direção à reta s, que corta o círculo $\mathscr{C}$ no ponto D e a reta s no ponto E, respectivamente.

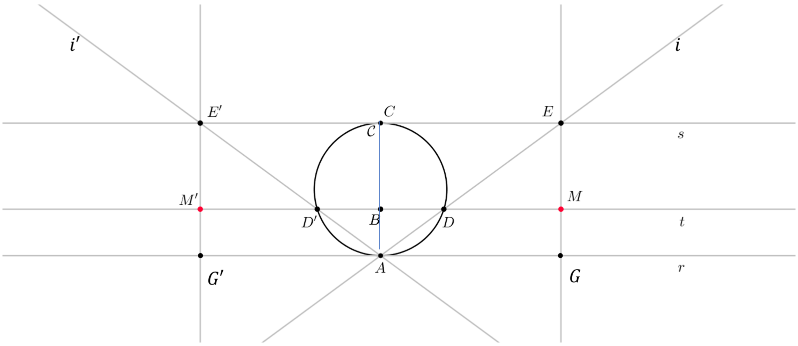


Figura 6: Construção moderna da *Versiera* (Fonte: autores)

Passando pelo ponto E, tracemos uma reta EG, perpendicular à r. Tracemos a reta t, paralela à s, passando por D, e nela marquemos o ponto B, interseção de t com o diâmetro AC. Marquemos o ponto M, interseção das retas t e EG. O ponto M, em vermelho, é um ponto da curva. Por simetria, marque na reta t o ponto M$'$, de modo que BM = BM$'$. O ponto M$'$ também faz parte da curva.

Na Figura 7 repetimos o processo, variando apenas a inclinação da reta i, quando encontramos os pontos O e O$'$ também da *Versiera*.

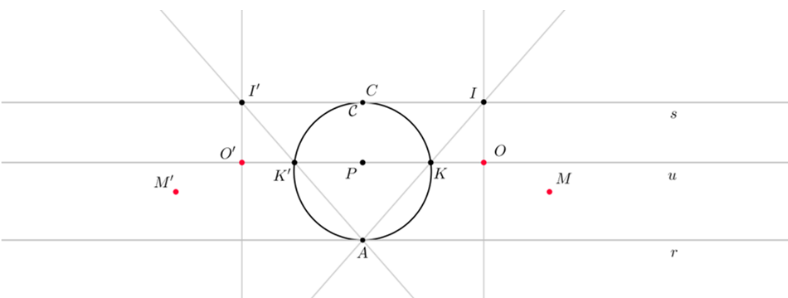


Figura 7: Tratamento moderno da *Versiera* (Fonte: autores)

Variando a inclinação da reta i, de modo a intersectar todos os pontos do semicírculo ADC, encontra-se os demais pontos da curva e obtém-se a *Versiera*, uma curva simétrica em relação ao diâmetro AC, por construção.

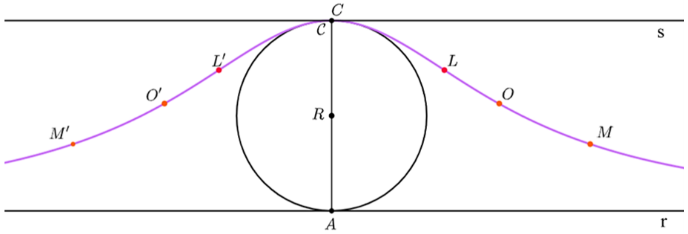


Figura 8: A *Versiera* encontrada pela apresentação moderna (Fonte: autores)

Essa é a maneira atual e usual que a *Versiera* é apresentada em artigos, livros e na internet.

4.2. A equação algébrica moderna e usual da *Versiera*

Seguindo a apresentação moderna anterior, a Equação da Curva da Bruxa pode ser encontrada por meio de parametrização. Consideremos uma circunferência de diâmetro a, com o ponto A no ponto $(0, 0)$ (vide Figura 9).

Observe que o círculo está centrado no ponto $\left(0, \frac{a}{2}\right)$. Considere um ponto da curva com coordenadas $M = (x, y)$, tal como apresentado na Figura 9. Encontraremos a equação paramétrica da curva para os ângulos $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

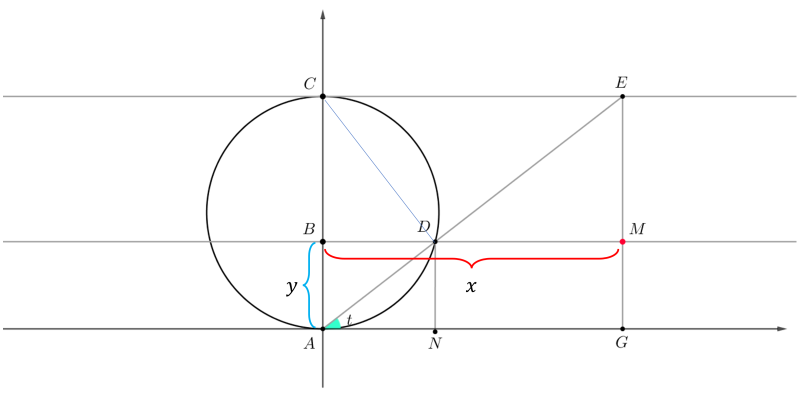


Figura 9: Equação paramétrica da *Versiera* (Fonte: autores)

Como $x = |BM| = |AG|$, no triângulo AEG, tem-se

$$x = |AE| \cos(t). \tag{1}$$

Da mesma maneira, no triângulo ADN tem-se

$$y = |AD| \operatorname{sen}(t). \tag{2}$$

Consideremos o triângulo ACD. Note que, o ângulo $A\widehat{D}C$ é reto, pois o triângulo ACD está inscrito na semicircunferência. Ora, $A\widehat{C}D = t$, lembrando que $a = |AC|$, temos

$$\mathrm{sen}(t) = \frac{|AD|}{|AC|} \Rightarrow |AD| = a\,\mathrm{sen}(t).$$

De (2) obtemos $y = a\,\mathrm{sen}^2(t)$. No triângulo AEG tem-se $\mathrm{sen}(t) = \frac{|EG|}{|AE|} = \frac{a}{|AE|} \Rightarrow |AE| = \frac{a}{\mathrm{sen}(t)}$. De (1), essa igualdade resulta em $x = a\ \mathrm{cotg}\ (t)$. Portanto, a parametrização da curva é

$$P = (a\ \mathrm{cotg}(t), a\,\mathrm{sen}^2(t)).$$

Por simetria pode ser estendida ao intervalo $(0, \pi)$. No ponto $t = \frac{\pi}{2}$ a curva é definida por extensão contínua do processo geométrico. Nos extremos $t = 0$ e $t = \pi$ a curva tende ao infinito, sendo assintótica a uma reta (horizontal).

Podemos, agora, encontrar a equação algébrica da *Versiera*:

$$x = a\ \mathrm{cotg}(t) \Rightarrow x^2\,\mathrm{sen}^2(t) = a^2(1 - \mathrm{sen}^2(t)) \Rightarrow (x^2 + a^2)a\,\mathrm{sen}^2(t) = a^3.$$

Sabendo que $y = a\,\mathrm{sen}^2(t)$, obtemos

$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}. \tag{3}$$

Uma observação final é que a curva tem comprimento infinito, mas a área que ela delimita, (entre a curva e a reta r (vide Figura 8) vale quatro vezes a área do círculo ADC. Isso pode ser feito integrando-se a equação da curva.

5. Resgatando como Agnesi apresentou originalmente sua curva: uma versão em Português do texto original em Italiano, com explicações matemáticas inteligíveis para alunos do Ensino Básico

Nessa seção faremos um resgate histórico da Curva da bruxa, como consta no *Istituzione Analitiche*, apresentando o texto original escrito por Maria Gaetana Agnesi.

A seguir, até onde nos consta, apresentaremos pela primeira vez uma tradução em Português feita diretamente do texto original de Agnesi. Tentamos ser ao máximo fiel à redação original, não perdendo a oportunidade de explicar aos leitores um texto escrito no Século XVII, resgatando a linguagem e a abordagem da época. Agradecemos ao Prof. Dr. Pietro Speziali do IMECC, na Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, pela revisão final da tradução e por suas sugestões.

Para facilitar a leitura, dividimos o texto original em sete partes e, ao final de cada parte, explicamos com linguagem atual a parte matemática descrita por Agnesi.

5.1. A versão traduzida da curva *Versiera* apresentada no Instituzioni Analitiche

O texto que traduziremos consta das páginas 380-382 do *Instituzioni Analitiche*, onde a *Versiera* aparece no livro pela primeira vez, apresentada como solução do Problema III do Capítulo V– "Da construção de lugares (geométricos) que têm grau superior a dois" (*della costruzioni de loughi che superano il secondo grado*).

Para nos situarmos, a *Versiera* é mencionada no Livro *Instituzioni Analitiche* mais de uma vez. Além de onde acabamos de citar, ela aparece posteriormente nas páginas finais 427-428 do Primeiro Livro, onde Agnesi apresenta uma maneira de encontrar, de forma algébrica, os pontos de inflexão da curva.

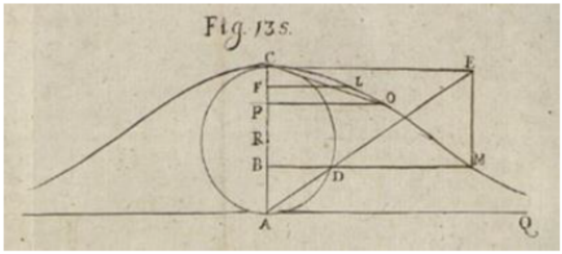
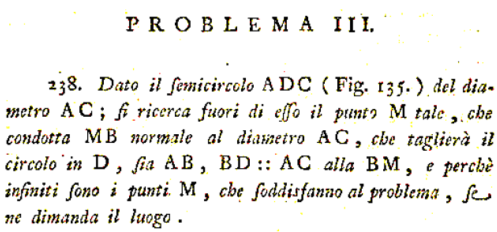


Figura 10: O desenho da *Versiera*, apresentada como Fig. 135 no *Instituzioni Analitiche*

Parte I



PROBLEMA III.

238. *Dato il ſemicircolo* ADC (Fig. 135.) *del diametro* AC ; *ſi ricerca fuori di eſſo il punto* M *tale*, *che condotta* MB *normale al diametro* AC, *che taglierà il circolo in* D, *ſia* AB, BD :: AC *alla* BM, *e perchè infiniti ſono i punti* M, *che ſoddisfanno al problema*, *ſe ne dimanda il luogo*.

Figura 11: A *Versiera* – Parte I

Dado o semicírculo ADC *(Fig. 135) (em nosso texto, Fig. 10, acima) de diâmetro* AC*; procura-se fora dele (do semicírculo) o ponto* M *tal que, traçando-se (o segmento de reta)* MB *normal ao diâmetro* AC*, se intersecta o círculo em (um ponto)* D*, de maneira que* $\mathrm{AB}, \mathrm{BD} :: \mathrm{AC}$ *com* BM*, e porque são infinitos os pontos* M*, que satisfazem o problema, encontra-se o lugar geométrico.*

Nesta Parte I, Agnesi definiu sua curva como um **lugar geométrico**, ou seja, um conjunto de pontos M do plano que, por intermédio dos pontos $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ e D, satisfazem uma condição matemática, a saber:

$$\mathrm{AB}, \mathrm{BD} :: \mathrm{AC} \text{ com } \mathrm{BM}, \quad \text{ou melhor } \mathrm{AB}, \mathrm{BD} :: \mathrm{AC}, \mathrm{BM}.$$

Observação: Essa notação dos quatro pontos, relacionando quatro segmentos, dois de cada lado dos quatro pontos significa a seguinte relação de proporcionalidade, que define os pontos M da *Versiera*:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BM}}. \tag{4}$$

Esta era uma notação comum em alguns livros de Geometria e lê-se como "AB está para BD, assim como AC está para BM" (ROQUE, T , CARVALHO, J. B. P., 2012).

Parte II

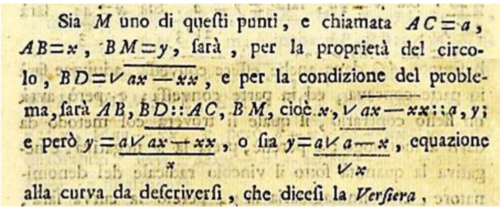

Sia M uno di queſti punti, e chiamata $AC=a$, $AB=x$, $BM=y$, ſarà, per la proprietà del circolo, $BD=\sqrt{ax-xx}$, e per la condizione del problema, ſarà $AB, BD :: AC, BM$, cioè $x, \sqrt{ax-xx} :: a, y$; e però $y=\frac{a\sqrt{ax-xx}}{x}$, o ſia $y=\frac{a\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}$, equazione alla curva da deſcriverſi, che diceſi la *Verſiera*.

Figura 12: A *Versiera* – Parte II

Seja M *um desses pontos, e chamemos* $AC = a$, $AB = x$, $BM = y$, *resulta, pela propriedade do círculo,* $BD = \sqrt{ax - xx}$, *e pela condição do problema, resulta* $AB, BD :: AC, BM$, *ou seja* $x, \sqrt{ax-xx} :: a, y$; *e, porém* $y = \frac{a\sqrt{ax-xx}}{x}$, *ou seja,* $y = \frac{a\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}$, *(que é a) equação da curva descrita, chamada de A Versiera.*

Definida a curva na Parte I, Agnesi segue para a encontrar a equação da curva. Ela usa o produto $x \cdot x$, que denotamos x^2. É importantíssimo observar aqui que o comprimento x está no eixo vertical e o comprimento y está no eixo horizontal, diferentemente do tratamento moderno. Na Seção 6 explicaremos com mais detalhes as razões desse fato.

A “propriedade do círculo” a qual ela se refere, resultado conhecido da Geometria Euclidiana estudado nas escolas, é que o triângulo ADC é retângulo, por ser inscrito em um semicírculo (BARBOSA, J.L.M., 2007). Portanto, pelas propriedades de relações métricas dos triângulos retângulos: $BD^2 = AB \cdot BC$ (o quadrado da altura de um triângulo retângulo é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa (BARBOSA, J.L.M., 2007)), ou seja, $BD^2 = x(a-x)$. Substituindo essa igualdade na fórmula de proporcionalidade $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{BM}$, e, como $y = \frac{a\sqrt{ax-xx}}{x}$, fazendo as devidas manipulações, resulta em

$$y = \frac{a\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}}. \tag{5}$$

que é a equação da curva encontrada por Agnesi.

Após definir a curva e encontrar sua equação, Agnesi parte para analisar algumas propriedades interessantes da curva.

Parte III

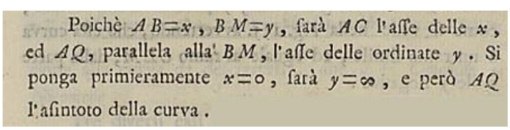

Poichè $AB=x$, $BM=y$, ſarà AC l'aſſe delle x, ed AQ, parallela alla BM, l'aſſe delle ordinate y. Si ponga primieramente $x=0$, ſarà $y=\infty$, e però AQ l'aſintoto della curva.

Figura 13: A *Versiera* – Parte III (A)

Uma vez que $AB = x, BM = y$, *será* AC *o eixo dos* x, *e* AQ, *(a reta) paralela à* BM, *o eixo das ordenadas* y. *Se fizermos, primeiramente,* $x = 0$, *teremos* $y = \infty$, *e, portanto,* AQ *é assíntota à curva.*

Pelo desenho, vê-se que a *Versiera* é uma curva ilimitada, prolongando-se indefinidamente para esquerda e para direita. Acima, a última frase de Agnesi quer dizer que quando mais prolongue-se a curva, à direita ou à esquerda, mais próxima a curva fica do eixo AQ, ou seja, a reta AQ é a chamada **assíntota** da *Versiera*. Intuitivamente, isso significa que a reta AQ “toca a curva no infinito”.

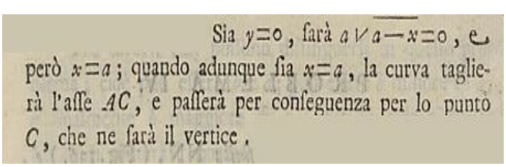
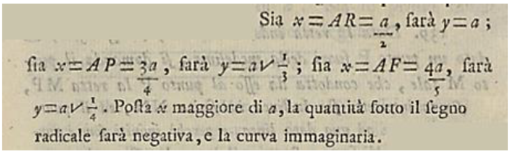

Sia $y=0$, ſarà $a\sqrt{a-x}=0$, e però $x=a$; quando adunque ſia $x=a$, la curva taglierà l'aſſe AC, e paſſerà per conſeguenza per lo punto C, che ne ſarà il vertice.

Figura 14: A *Versiera* – Parte III (B)

Seja $y = 0$, *então* $a\sqrt{a-x} = 0$, *e, portanto,* $x = a$; *quando, porém, tivermos* $x = a$, *a curva cortará o eixo* AC, *e, passará, consequentemente, pelo ponto* C, *que será o vértice.*

Lembrando mais uma vez, que na apresentação de Agnesi os eixos cartesianos são permutados, nessa frase, vê-se que a *Versiera* tangenciará o círculo ACD somente em um ponto, justamente o vértice da curva, que é o ponto onde ela para de ir para cima e vai para baixo.

Parte IV



Sia $x = AR = \frac{a}{2}$, farà $y = a$; ſia $x = AP = \frac{3a}{4}$, farà $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$; ſia $x = AF = \frac{4a}{5}$, farà $y = a\sqrt{\frac{1}{4}}$. Poſta x maggiore di a, la quantità ſotto il ſegno radicale farà negativa, e la curva immaginaria.

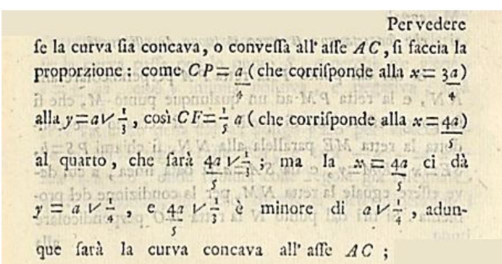
Figura 15: A *Versiera* – Parte IV

Quando $x = AR = \frac{a}{2}$, *teremos* $y = a$; *quando* $x = AP = \frac{3a}{4}$, *teremos* $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$; *quando* $x = AF = \frac{4a}{5}$, *teremos* $y = a\sqrt{\frac{1}{4}}$. *Pondo* x *maior do que* a $(x > a)$, *o número sob o sinal do radical será negativo, e a curva é imaginária.*

Nesta parte, lembrando que para Agnesi o x está no eixo vertical e o y no eixo horizontal, ela destacou alguns pontos interessantes na curva, que ajuda a perceber seu formato: os pontos são $x = \frac{a}{2}$ e $y = a$, $x = \frac{3a}{4}$ e $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, $x = \frac{4a}{5}$ e $y = a\sqrt{\frac{1}{4}}$. Na Parte V esses pontos se prestarão a explicação que ela dá do formato da curva.

Na última frase da Parte IV Agnesi quer dizer que para $x > a$, o radicando de $\sqrt{a-x}$ é negativo e torna-se um número complexo imaginário, que atualmente representamos como $\sqrt{a-x} = i\sqrt{x-a}$.

Parte V



Per vedere ſe la curva ſia concava, o conveſſa all' aſſe AC, ſi faccia la proporzione: come $CP = \frac{a}{4}$ (che corriſponde alla $x = \frac{3a}{4}$) alla $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, così $CF = \frac{1}{5}a$ (che corriſponde alla $x = \frac{4a}{5}$) al quarto, che farà $\frac{4a}{5}\sqrt{\frac{1}{3}}$; ma la $x = \frac{4a}{5}$ ci dà $y = a\sqrt{\frac{1}{4}}$, e $\frac{4a}{5}\sqrt{\frac{1}{3}}$ è minore di $a\sqrt{\frac{1}{4}}$, adunque farà la curva concava all' aſſe AC;

Figura 16: A *Versiera* – Parte V

Para ver se a curva seja côncava, ou convexa em relação ao eixo AC, *faça-se a proporção: como* $CP = \frac{a}{4}$ *(que corresponde a* $x = \frac{3a}{4}$*), temos* $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, *então* $CF = \frac{a}{5}$, *(que corresponde a* $x = \frac{4a}{5}$*) vezes quatro, temos* $\frac{4a\sqrt{1/3}}{5}$; *mas, se* $x = \frac{4a}{5}$, *então* $y = a\sqrt{\frac{1}{4}}$ *e* $\frac{4a\sqrt{1/3}}{5}$ *é menor do que* $a\sqrt{\frac{1}{4}}$, *daí, fará a curva côncava em relação ao eixo* AC.

Neste momento é realizado um estudo acerca da concavidade da curva da bruxa, e seus pontos de inflexão. Caso fosse trabalhado de maneira moderna, trabalharíamos apenas com o estudo das derivadas, porém, no caso de Agnesi, ela pegou alguns pontos convenientes, e observou em que momento havia crescimento e decrescimento, para determinar a concavidade.

Agnesi ainda observou o fato de que o gráfico possui uma assíntota, e por este motivo haveria partes do gráfico concavas e convexas, segundo a denominação feita por Agnesi, como podemos ver no trecho abaixo.

Parte VI

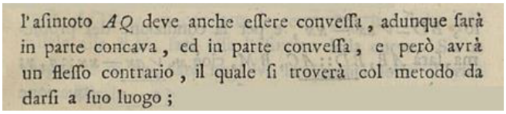

l'aſintoto *AQ* deve anche eſſere conveſſa, adunque farà in parte concava, ed in parte conveſſa, e però avrà un fleſſo contrario, il quale ſi troverà col metodo da darſi a ſuo luogo;

Figura 17: A *Versiera* – Parte VI

Mas, pela assíntota AQ, *deve ser também convexa, o que fará (com que tenha) uma parte côncava e uma parte convexa, e terá uma inflexão contrária, que se encontra com o método que será apresentado posteriormente.*

O que Agnesi quer dizer é que pelo fato de existir uma assíntota AQ, como a curva, a partir do ponto C é côncava e tem uma assíntota, a curva não pode continuar côncava, pois intersectaria a reta AQ, tendo necessariamente de tornar-se, em algum ponto, convexa. O "método apresentado posteriormente" citado, refere-se à parte do texto do Instituizioni onde isso será feito.

Parte VII

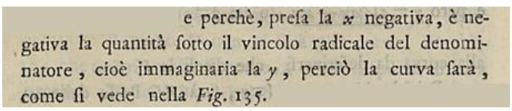

e perchè, preſa la *x* negativa, è negativa la quantità ſotto il vincolo radicale del denominatore, cioè immaginaria la *y*, perciò la curva farà, come ſi vede nella *Fig.* 135.

Figura 18: A *Versiera* – Parte VII (A)

e porque, tomando x *negativo, é negativo o número sob o radical no denominador, logo o* y *será imaginário, portanto, a curva será, como se vê na Fig. 135.*

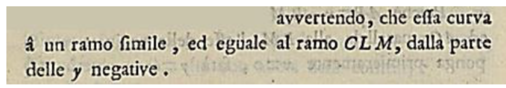

avvertendo, che eſſa curva à un ramo ſimile, ed eguale al ramo *CLM*, dalla parte delle *y* negative.

Figura 19: A *Versiera* – Parte VII (B)

Advertimos, que a curva tem um ramo semelhante, e igual ramo CLM, *da parte em que* y *é negativo.*

Na parte VII (A), a figura 135, a qual Agnesi se refere é a Figura 10 deste artigo. Como para Agnesi o x está no eixo vertical, o que ela quer dizer é que a curva não passará abaixo na reta AQ.

Na parte VII (B), ela assegura que a curva é simétrica em relação ao eixo AC. Ela chama a parte CLM de um "ramo" da curva, que, para y negativo, tem esse mesmo formato de ramo. Ou seja, em linguagem moderna, ela diz que a curva é dada por uma função par (que satisfaz $f(x) = f(-x)$). Isso vê-se facilmente com o tratamento moderno dado pela Equação (3): $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2} = \dfrac{a^3}{a^2 + -(x)^2}$.

6. Análise do trabalho original de Agnesi e o tratamento moderno de sua curva

Façamos, a seguir, uma análise das abordagens de apresentação da *Versiera* feita por Agnesi, no século XVIII, com a abordagem feita atualmente. Comparemos as apresentações feitas nas Seções 4 e 5 anteriores, com linguagem e intuito de que isso possa ser repassado aos alunos em uma sala de aula do Ensino Básico.

6.1. Os objetivos das duas abordagens parecem ser bem distintos

6.1.1 A diferença principal entre as duas apresentações

Em uma análise geral, uma das diferenças mais perceptíveis entre as duas apresentações é que a apresentação moderna fornece uma maneira prática e fácil de construir a curva, sem importar-se em dar uma definição formal da curva ou encontrar a equação que a define (é mais simples desenhar a curva e mais trabalhoso encontrar a equação ela). Por outro lado, na apresentação de Agnesi, a matemática italiana não se preocupou em ensinar como desenhar a curva, seu maior intuito foi encontrar a equação e estudar algumas de suas propriedades (é mais simples encontrar a equação curva e mais trabalhoso desenhá-la).

Com as informações dadas por Agnesi, como descobrir que a *Versiera* tem o desenho que Agnesi apresenta na Figura 10 do seu *Instituzioni*? Note que na Figura 10, parte do livro original onde Agnesi apresenta a *Versiera*, tem um desenho como a Figura 8, mas nada é dito como traçar a curva.

6.1.2 A modernidade seguindo os passos de Agnesi para construir a curva, segundo o que ela apresentou

Uma das maneiras atuais que se tem para desenhar a *Versiera*, segundo Agnesi, é usando o Geogebra, e, com fazer alguns cálculos com a Equação (4) para encontrar os pontos que definem a curva. Fixa um valor para o raio do círculo e faz-se alguns cálculos, variando os comprimentos do segmento AB. Por exemplo, considerando-se AC = 8, encontrou-se o ponto M abaixo, usando o Geogebra:

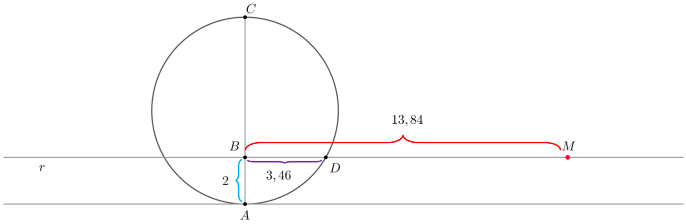


Figura 20: Desenho da *Versiera* segundo Agnesi, usando o Geogebra (Fonte: autores)

Daí, marca-se mais pontos, encontrando a Figura 8.

6.2. Agnesi e o começo da Geometria Cartesiana

Após ler a Subseção 5.1, onde expomos a apresentação da *Versiera*, pode-se estranhar que, aparentemente, não se encontra ligação alguma entre a "geometria" usada por Agnesi e a maneira como hoje usamos a Geometria Cartesiana.

Expliquemos: as primeiras ideias da Geometria Cartesiana surgiram com Pierre de Fermat (1607-1665) e com René Descartes (1596-1650), em 1637, com a publicação por esse último do seu *Geométrié*, um apêndice de sua obra mais conhecida, *O discurso do Método*. No *Geométrié*, a geometria usada para dar uma base geométrica à Álgebra. Dá-se ênfase em encontrar equações de curvas planas, retas tangentes e área de regiões formadas por essas curvas, portanto, bem diferente da Geometria Cartesiana que hoje estamos acostumados a usar. Por isso, Agnesi não usa eixos perpendiculares, não há pares ordenados e ela, sem alarde algum inverte "os eixos", coloca a variável x na vertical e a y na horizontal, o que torna mais simples encontrar a equação da *Versiera* (Parte II da Subseção 5.1). À época, dados dois segmentos de comprimentos x e y, usava-se a "geometria cartesiana", para encontrar uma relação algébrica entre essas duas variáveis. Agnesi, ao publicar o *Instituzioni*, em 1718, 81 anos após o *Geométrié*, contribuiu com o estabelecimento da Geometria Cartesiana na Matemática, firmando-a como uma indispensável ferramenta usada para auxiliar o, também, recém-criado Cálculo Diferencial e Integral, até que a geometria de Descartes chegasse à forma final de como hoje a conhecemos (BOYER, C.B., 1956).

6.3. As equações obtidas nas duas apresentações são diferentes?

Analisando ambas as equações da curva (Equação (3) e Equação (5)), dadas nas duas apresentações, nota-se que elas têm expressões diferentes, mas na verdade, é a mesma equação. De fato, desenvolvendo a Equação (3), obtida por Agnesi, resulta nas equivalências:

$$y = \frac{a\sqrt{a-x}}{\sqrt{x}} \iff y^2x = a^2(a-x) \iff x(a^2+y^2) = a^3 \iff x = \frac{a^3}{a^2+y^2}.$$

Mas, lembremos que na apresentação de Agnesi o x está no eixo das ordenadas e o y no eixo das abscissas (Subseção 6.2), logo, para ter-se a apresentação moderna da curva, deve-se trocar uma variável por outra na última igualdade. Portanto, as equações são as mesmas.

6.4. Geometricamente, porque a construção moderna garante que estamos construindo a *Versiera* do livro da Agnesi?

Como vimos nas Subseção 4.1 e Subseção 5.1, as duas apresentações da Curva da Bruxa são realmente distintas e nada garante que a apresentação original de Agnesi e a apresentação mais conhecida, a moderna, descrevem a mesma curva. Mostraremos a seguir que as duas apresentações são equivalentes, ou seja, uma implica na outra, e, portanto, as curvas descritas são as mesmas.

6.4.1 A construção moderna da curva implica na construção de Agnesi

A construção moderna da *Versiera* segue conforme a construção da figura abaixo, onde M é um dos pontos da curva encontrado no *Instituzioni* pelo método apresentado na Subseção 4.1.

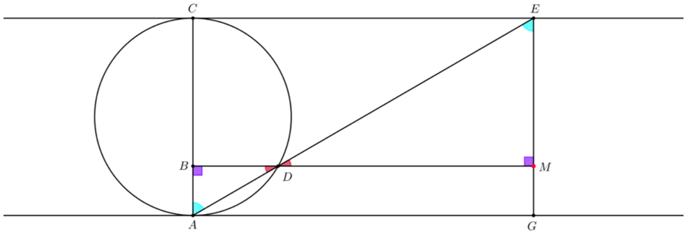


Figura 21: A construção moderna da curva implica na construção de Agnesi

Como GE = AC e AG = BM, pois o quadrilátero ACEG é um retângulo, segue pela semelhança dos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle AGE$ que:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{GE}{AG} = \frac{AC}{BM}.$$

Ou seja, $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{BM}$, que, pela linguagem de Agnesi (Equação (4)) toma a forma $AB, BD :: AC, BM$, condição usada para definir a curva no *Instituzioni* (Parte I da Subseção 5.1). Logo, os pontos M encontrados na construção moderna da curva correspondem aos pontos encontrados pela construção de Agnesi.

6.4.2 A construção de Agnesi implica na construção moderna da curva

Construamos um dos pontos M da *Versiera*, tal como ensinou Agnesi na Parte I da Subseção 5.1. Veja a figura abaixo.

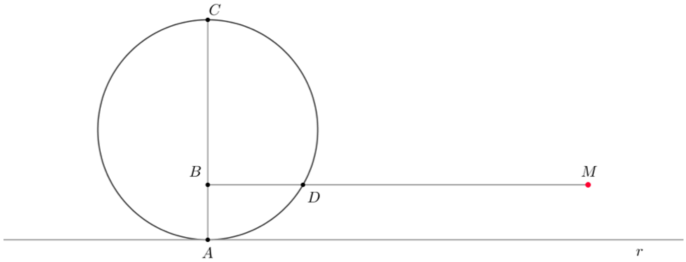


Figura 22: A construção de Agnesi implica na construção moderna da curva (a)

O ponto M é tal que

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BM}}.$$

No desenho anterior, seguindo os procedimentos usados na construção moderna da curva, apresentados na Subseção 4.1, trace uma reta passando pelos pontos A e D, que intersecta a reta s no ponto E (vide Figura 23). Baixe uma perpendicular à reta r passando pelo ponto E, que intersecta a reta que passa por BM no ponto M$'$, e, segundo a definição moderna da *Versiera*, pertence à curva. Vamos mostrar que M$'$ = M.

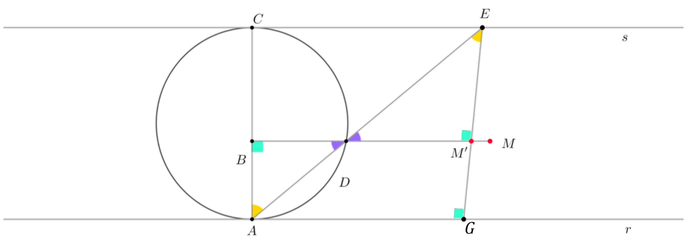


Figura 23: A construção de Agnesi implica na construção moderna da curva (b)

Ora, os triângulos ABD e AEG são semelhantes, donde

$$\frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{AG}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}}. \tag{6}$$

Ora, da definição de Agnesi (Equação (4))

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BM}}. \tag{7}$$

e, como $\mathrm{GE} = \mathrm{AC}$ e $\mathrm{AG} = \mathrm{BM}'$, pelo fato do quadrilátero ACEG ser um retângulo, segue da Equação (6), da Equação (7) e das duas igualdades anteriores que

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BM}'} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BM}} \Longrightarrow \mathrm{BM}' = \mathrm{BM} \Longrightarrow \mathrm{M}' = \mathrm{M}.$$

Ou seja, o ponto M' da apresentação moderna da curva corresponde, de fato, ao ponto M, encontrado pela apresentação de Agnesi.

Resumindo as implicações das Subseções 6.4.1 e 6.4.2, as duas apresentações descrevem a mesma curva: a *Versiera*.

7. Conclusão

Esperamos que o artigo sirva para que as novas gerações entendam melhor a história da Matemática, compreendam o papel das mulheres em seu desenvolvimento e que esse assunto possa ser levado ao conhecimento de estudantes e interessados, e seja usado para discutir-se o problema de inclusão feminina no meio científico. Finalizamos, ressaltando que Agnesi foi uma mulher admirável, por seu conhecimento, sua importância, e, principalmente uma das primeiras mulheres a estudar a filosofia natural (Física) e preocupar-se em defender a educação para mulheres há quase duzentos anos. Deve ter sua importância reconhecida, além de uma simples curva que leva seu nome. Contamos também que o artigo inspire, principalmente, os iniciantes a discutir a questão de gênero na Ciência.

Agradecimentos

Agradecemos a leitura e sugestões da Profa. Pammella Queiroz de Souza da Uamat-UFCG.

Referências

[1] AGNESI, M. G., **Instituzioni Analiche**. Vol. 1, Milão, 1748. ⟨https://archive.org/details/BUSA298_183/mode/2up⟩. Acessado em 25 de agosto de 2023.

[2] ATIYAH, M. F.; MACDONALD, I. G. **Introduction to Commutative Algebra**, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

[3] AW in M – Association for Women in Mathematics, 2023. Disponível em: ⟨https://awm-math.org/⟩. Acessado em 25 de agosto de 2023.

[4] BARBOSA, J.L.M. **Geometria Euclidiana Plana**. SBM, 2007.

[5] BOYER, C. B. **History of Analytic Geometry**. Scripta Mathematica, Yeshiva University, New York, 1956.

[6] BURTON, D. M. **A First Course in Rings and Ideals**, Addison-Wesley Publishing Company, 1970.

[7] COLSON, J. **Analytical Institutions**. Londres, 1801. Disponível em: ⟨https://archive.org/details/analyticalinsti00masegoog⟩. Acessado em 25 de agosto de 2023.

[8] CWM – Commitee for Women in Mathematics, 2023. Disponível em: ⟨https://www.mathunion.org/activities/committee-women-mathematics-cwm⟩. Acessado em 25 de agosto de 2023.

[9] DE MORAIS FILHO, D. C. 1. **E elas finalmente chegaram....** Revista do Professor de Matemática, ed. 33, p. 1-6, 1997.

[10] DE MORAIS FIHO, D.C. 2. **As mulheres na Matemática**. História e Histórias, RPM, ed. 30, p. 2-9, 1996.

[11] DIA DA BRUXA. ⟨https://impa.br/noticias/31-de-outubro-dia-de-celebrar-a-bruxa-de-agnesi/⟩. Acessado em 25 de agosto de 2023.

[12] DIZIONARIO, 2023. ⟨https://dizionario.internazionale.it/parola/versiera⟩. Acessado em 25 de agosto de 2023.

[13] DOODLE. ⟨https://www.techtudo.com.br/noticias/2014/05/maria-gaetana-agnesi-e-tema de-doodle-animado-do-google-sobre-matematica.ghtml.⟩. Acessado em 25 de agosto de 2023.

[14] EMMY1. **Emmy Noether**. Biblioteca Matemática. Universidade de Coimbra. ⟨https://www.uc.pt/fctuc/dmat/departamento/bibliomat/servicos/matematicos/Noether-E⟩. Acessado em 25 de agosto de 2023.

[15] EMMY 2. **Emmy Noether Biography & Facts**. Britannica. Disponível em: ⟨https://www.britannica.com/biography/Emmy-Noether⟩. Acessado em 25 de agosto de 2023.

[16] EMMY3. Emmy Noether "pai" da álgebra moderna: ⟨https://impa.br/noticias/emmy-noether-pai-da-algebra-moderna/⟩. Acessado em 25 de agosto de 2023.

[17] EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**, Graduate Studies in Mathematics, 2ª Ed., 2010.

[18] EVES, H. **Introdução à história da Matemática**, UNICAMP, 2004.

[19] EW im M – European Women in Mathematics, 2023. Associação de mulheres Matemáticas Europeias. Disponível em: ⟨https://www.europeanwomeninmaths.org/⟩. Acessado em 25 de agosto de 2023.

[20] GÊNERO SBM-SBMAC - ⟨https://sbm.org.br/comissao-de-genero-sbm-sbmac/⟩. Acessado em 25 de agosto de 2023.

[21] GRANDI- **MACTUTOR Biografia de Guido Grandi**. Disponível em: ⟨https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Grandi/⟩, 2014. Acessado em 25 de agosto de 2023.

[22] GRINSTEIN, L.S., CAMPBELL, P.J. **Woman of Mathematics: a bibiographic sourcebook**. Greenwood Press, 1987.

[23] LMS - ⟨https://www.lms.ac.uk/about/committees/women-mathematics-committee⟩. Acessado em 25 de agosto de 2023.

[24] MARTINS, M. **Gaetana Agnesi: a matemática que se dedicou aos desfavorecidos e doentes**, Correio dos Açores, 2015. ⟨https://repositorio.uac.pt/bitstream/10400.3/3591/1/Agnesi(jornal)-12-3-2015.pdf⟩. Acessado em 25 de agosto de 2023.

[25] MAZZOTTI, M. **Maria Gaetana Agnesi e il suo mondo. Una vita tra scienza e carità**. Carocci Editore, 2020.

[26] MULCRONE, T. F. The Names of the Curve of Agnesi. **The American Mathematical Monthly**, vol. 64, no. 5, Mathematical Association of America, 1957, pp. 359–61, ⟨https://doi.org/10.2307/2309605⟩. Acessado em 25 de agosto de 2023.

[27] NORANDO, T. & MAGNAGHI-DEFINO, P. **Witch of Agnesi: The True Story, Faces of Geometry**, Lecture Notes in Networks and Systems 88, 2019.

[28] RIBENBOIM, P. **13 Lectures on Fermat's Last Theorem,** Springer-Verlag New York Inc., 1979.

[29] ROQUE, T , CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de História da Matemática**. SBM, 2012.

[30] SVK, MACTUTOR. **Sofia Vasilyevna Kovalevsky**. MacTutor. Disponível em: ⟨https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kovalevskaya/⟩. Acessado em 25 de agosto de 2023.

[31] UNLU, E. **Maria Gaetana Agnesi. Biographies of Women Mathematicians**, 1995. Disponível em: ⟨https://www.agnesscott.edu/lriddle/women/agnesi.htm⟩. Acessado em 25 de agosto de 2023.

Daniel C. de Morais Filho
Universidade Federal de Campina Grande
<demoraisfilho@gmail.com>

Leticia Dornellas Dias
<leleluinha@hotmail.com>

Luis Filipe R. C. da Silva
<luis_filipecg@hotmail.com>

Bruna Alves da Silva Santos
<brualvees9@hotmail.com>

Recebido: 31/05/2023
Publicado: 29/09/2023