PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.11, n.3, 2023
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2023/pmo1127

Modelagem discreta através de exemplos

Humberto Luiz Talpo   Marcus Vinícius de Araújo Lima

Resumo

O sucesso de um modelo matemático depende da facilidade com que ele pode ser usado e da precisão com que ele prevê e explica o fenômeno que está sendo estudado. Este artigo ilustra, por meio de exemplos, algumas situações em que é possível descrever os fenômenos discutidos sem usar muitos pré-requisitos de matemática superior. Modelos discretos como os que são apresentados neste texto, são uma forma "natural" de pensar a modelagem matemática, tendo em vista que a observação da variação de uma quantidade que não se mantém constante, se dá em uma sequência de períodos em um processo naturalmente discretizado. Todos os modelos apresentados aqui envolvem relações de recorrência em uma ou mais variáveis em que a construção da solução é feita de modo a recair em casos mais simples, como progressões geométricas. O intuito é que esses exemplos sejam discutidos com estudantes à partir do ensino médio.

Palavras-chave: modelagem matemática; modelos discretos; relação de recorrência; equação de diferenças.

Abstract

The success of a mathematical model depends on how easily it can be used, and how accurately it predicts and how well it explains the phenomenon being studied. This paper illustrates, through examples, certain situations in which it is possible to describe the phenomena discussed without using many higher mathematical prerequisites. Models such as those presented in this text are a natural way of thinking about modeling, considering that the observation of the variation of a quantity that does not remain constant takes place in a sequence of periods in a naturally discrete way. All the models presented here imply recurrence relationships in one or more variables, and the solution is constructed in such a way as to reduce the models more simply, like geometric progression. The purpose is to share these examples with students in high school.

Keywords: mathematical modeling; discrete models; recurrence relation; difference equations.

1. Introdução

Existem muitas situações cotidianas em que modelos matemáticos utilizados para a descrição de certos fenômenos tem como variável independente uma variável discreta. Por exemplo, a taxa de juros, ainda que diária, é discreta. O custo de produção de uma determinada mercadoria pode ter várias variáveis, como quantidade de matéria prima, custo da mão de obra, tempo de produção, etc. que são discretas. De uma forma geral, a cada problema podemos associar uma ou mais variáveis discretas, dentro de um intervalo adequado.

Neste texto consideramos a variável tempo quando o intervalo de tempo é discreto. Apresentamos algumas situações/problemas em que a modelagem discreta se aplica de maneira natural. Optamos pela construção da solução a partir de elementos "básicos"com o objetivo de tornar a leitura mais "autocontida", permitindo a aplicação de vários conceitos matemáticos. Muitas das "operações matemáticas"utilizadas podem ser resolvidas com o auxílio de recursos computacionais, que são bem vindos! Explorar o processo de modelagem é mais importante (neste texto!) do que as contas propriamente ditas.

Neste "cálculo discreto", o domínio das funções são subconjuntos do conjunto dos números naturais

$$u : S \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

ou seja, são sequências e usaremos a notação u_n para representar a função $u(n)$. Algumas vezes considera-se $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sem destacar tal fato.

Exemplos de funções discretas (bem conhecidas!) são progressão aritmética (PA) e progressão geométrica (PG). Ambas funções são dadas de forma recursiva, isto é, um termo é obtido do anterior pela adição da razão, no caso de PA e pelo produto da razão no caso de PG. No entanto, a descrição destas funções através do termo geral facilita muito o estudo de suas propriedades. No caso de PA temos:

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

onde r representa a razão e u_1 o primeiro termo da sequência.

Para PG temos:

$$u_n = u_1 q^{n-1}$$

onde q representa a razão e u_1 o primeiro termo da sequência.

Nem sempre é simples obter uma "fórmula fechada", como no caso do termo geral da PA e PG, para uma função discreta dada de forma recursiva. Neste texto abordamos alguns exemplos e algumas maneiras de resolver este problema.

Vale destacar que o estudo de equações com variáveis discretas é bem consolidado, conhecido como *equações de diferenças*, que podemos associar com o caso discreto das equações diferenciais, com as devidas ressalvas. O estudo destas equações de diferenças e propriedades das suas soluções pode ajudar na obtenção da solução, mas para isso seria necessário a apresentação de alguns resultados que fogem da natureza deste texto. Para os interessados no estudo sobre as equações de diferenças sugerimos as referências [4, 6, 7, 8].

2. Exemplos de modelagem discreta

Apresentamos a seguir alguns exemplos de modelagem discreta. Apesar de modelos simplificados, eles ilustram o processo de elaboração, com informações sobre o fenômeno, utilização da linguagem matemática e construção da solução.

Absorção de medicamentos

Cada medicamento age de uma maneira diferente dentro do organismo e é igualmente metabolizado de uma maneira distinta. A posologia varia em função do paciente, da doença que está sendo tratada e do tipo de medicamento utilizado. Ela está relacionada também com o tempo de ação e a dose terapêutica, isto é, a dosagem necessária para a ação do medicamento. É muito importante respeitar posologia e intervalos orientados pelo médico, uma vez que abaixo do indicado o tratamento é ineficaz e, acima, é potencialmente tóxico.

Vamos começar com a seguinte situação problema:

A dosagem de um medicamento prescrito deve ser administrada no paciente uma vez a cada período de 8 horas por 5 dias consecutivos. Considere Q a quantidade de medicamento administrada em cada período e vamos representar por $\mathrm{D_n}$ a quantidade de medicamento acumulada no organismo no n-ésimo período. Sabendo que o próprio organismo elimina, através do metabolismo, uma certa fração p do medicamento acumulado durante cada período, vamos encontrar uma expressão para $\mathrm{D_n}$.

A quantidade de medicamento acumulada no organismo em cada período depende da quantidade existente no período anterior, da fração do medicamento que foi eliminada e da nova dose administrada, isto é, o medicamento acumulado no organismo do paciente no período n é igual a quantidade existente no período $(\mathrm{n}-1)$ menos a fração p que foi eliminada, pelo próprio organismo, adicionado da nova dosagem Q. Com isso obtemos a seguinte equação recursiva:

$$\begin{aligned} \mathrm{D_0} &= \mathrm{Q} \\ \mathrm{D_n} &= (1-\mathrm{p})\mathrm{D_{n-1}} + \mathrm{Q} \end{aligned} \tag{1}$$

para $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$. Esta equação é um exemplo de uma *Equação de Diferença*.

Podemos encontrar uma solução, que neste caso representa a quantidade de medicamento acumulada, em cada período n, resolvendo recursivamente a equação, isto é, calculamos $\mathrm{D_1}$, a partir dele obtemos $\mathrm{D_2}$ e, assim sucessivamente, até chegar em $\mathrm{D_n}$. No entanto, vamos explorar um pouco este método recursivo e tentar encontrar uma equação "fechada"para $\mathrm{D_n}$, sem a necessidade de calcular a quantidade de medicamento acumulada em cada um dos períodos. Temos que

$$\mathrm{D_1} = (1-\mathrm{p})\mathrm{D_0} + \mathrm{Q}$$

e, como $\mathrm{Q} = \mathrm{D_0}$, podemos reescrever

$$\mathrm{D_1} = (1-\mathrm{p})\mathrm{D_0} + \mathrm{D_0}.$$

Para $\mathrm{D_2}$ obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{D_2} &= (1-\mathrm{p})\mathrm{D_1} + \mathrm{D_0} \\ &= (1-\mathrm{p})\left[(1-\mathrm{p})\mathrm{D_0} + \mathrm{D_0}\right] + \mathrm{D_0} \\ &= (1-\mathrm{p})^2\mathrm{D_0} + \left[(1-\mathrm{p}) + 1\right]\mathrm{D_0}. \end{aligned}$$

No caso de $\mathrm{D_3}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{D_3} &= (1-\mathrm{p})\mathrm{D_2} + \mathrm{D_0} \\ &= (1-\mathrm{p})\left[(1-\mathrm{p})^2\mathrm{D_0} + \left[(1-\mathrm{p}) + 1\right]\mathrm{D_0}\right] + \mathrm{D_0} \\ &= (1-\mathrm{p})^3\mathrm{D_0} + \left[(1-\mathrm{p})^2 + (1-\mathrm{p}) + 1\right]\mathrm{D_0}. \end{aligned}$$

Já é possível perceber que para $\mathrm{D_n}$ teremos

$$\begin{aligned} \mathrm{D_n} &= (1-\mathrm{p})\mathrm{D_{n-1}} + \mathrm{D_0} \\ &= (1-\mathrm{p})^{\mathrm{n}}\mathrm{D_0} + \left[(1-\mathrm{p})^{\mathrm{n}-1} + \cdots + (1-\mathrm{p})^2 + (1-\mathrm{p}) + 1\right]\mathrm{D_0}. \end{aligned}$$

Olhando com atenção para a expressão

$$(1-p)^{n-1} + \cdots + (1-p)^2 + (1-p) + 1 \tag{2}$$

percebemos que ela representa a soma de n termos de uma progressão geométrica (PG), com primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = (1-p)$. É bem conhecido que a soma S_n dos n primeiros termos de uma PG, para $q \neq 1$, é dada por

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}.$$

Aplicando esta fórmula em (2) e substituindo na expressão de D_n, obtemos

$$D_n = (1-p)^n D_0 + \left[\frac{(1-p)^n - 1}{-p}\right] D_0,$$

que pode ser simplificada, substituindo D_0 por Q, em

$$D_n = \left[Q - \frac{Q}{p}\right](1-p)^n + \frac{Q}{p}. \tag{3}$$

Esta equação nos dá, de maneira direta, a quantidade de medicamento acumulada, em qualquer período, sem a necessidade dos cálculos recursivos.

Exemplo 1 (Absorção de medicamentos)**.** No problema descrito acima considere $Q = 2$ *ml* e $p = 0,25$. Qual a quantidade de medicamento acumulada no décimo período?

Solução. Utilizando a fórmula dada na Equação (3) obtemos

$$\begin{aligned} D_{10} &= \left[2 - \frac{2}{0,25}\right](0,75)^{10} + \frac{2}{0,25} \\ &= 7,662 \ ml. \end{aligned} \tag{4}$$

□

Dinâmica populacional

A ave *Rolinha-roxa*[1], que pode ser vista na figura abaixo, foi uma das primeiras espécies brasileiras a se adaptar ao meio urbano, sendo muito comum em boa parte das cidades brasileiras. Sua reprodução acontece com a postura de, geralmente, dois ovos que são chocados, em média, por duas semanas. Os filhotes são alimentados pelo casal por um período de duas semanas, quando abandonam o ninho. Quando as condições ambientais permitem, o casal inicia novamente o ciclo reprodutor, que é de aproximadamente um mês.

[1]Nome científico: Columbina talpacoti

Figura 1: Rolinha-roxa

Vamos analisar um modelo discreto para a dinâmica populacional da *rolinha-roxa*, considerando o período de um mês e dois estágios: ovos (O) e aves (A). Vamos considerar também algumas características desta espécie descritas abaixo:

- Considere que 20% das aves morrem a cada período;
- Considere que 80% dos ovos tornam-se aves;
- O número de ovos para esta espécie é de 60% da população de aves.

Denotando por $\mathrm{A_n}$ e $\mathrm{O_n}$ a quantidade de aves e de ovos no período n, respectivamente, podemos montar um sistema de equações recursivas que descreve esta dinâmica:

$$\begin{aligned} \mathrm{A_n} &= \frac{4}{5}\mathrm{A_{n-1}} + \frac{4}{5}\mathrm{O_{n-1}} \\ \mathrm{O_n} &= \frac{3}{5}\mathrm{A_{n-1}} \end{aligned}$$

Para encontrar uma "fórmula fechada" para a população de aves, a partir do método recursivo, vamos reescrever nosso sistema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A_n} \\ \mathrm{O_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 4/5 \\ 3/5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{A_{n-1}} \\ \mathrm{O_{n-1}} \end{bmatrix}.$$

Colocando

$$\mathrm{X_n} = \begin{bmatrix} \mathrm{A_n} \\ \mathrm{O_n} \end{bmatrix}, \ \mathrm{M} = \begin{bmatrix} 4/5 & 4/5 \\ 3/5 & 0 \end{bmatrix}, \ \text{e } \mathrm{X_{n-1}} = \begin{bmatrix} \mathrm{A_{n-1}} \\ \mathrm{O_{n-1}} \end{bmatrix},$$

obtemos uma equação recursiva matricial $\mathrm{X_n} = \mathrm{MX_{n-1}}$, onde $\mathrm{X_0}$ representa a população de aves e o número de ovos no instante inicial. Temos então:

$$\begin{aligned} \mathrm{X_1} &= \mathrm{MX_0} \\ \mathrm{X_2} &= \mathrm{MX_1} = \mathrm{M^2X_0} \\ &\vdots \\ \mathrm{X_n} &= \mathrm{M^nX_0}. \end{aligned}$$

Note que para encontrar uma "fórmula fechada" para A_n, nosso trabalho consiste em encontrar M^n, ou seja, a n-ésima potência da matriz M (que pode ser muito trabalhoso!). Para simplificar nosso trabalho, vamos tentar (nem sempre isso é possível!) *diagonalizar* a matriz M, isto é, encontrar uma matriz P invertível e uma matriz D diagonal, tal que

$$M = PDP^{-1}, \tag{5}$$

pois desta maneira,

$$M^n = \left(PDP^{-1}\right)^n = PD^nP^{-1}$$

e para obter a n-ésima potência de uma matriz diagonal, basta calcular a n-ésima potência dos elementos da diagonal. Multiplicando a Equação (5) por P à direita (Cuidado! Produto de matrizes não é comutativo.), obtemos

$$MP = PD. \tag{6}$$

Vamos analisar esta última equação para tentar encontrar características das matrizes P e D. Sejam

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix},$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, v_1, v_2, w_1$ e w_2 são números reais. Da Equação (6) temos

$$M \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 w_1 \\ \lambda_1 v_2 & \lambda_2 w_2 \end{bmatrix}.$$

Olhando para esta última equação podemos notar que

$$M \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \text{ e } M \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

De modo geral, para um vetor $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, queremos resolver o sistema $MU = \lambda U$, ou de modo equivalente, $(M - \lambda I_2)\, U = 0$, onde $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Como este sistema é homogêneo, ele terá uma solução não trivial se e somente se o determinante associado a matriz $(M - \lambda I_2)$ for igual a zero. Logo encontramos um método para obter (caso existam!) os números $\lambda_1, \lambda_2, v_1, v_2, w_1$ e w_2.

Resolvendo temos

$$\det(M - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} 4/5 - \lambda & 4/5 \\ 3/5 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \frac{4}{5}\lambda - \frac{12}{25},$$

cujas raízes são $\lambda_1 = -\frac{2}{5}$ e $\lambda_2 = \frac{6}{5}$. Substituindo estes valores na Equação (7), ficamos com

$$\begin{bmatrix} 4/5 & 4/5 \\ 3/5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = -\frac{2}{5} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 4/5 & 4/5 \\ 3/5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \frac{6}{5} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix},$$

que possuem como possível (existem infinitas!) solução $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Deste modo temos que as matrizes D e P são dadas por

$$D = \begin{bmatrix} -2/5 & 0 \\ 0 & 6/5 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} -2/3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculando a inversa da matriz P obtemos a diagonalização da matriz M

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4/5 & 4/5 \\ 3/5 & 0 \end{bmatrix}}_{M} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2/3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} -2/5 & 0 \\ 0 & 6/5 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} -3/8 & 3/4 \\ 3/8 & 1/4 \end{bmatrix}}_{P^{-1}}.$$

Observação 1. O polinômio obtido como determinante da matriz $(M - \lambda I_2)$ é chamado de *polinômio característico*. Os valores λ_1 e λ_2 são chamados *autovalores* associados a matriz M e os vetores $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ são chamados de *autovetores*. Estes conceitos se estendem para matrizes $n \times n$ e podem ser encontrados com mais detalhes em qualquer livro de álgebra linear, como por exemplo [3]. Existem vários *softwares* que, quando possível, diagonalizam uma matriz. Por exemplo, uma versão *online* pode ser encontrada em https://pt.symbolab.com/solver/matrix-diagonalization-calculator, acesso em 08 de maio de 2023.

Assim, voltando ao nosso problema,

$$M^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} -2/3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-2/5)^n & 0 \\ 0 & (6/5)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/8 & 3/4 \\ 3/8 & 1/4 \end{bmatrix},$$

donde segue

$$X_n = \begin{bmatrix} -2/3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-2/5)^n & 0 \\ 0 & (6/5)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/8 & 3/4 \\ 3/8 & 1/4 \end{bmatrix} X_0.$$

Explicitando A_n e O_n em termos das quantidades iniciais de aves A_0 e ovos O_0, temos

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{A_0}{4}\left[\left(\frac{-2}{5}\right)^n + 3\left(\frac{6}{5}\right)^n\right] + \frac{O_0}{2}\left[\left(\frac{6}{5}\right)^n - \left(\frac{-2}{5}\right)^n\right] \\ O_n &= \frac{3A_0}{8}\left[\left(\frac{6}{5}\right)^n - \left(\frac{-2}{5}\right)^n\right] + \frac{O_0}{4}\left[3\left(\frac{-2}{5}\right)^n + \left(\frac{6}{5}\right)^n\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Exemplo 2 (Dinâmica populacional)**.** O departamento de zoonoses da prefeitura realizou um censo de aves em uma certa região da cidade e estimou que existam 210 aves da espécie rolinha-roxa com 100 ovos nos ninhos. Com base na dinâmica populacional descrita acima, qual a quantidade de aves daqui a seis meses?

Solução. Utilizando a fórmula dada na Equação (8) para calcular A_6 obtemos:

$$A_6 = \frac{210}{4}\left[\left(\frac{-2}{5}\right)^6 + 3\left(\frac{6}{5}\right)^6\right] + \frac{100}{2}\left[\left(\frac{6}{5}\right)^6 - \left(\frac{-2}{5}\right)^6\right], \tag{9}$$

cuja aproximação para um número natural resulta em $A_6 = 620$ aves. □

Vale ressaltar que neste exemplo não estamos considerando as limitações no meio ambiente.

Dinâmica de mercado

Ser líder de mercado é (geralmente!) a meta de toda empresa. No entanto, as condições econômicas mudam, os concorrentes lançam novos produtos e os interesses e as exigências dos consumidores também mudam. Estas circunstâncias desafiadoras de mercado, com frequência, exigem que as empresas reformulem várias vezes suas estratégias de marketing e ofertas de produtos visando aumentar sua participação no mercado. Essa variação da participação das empresas no mercado, ocasionadas por essa interação/concorrência é chamada de *dinâmica de mercado*.

Vamos considerar que três empresas A, B e C, produtoras de bebidas, disputam o mercado de uma determinada cidade. Mensalmente as empresas analisam suas vendas e, dependendo da participação no mercado em relação às outras empresas, promovem campanhas publicitárias e promoções com o objetivo de "roubar" mercado das concorrentes. Denotando por $\mathrm{a_n}, \mathrm{b_n}$ e $\mathrm{c_n}$ respectivamente as porcentagens de mercado das empresas A, B e C no n-ésimo mês, suponha que a dinâmica de mercado seja dada pelo seguinte sistema recursivo

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3}b_{n-1} + \frac{2}{3}c_{n-1} \\ b_n &= \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{2}{3}b_{n-1} + \frac{1}{3}c_{n-1}, \\ c_n &= \frac{2}{3}a_{n-1} \end{aligned} \tag{10}$$

ou seja, a "fatia" de mercado de um determinado mês depende da porcentagem de mercado das empresas do mês anterior.

Como no caso da dinâmica populacional, para encontrar uma "fórmula fechada" para a porcentagem de cada empresa no mercado, a partir do método recursivo, vamos reescrever nosso sistema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Novamente, colocando

$$X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}, \ M = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ e } X_{n-1} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix},$$

obtemos uma equação recursiva matricial $\mathrm{X_n = MX_{n-1}}$, onde $\mathrm{X_0}$ representa a porcentagem de mercado de cada empresa no instante inicial. Temos então:

$$\begin{aligned} X_1 &= MX_0 \\ X_2 &= MX_1 = M^2X_0 \\ &\vdots \\ X_n &= M^nX_0 \end{aligned} \tag{11}$$

e, para simplificar um pouco nosso trabalho, vamos tentar diagonalizar (lembrando que nem sempre isso é possível!) a matriz M. Note que agora estamos com uma matriz 3×3. A ideia é a mesma, procuramos uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D, ambas de tamanho 3×3, tal que $\mathrm{M = PDP^{-1}}$.

Sejam

$$\mathrm{D}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix} \text{ e } \mathrm{P}=\begin{bmatrix}u_1 & v_1 & w_1\\ u_2 & v_2 & w_2\\ u_3 & v_3 & w_3\end{bmatrix},$$

onde $\lambda_i, u_i, v_i,$ e w_i para $i = 1, 2, 3$ são números reais. Como no caso da dinâmica populacional, queremos resolver $MP = PD$ que é equivalente a resolver um sistema linear do tipo

$$\mathrm{M}\begin{bmatrix}t_1\\ t_2\\ t_3\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}t_1\\ t_2\\ t_3\end{bmatrix}.$$

Para que este sistema possua uma solução não trivial vamos igualar à zero o determinante associado a matriz $(M-\lambda I_3)$. Resolvendo temos

$$\det(\mathrm{M}-\lambda \mathrm{I}_3)=\det\begin{bmatrix}-\lambda & 1/3 & 2/3\\ 1/3 & 2/3-\lambda & 1/3\\ 2/3 & 0 & -\lambda\end{bmatrix}=-\lambda^3+\frac{2\lambda^2}{3}+\frac{5\lambda}{9}-\frac{2}{9},$$

cujas raízes são $\lambda_1=-\dfrac{2}{3}, \lambda_2=\dfrac{1}{3}$ e $\lambda_3=1$. Como $MP = PD$ isto é,

$$\begin{bmatrix}0 & 1/3 & 2/3\\ 1/3 & 2/3 & 1/3\\ 2/3 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1 & v_1 & w_1\\ u_2 & v_2 & w_2\\ u_3 & v_3 & w_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1 & v_1 & w_1\\ u_2 & v_2 & w_2\\ u_3 & v_3 & w_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix},$$

segue que (após a resolução!) a matriz P é dada por

$$\mathrm{P}=\begin{bmatrix}-1 & 1/2 & 3/2\\ 0 & -3/2 & 5/2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

e sua inversa

$$\mathrm{P}^{-1}=\begin{bmatrix}-8/15 & 2/15 & 7/15\\ 1/3 & -1/3 & 1/3\\ 1/5 & 1/5 & 1/5\end{bmatrix}.$$

Encontramos assim a diagonalização da matriz M,

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1/3 & 2/3\\ 1/3 & 2/3 & 1/3\\ 2/3 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{\mathrm{M}}=\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 1/2 & 3/2\\ 0 & -3/2 & 5/2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}}_{\mathrm{P}}\underbrace{\begin{bmatrix}-2/3 & 0 & 0\\ 0 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\mathrm{D}}\underbrace{\begin{bmatrix}-8/15 & 2/15 & 7/15\\ 1/3 & -1/3 & 1/3\\ 1/5 & 1/5 & 1/5\end{bmatrix}}_{\mathrm{P}^{-1}}.$$

Substituindo na Equação (11) temos

$$\mathrm{X}_n=\begin{bmatrix}-1 & 1/2 & 3/2\\ 0 & -3/2 & 5/2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-2/3)^n & 0 & 0\\ 0 & (1/3)^n & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-8/15 & 2/15 & 7/15\\ 1/3 & -1/3 & 1/3\\ 1/5 & 1/5 & 1/5\end{bmatrix}\mathrm{X}_0$$

que em termos das porcentagens iniciais de cada empresa a_0, b_0 e c_0 nos dá uma fórmula "fechada"

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{a_0}{30}\left[16\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 9\right] + \frac{b_0}{30}\left[-4\left(-\frac{2}{3}\right)^n - 5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 9\right] + \frac{c_0}{30}\left[-14\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 9\right] \\
b_n &= \frac{a_0}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] + \frac{b_0}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] + \frac{c_0}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] \qquad (12) \\
c_n &= \frac{a_0}{15}\left[-8\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\right] + \frac{b_0}{15}\left[2\left(-\frac{2}{3}\right)^n - 5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\right] + \frac{c_0}{15}\left[7\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\right]
\end{aligned}
$$

Exemplo 3 (Dinâmica de mercado)**.** Com base na dinâmica descrita acima, suponha que num determinado mês a empresa A tenha 50% de participação no mercado, a empresa B tenha 30% e a empresa C, 20%, isto é, $a_0 = \frac{1}{2}$, $b_0 = \frac{3}{10}$ e $c_0 = \frac{1}{5}$. Qual será a participação da empresa B daqui a um ano?

Solução. Utilizando a fórmula dada na Equação (12) para calcular b_{12} obtemos:

$$b_{12} = \frac{\frac{1}{2}}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{12}\right] + \frac{\frac{3}{10}}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{12}\right] + \frac{\frac{1}{5}}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{12}\right] \qquad (13)$$

Efetuando as contas (com arredondamento) obtemos $b_{12} = 0,5$, ou seja, a empresa B terá 50% do mercado. □

O problema da ruína do apostador

Consideremos um jogo entre dois jogadores A e B dividido em várias rodadas independentes (o resultado de uma rodada independe do resultado de outra). O jogador A ganha cada rodada com probabilidade p, $0 < p < 1$, recebendo uma ficha do jogador B, e perde com probabilidade $q = 1 - p$, entregando uma ficha ao jogador B. Vamos considerar apenas o caso em que $p \neq q$. Considere que A começa o jogo com um número a de fichas e B começa o jogo com um número b de fichas, tendo em jogo a quantia de $a + b$ fichas, a e b números naturais. O jogo termina quando um dos jogadores for à ruína, isto é, ficar sem fichas. Este problema está na origem de muita investigação sobre probabilidades e remonta a Blaise Pascal (1623 -1662)[2].

Na situação em que A tem n fichas, $0 < n < a + b$, seja G_n a probabilidade de que o jogador A vença o jogo (atinja $a + b$ fichas) após uma série de rodadas. Apesar de não ser simples calcular a probabilidade de A vencer tendo n fichas, essa probabilidade se relaciona com as probabilidades G_{n+1} e G_{n-1} da seguinte maneira:

$$G_n = pG_{n+1} + qG_{n-1} \qquad (14)$$

A equação acima descreve o que ocorre ao final da próxima rodada se o jogador A possui $0 < n < a+b-1$ fichas: fica com $n+1$ fichas com probabilidade p ou fica com $n-1$ fichas com probabilidade q. A soma é devido aos eventos serem mutuamente exclusivos (ganha ou perde a próxima rodada) e a equação pode ser aplicada a cada rodada pois são eventos independentes. Para $n = 0$, $G_0 = 0$ (pois não pode mais apostar) e, para $n = a + b$, $G_{a+b} = 1$ (com $a + b$ fichas, A vence o jogo).

[2]Um pouco mais sobre Blaise Pascal pode ser encontrado em https://www.ebiografia.com/blaise_pascal/

Antes de proceder a resolução da equação anterior, vamos reescrevê-la, em uma forma mais adequada, para aplicar o método recursivo:

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= \frac{1}{p}G_n - \frac{q}{p}G_{n-1} \\ &= \left(\frac{p+q}{p}\right)G_n - \frac{q}{p}G_{n-1} = \left(1+\frac{q}{p}\right)G_n - \frac{q}{p}G_{n-1} \text{ (usando } p+q=1). \end{aligned}$$

Na equação de recorrência acima é preciso a informação duas últimas para determinar a próxima, por isso é chamada de um recorrência de segunda ordem (ou equação de diferença de segunda ordem).

Para $n = 1$,

$$\begin{aligned} G_2 &= \left(1+\frac{q}{p}\right)G_1 - \frac{q}{p}G_0 \\ &= \left(1+\frac{q}{p}\right)G_1 \text{ (pois } G_0 = 0). \end{aligned}$$

Para $n = 2$,

$$\begin{aligned} G_3 &= \left(1+\frac{q}{p}\right)G_2 - \frac{q}{p}G_1 \\ &= \left(1+\frac{q}{p}\right)^2 G_1 - \frac{q}{p}G_1 \\ &= \left(1+\frac{q}{p}+\frac{q^2}{p^2}\right)G_1. \end{aligned}$$

Analogamente, para $n = 3$,

$$\begin{aligned} G_4 &= \left(1+\frac{q}{p}\right)G_3 - \frac{q}{p}G_2 \\ &= \left(1+\frac{q}{p}+\frac{q^2}{p^2}\right)\left(1+\frac{q}{p}\right)G_1 - \frac{q}{p}\left(1+\frac{q}{p}\right)G_1 \\ &= \left(1+\frac{q}{p}+\frac{q^2}{p^2}+\frac{q^3}{p^3}\right)G_1. \end{aligned}$$

Usando indução finita sobre n, em geral,

$$\begin{aligned} G_n &= \left(1+\frac{q}{p}+\frac{q^2}{p^2}+\ldots+\frac{q^{n-1}}{p^{n-1}}\right)G_1. \\ &= \frac{1-(q/p)^n}{1-q/p}G_1 \text{ (usando a expressão da soma de uma P.G. finita).} \end{aligned}$$

Finalmente, como $G_{a+b} = 1$, substituindo na expressão acima, obtém-se

$$G_1 = \frac{1-q/p}{1-(q/p)^{a+b}}$$

e a solução da equação é

$$G_n = \frac{1 - (q/p)^n}{1 - (q/p)^{a+b}}$$

que é a probabilidade do jogador A vencer o jogo, estando com $0 < n < a+b-1$ fichas. Essa também é a probabilidade do jogador B perder (ruína do jogador) o jogo, estando com $1 < a+b-n < a+b$ fichas.

Exemplo 4 (Ruína do apostador)**.** Com base no modelo descrito acima, considere um jogador A com 90 fichas e um jogador B com 10 fichas. Em cada rodada, a probabilidade do jogador A vencer é de 45%. Calcular a probabilidade de A vencer o jogo se em cada rodada a aposta é de:

a) uma ficha;

b) 10 fichas.

Solução. Em cada rodada, a probabilidade do apostador vencer é $p = 0,45$ e a de perder é $q = 0,55$, $a = 90$ e $b = 10$. Assim,

a) apostando uma ficha por rodada

$$G_{90} = \frac{1 - (0,55/0,45)^{90}}{1 - (0,55/0,45)^{100}} \approx 0,1344.$$

b) apostando 10 fichas por rodada

$$G_9 = \frac{1 - (0,55/0,45)^{9}}{1 - (0,55/0,45)^{10}} \approx 0,7899.$$

Podemos observar que, apesar do jogador A ter muito mais fichas do que o jogador B, quando a aposta é de um ficha (probabilidade de mais rodadas até o final do jogo) sua probabilidade de vencer o jogo é bem menor do que quando a aposta é de 10 fichas (probabilidade de menos rodadas até o final do jogo). Desta forma, em um jogo desfavorável ao apostador (que normalmente é o caso) a ruína vem das apostas sucessivas ou para replicar o ganho obtido nas primeiras rodadas ou, pior ainda, para tentar "recuperar" a perda nas primeiras rodadas. □

3. Considerações finais

A modelagem matemática pode ser encarada como uma aplicação, com o objetivo de ilustrar conceitos e ferramentas já estudadas e que poderão ser aplicadas tanto na formulação como na resolução dos modelos, e também como uma metodologia de ensino, com o objetivo de motivar o estudo e promover a aprendizagem de conteúdos curriculares à partir de uma situação problema por meio da modelagem e resolução do modelo (ver [1] para um ensaio teórico interessante sobre essa temática). Não é preciso "separar" o aspecto aplicação do aspecto metodologia de ensino. No caso da modelagem por meio de equações de diferença realizada nos exemplos discutidos, além de conceitos e técnicas envolvendo progressões geométricas e matrizes que foram aplicadas na resolução das equações, a construção das soluções por meio da iteração das relações de recorrência pode ser explorada tanto pensando na "automatização" do processo de construção das soluções, no sentido de realizar o processo iterativo utilizando programação, como no sentido analítico, tentando identificar padrões ou aspectos da iteração que podem ser "generalizados", obtendo um método de resolução. Deixar a cargo do estudante a obtenção do método à partir de poucos exemplos, não é o esperado (nem razoável!). No entanto, introduzir um método após a "vivência" com alguns exemplos é uma estratégia didática interessante, pois ilustra bem a importância e utilidade do método, principalmente quanto à generalidade do mesmo. Provocar o estudo da matemática por meio de uma aplicação tangível a um estudante é mais um recurso didático que pode ser explorado, trazendo uma introdução mais prática e mesmo multidisciplinar de um ou mais temas. Nos problemas discutidos neste texto, é possível acrescentar uma abordagem computacional, no *GeoGebra*[3] por exemplo, para uma abordagem mais exploratória dos modelos, observar o comportamento das soluções em função da variação das constantes, "plotar"o gráfico das soluções, tentar observar o comportamento assintótico nos modelos onde se aplicar. A ideia é que as modelagens apresentadas aqui encoragem o professor do ensino médio a construir outros modelos que julgue interessantes e adequados para desenvolver com seus estudantes.

Referências

[1] Barbosa, Jonei C. *Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico.* . In: Reunião Anual da ANPED, 24., 2001, Caxambu. Anais... Rio Janeiro: ANPED, 2001.

[2] Bassanezi, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*, São Paulo, Editora Contexto, 2002.

[3] Boldrini, J. L. [et. al.] *Álgebra Linear*, 3a ed., São Paulo, Harper e Row do Brasil, 1980.

[4] Elaydi, S. *An Introduction to Difference Equations*, 3rd ed., Springer, 2005.

[5] Gonçalves, Edgard. *Rolinha-roxa.* Disponível em: <https://pixabay.com/pt/photos/rolinha-rolinhas-passarinho-passaro-2513587/>. Acesso em: 02 de fevereiro de 2023.

[6] Kelley, Walter G. and Allan C. Peterson. *Difference Equations - An Introduction With Applications.* San Diego: Academic Press, 2001.

[7] Luenberger, David. G. *Introduction to Dynamic Systems - Theory, Models and Applications.* New York: John Wiley and Sons, 1979.

[8] Saraiva, Paulo; Murteira, José *Equações de diferenças: introdução teórica e aplicações.* Imprensa da Universidade de Coimbra, 2013. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10316.2/38600>. Acesso em: 30 de janeiro de 2023.

Humberto Luiz Talpo
Universidade Federal de São Carlos
<htalpo@ufscar.br>

Marcus Vinícius de Araújo Lima
Academia da Força Aérea
<marcuslima.afa@gmail.com>

Recebido: 24/05/2023
Publicado: 23/10/2023

[3] https://www.geogebra.org/