PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.11, n.3, 2023
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2023/pmo1129

Percepção visual e pensamento geométrico sobre algumas funções trigonométricas inversas

Flank David Morais Bezerra[1]   Carlos Bocker Neto

Resumo

Neste trabalho exploramos a visualização das funções trigonométricas inversas, arco seno, arco cosseno e arco tangente sobre círculos centrados em algum ponto de um plano e de raio qualquer. Além disso, apresentamos uma lista de atividades a serem propostas em sala de aula, a fim de despertar o interesse dos estudantes sobre estas funções e aprimorar o apelo intuitivo geométrico sobre funções trigonométricas. Também exemplificamos o uso do WolframAlpha e GeoGebra como recursos computacionais no processo de ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Básico.

Palavras-chave: WolframAlpha; GeoGebra; arco seno; arco cosseno; arco tangente.

Abstract

In this work we explore the visualization of the inverse trigonometric functions, arcsine, arccosine and arctangent on circles centered on some point of a plane and of a radius fixed. In addition, we present a list of interactive teaching activities for in the interactive classroom, in order to impreviede students interest in these functions and improve the intuitive geometric appeal on trigonometric functions. We also exemplify the use of WolframAlpha and GeoGebra as computational resources in the process of teaching and learning Mathematics in Basic Education.

Keywords: WolframAlpha; GeoGebra; arcsine; arccosine; arctangent.

1. Introdução

Desde os trabalhos de Hiparco de Rhodes (c. 150 a.C.), comumente considerado um dos maiores astrônomos da antiguidade e um dos precursores do que hoje entendemos como Trigonometria, as funções definidas sobre ângulos e arcos de circunferências têm atraído cada vez mais a atenção da humanidade, veja por exemplo [6] e [9]. Um exemplo disso é a notabilidade de tópicos que abrangem a Trigonometria em praticamente todas as instâncias de ensino, desde a Educação Básica até o Ensino Superior, nos Projetos Políticos Pedagógicos e nos Projetos Acadêmicos Curriculares, veja por exemplo [1, 2, 7] e [8].

Quanto às redes sociais de internet, por exemplo, em 26 de dezembro de 2022 no 𝕏 (antigo Twitter) o professor doutor Tamás Görbe fez uma publicação sobre significado geométrico das funções arco seno e arco cosseno (veja a Figura 1 abaixo e em [3]).

[1]Parcialmente apoiado pelo CNPq/Finance Code # 303039/2021-3, Brasil.

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

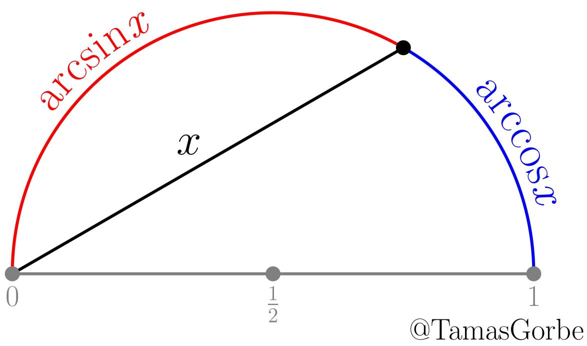

Figura 1: Figura postada pelo Prof. Görbe no $\mathbb{X}$ (antigo Twitter).

Desde então temos observado como faz falta a popularização da visualização geométrica de funções trigonométricas inversas nas notas de aula, livros, e exposições, em geral, destinadas às aulas de geometria na Educação Básica e na Educação Sueprior. Acreditamos que o apelo geométrico que essas funções possuem têm sido muito pouco explorado; é bem sabido que o manuseio algébrico com estas funções pode levar a uma técnica eficiente para computar obter propriedades dos números reais, derivadas e integrais de certas funções reais de uma variável real (ou mesmo funções complexas de uma variável complexa), dentre outras propriedades, veja por exemplo [4, 5] e [10]. Mas, algumas perguntas parecerem ser cabíveis, independente da aplicabilidade das funções trigonométricas inversas (dentro e fora da Matemática), levando em consideração apenas a percepção visual e pensamento geométrico a cerca do arco seno, arco cosseno e arco tangente:

Pergunta 1. Sejam um ponto O em um plano e $\mathrm{r} > 0$, e considere a circunferência centrada no ponto O e de raio r, $\mathcal{C}_\mathrm{r}$. Dado $\mathrm{x} \in [-1, 1]$, como visualizar o arco sobre $\mathcal{C}_\mathrm{r}$ cujo seno é igual a x ? Também, como visualizar o arco sobre $\mathcal{C}_\mathrm{r}$ cujo cosseno é igual a x?

Pergunta 2. Sejam um ponto O em um plano e $\mathrm{r} > 0$, e considere a circunferência centrada no ponto O e de raio r, $\mathcal{C}_\mathrm{r}$. Dado $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$, como visualizar o arco sobre $\mathcal{C}_\mathrm{r}$ cuja tangente é igual a x?

A figura 1 foi publicada no $\mathbb{X}$ pelo professor Görbe com a legenda *"The geometric meaning of the inverse trig functions arcsen and arccos. They are actual *arc* lengths"*, veja [3]. A referida postagem gerou mais de 60 comentários, mais de 1100 retwitter, mais de 9100 curtidas e mais de 900 mil visualizações. Um destes comentários foi do professor doutor Luca Moroni, onde ele apresenta uma prova da veracidade da ilustração ressaltando que a mesma é verdadeira uma vez que a circuferência em questão possui raio igual a $\frac{1}{2}$. Nesta direção, também nos chama a atenção o comentário do professor doutor Angel Manuel Ramos del Olmo em que ele compartilha a Figura 2 abaixo.

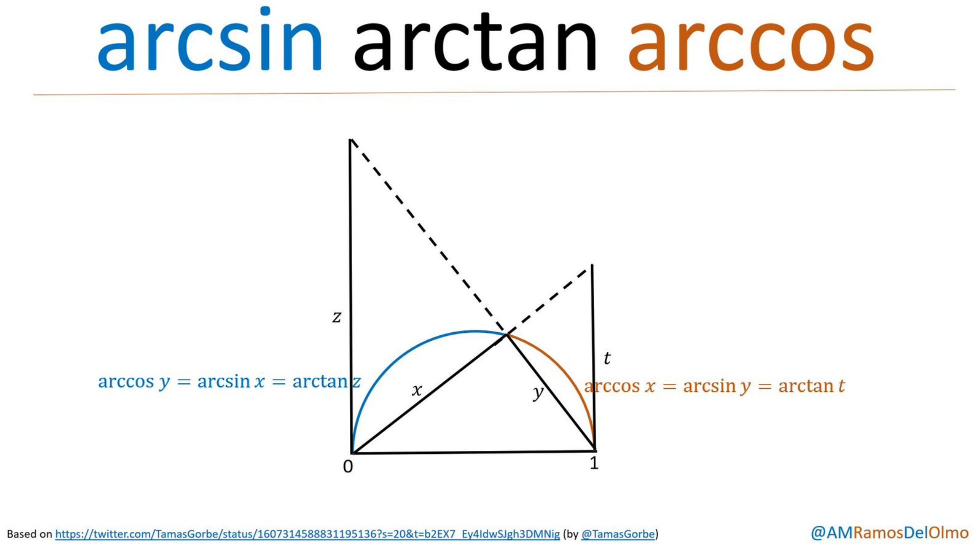

Figura 2: Figura postada pelo Prof. Del Olmo no $\mathbb{X}$ (antigo Twitter).

Também é possível encontrar uma animação da imagem na Figura 1 no depositório de projetos do GeoGebra on-line no endereço de internet: <https://www.geogebra.org/m/tfm4zzcg> de autoria do professor doutor Daniel Mentrard.

O que faremos a seguir, é explorar todos esses fatos. Para fixar nossa atenção, assumiremos o 'radiano' como sendo a unidade de medida de um ângulo. A saber, no presente artigo apresentamos também resposta à **Pergunta 1** e à **Pergunta 2**.

A estrutura do artigo é a seguinte. Na Seção 2 estudamos as funções arco seno, arco cosseno e arco tangente no círculo de raio 1. Na Seção 3 estudamos as funções arco seno, arco cosseno e arco tangente na circulo de raio $\frac{1}{2\mathrm{n}}$ com $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$. Na Seção 4 disponibilizamos endereços na internet que levam aos projetos que desenvolvemos no GeoGebra para melhor ilustrar o trabalho que desenvolvemos aqui. Por fim, na Seção 5 elencamos alguns comentários sobre o presente artigos com proposta de atividades a serem tratadas em sala de aula na Educação Básica.

2. Arco seno, arco cosseno e arco tangente no círculo trigonométrico

Nesta seção faremos uma breve revisão das funções seno, cosseno, tangente, arco seno, arco cosseno e arco tangente. Para maiores detalhes, recomendamos [4, 5] e [10].

É bem sabido que a função seno

$$\begin{aligned} \mathrm{f} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathrm{x} &\longmapsto \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{sen}(\mathrm{x}) \end{aligned}$$

não é invertível, a saber, a função seno é uma função periódica de período 2π, portanto ela não é injetora; e a sua imagem é o intervalo fechado $[-1, 1]$, portanto ela não é sobrejetora. No entanto, considerando a restrição da função seno ao intervalo fechado $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

$$\begin{aligned} f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\to [-1, 1] \\ x &\mapsto f(x) = \operatorname{sen}(x) \end{aligned}$$

observamos que ela passa a ser uma função bijetora, uma vez que o seno de um ângulo $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ corresponde a ordenada do ponto de interseção da circunferência de centro na origem e raio unitário com a semirreta que forma ângulo x com o semi-eixo positivo das abscissas. Para esses ângulos há uma bijeção entre os pontos da semi-circunferência e o intervalo $[-1, 1]$. Com isso, podemos considerar a sua função inversa

$$\begin{aligned} f^{-1} : [-1, 1] &\to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen}(x) \end{aligned}$$

esta é a chamada função arco seno, e para cada $x \in [-1, 1]$, ‘arcsen(x)’ significa o “o arco cujo seno é x”. A função arco seno possui a seguinte propriedade

$$\forall x \in [-1, 1],\ \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x)) = x,$$

e

$$\forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(y)) = y.$$

Da mesma forma, é sabido que a função cosseno

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \cos(x) \end{aligned}$$

não é invertível, a saber, a função seno é uma função periódica de período 2π, portanto ela não é injetora; e a sua imagem é o intervalo fechado $[-1, 1]$, portanto ela não é sobrejetora. No entanto, considerando a restrição da função cosseno ao intervalo fechado $[0, \pi]$

$$\begin{aligned} f : [0, \pi] &\to [-1, 1] \\ x &\mapsto f(x) = \cos(x) \end{aligned}$$

observamos que ela passa a ser uma função bijetora, uma vez que o cosseno de um ângulo $x \in [0, \pi]$ corresponde a abscissa do ponto de interseção da circunferência de centro na origem e raio unitário com a semirreta que forma ângulo x com o semi-eixo positivo das abscissas. Para esses ângulos há uma bijeção entre os pontos da semi-circunferência e o intervalo $[-1, 1]$. Com isso, podemos considerar a sua função inversa

$$\begin{aligned} f^{-1} : [-1, 1] &\to [0, \pi] \\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \arccos(x) \end{aligned}$$

esta é a chamada função arco cosseno, e para cada $x \in [-1, 1]$, ‘arccos(x)’ significa o “o arco cujo cosseno é x”. A função arco cosseno possui a seguinte propriedade

$$\forall x \in [-1, 1],\ \cos(\arccos(x)) = x,$$

e

$$\forall y \in [0, \pi],\ \arccos(\cos(y)) = y.$$

Desta forma, considerando a restrição da função cosseno ao intervalo fechado $[0, \pi]$

$$\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

podemos considerar a sua função inversa

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi].$$

Propriedades:

1. $\text{arcsen}(-1) = -\frac{\pi}{2}$;
2. $\text{arcsen}(0) = 0$;
3. $\text{arcsen}(1) = \frac{\pi}{2}$;
4. $\arccos(-1) = \pi$;
5. $\text{arcsen}(0) = \frac{\pi}{2}$;
6. $\text{arcsen}(1) = 0$.

Para maiores detalhes, sugerimos os livros [4, 5] e [10].

Agora, trazendo à tona círculos de raio $r > 0$ podemos aprimorar o nosso apelo intuitivo geométrico a cerca destas funções. Inicialmente, consideremos o círculo trigonométrico $\mathcal{C}$, círculo centrado na origem do plano cartesiano de raio 1. Considere também $x \in [-1, 1]$ e os pontos no plano cartesiano $P = (x, 0)$, $A = (1, 0)$ e $B = (0, x)$, como na Figura 3 abaixo. A partir daí, defina o ponto $C \in \mathcal{C}$ como sendo o ponto que satisfaz as seguintes propriedades:

Propriedade 1. O ponto C é a interseção da reta que passa pelo B e é paralela à reta que passa pelos pontos $O = (0, 0)$ e P com a circunferência centrada na origem do plano cartesiano e de raio 1

Propriedade 2. O ponto C é a segunda extremidade do arco de circunferência de $\mathcal{C}$ cuja primeira extremidade é o ponto A obtido considerando o sentido anti-horário se $x \in [0, 1]$ e o sentido horário se $x \in [-1, 0]$;

Defina o ponto $D \in \mathcal{C}$ como sendo o ponto que satisfaz as seguintes propriedades:

Propriedade 3. O ponto D é a de interseção da reta que passa pelo P e é paralela à reta que passa pelos pontos $O = (0, 0)$ e B com a circunferência centrada na origem do plano cartesiano e de raio 1

Propriedade 4. O ponto D é a segunda extremidade do arco de circunferência de $\mathcal{C}$ cuja primeira extremidade é o ponto A obtido considerando o sentido anti-horário;

O comprimento dos arcos do círculo trigonométrico $\widehat{AC}$ e $\widehat{AD}$ satisfazem as relações

$$\text{arcsen}(x) = \begin{cases} \widehat{AC}, & \text{se } x \in [0, 1], \\ \widehat{AC'}, & \text{se } x \in [-1, 0], \end{cases}$$

e

$$\arccos(x) = \begin{cases} \widehat{AD}, & \text{se } x \in [0,1], \\ \widehat{AD'}, & \text{se } x \in [-1,0], \end{cases}$$

Perceba também que se $x \in [0,1]$ então

$$\widehat{AE} = \operatorname{arcsen}(x)$$

e

$$\widehat{C'F} = \arccos(-x).$$

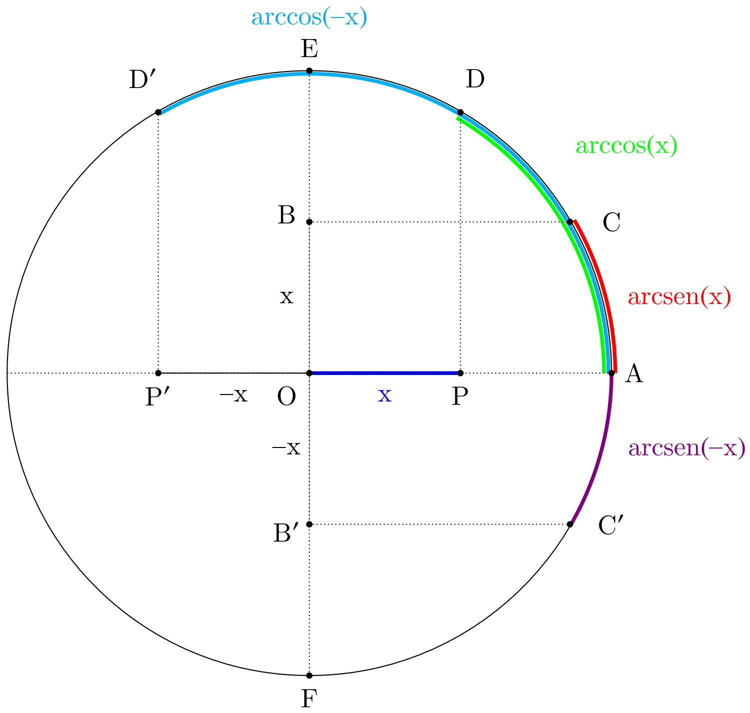

Figura 3: Arco seno e arco cosseno no círculo trigonométrico e $x \in [0,1]$.

Por fim, é bem sabido que a função tangente

$$f : \left\{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \tan(x)$$

não é invertível, a saber, a função tangente é uma função periódica de período π, portanto ela não é injetora. No entanto, ela é uma bijeção, quando restrita a cada intervalo da forma $(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{3\pi}{2}+k\pi)$, para cada $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, considerando a restrição da função tangente ao intervalo aberto $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \tan(x)$$

observamos que ela passa a ser uma função bijetora, uma vez que a tangente de um ângulo $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ corresponde a ordenada do ponto de interseção entre a semirreta perpendicular ao eixo das abscissas que passa pelo ponto $(1, 0)$ e a semirreta que forma ângulo x com o semi-eixo positivo das abscissas. Para esses ângulos há uma bijeção entre os pontos da semi-circunferência e as ordenadas da reta perpendicular mencionada anteriormente. Com isso, podemos considerar a sua função inversa

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \arctan(x) \end{aligned}$$

esta é a chamada função arco tangente, e a função arco tangente possui a seguinte propriedade

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan(x)) = x,$$

e

$$\forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ \arctan(\tan(y)) = y.$$

Analogamente, observamos que a função cotangente é uma bijeção de $(0, \pi)$ em $\mathbb{R}$ e definimos a sua inversa, chamada função arco cotangente, por

$$\begin{aligned} \mathrm{arccotan} : \mathbb{R} &\to (0, \pi) \\ x &\mapsto y = \mathrm{arccotan}(x) \end{aligned}$$

onde $y \in (0, \pi)$ é o único elemento tal que $\mathrm{cotan}(y) = x$. Para maiores detalhes, sugerimos os livros [4, 5] e [10].

Agora, trazendo à tona círculos de raio $r > 0$ podemos aprimorar o nosso apelo intuitivo geométrico a cerca destas funções. Inicialmente, consideremos o círculo trigonométrico $\mathcal{C}$, círculo centrado na origem do plano cartesiano de raio 1. Considere também $x \in \mathbb{R}$ e os pontos no plano cartesiano $P = (1, x)$ e $A = (1, 0)$, como na Figura 4 abaixo. A partir daí, defina o ponto $B \in \mathcal{C}$ como sendo o ponto que satisfaz a seguinte propriedade:

Propriedade. O ponto B é a de interseção da reta que passa pelos pontos $O = (0, 0)$ e P com a circunferência centrada na origem do plano cartesiano e de raio 1.

O comprimento dos arcos do círculo trigonométrico $\widehat{AB}$ e $\widehat{AB'}$ satisfazem as relações

$$\arctan(x) = \begin{cases} \text{comprimento de } \widehat{AB}, & \text{se } x \geqslant 0, \\ -(\text{comprimento de } \widehat{AB'}), & \text{se } x \leqslant 0, \end{cases}$$

Em todo caso, não é difícil ver que $\mathrm{arccotan}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

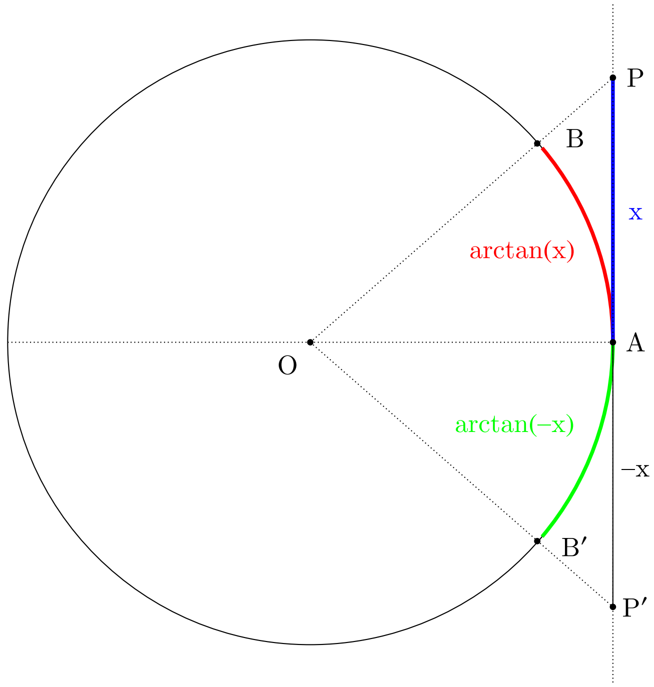

Figura 4: Arco tangente no círculo trigonométrico e $x \geqslant 0$.

3. Arco seno, arco cosseno e arco tangente no círculo de raio $1/2n$

De volta ao círculo de raio $\frac{1}{2}$, talvez a modificação do professor Görbe tenha sido a conhecida identidade

$$\arccos(x) + \operatorname{arcsen}(x) = \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

a qual é verdadeira desde que $-1 \leqslant x \leqslant 1$. O leitor pode checar essa identidade para alguns valores de x usando, por exemplo, <https://www.wolframalpha.com>.

3.1. Arco seno e arco cosseno

No que segue formularemos o problema associado a identidade (1) sobre uma circunferência centrada em um ponto O de um plano e de raio $r > 0$.

Teorema 1. *Sejam $\mathcal{C}_r$ uma circunferência centrada em um ponto* O *de um plano e de raio* $r > 0$, $\overline{AC}$ *um diâmetro desta circunferência e* $\overline{AB}$ *uma corda desta circunferência de comprimento* x ($0 \leqslant x \leqslant 2r$)*, conforme a Figura 5 abaixo. Então o comprimento dos arcos desta circunferência* $\widehat{AB}$ *e* $\widehat{BC}$ *satisfazem as seguintes relações:*

$$\widehat{AB} = 2r \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2r}\right), \tag{2}$$

e

$$\widehat{BC} = 2r \arccos\left(\frac{x}{2r}\right). \tag{3}$$

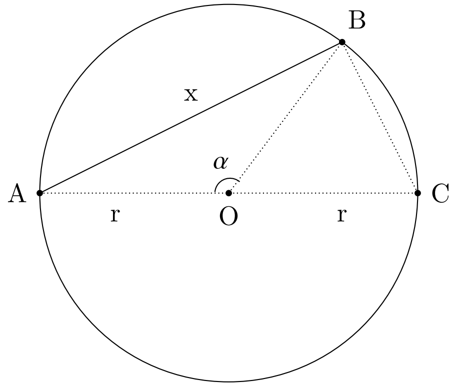

Figura 5: Arco seno e arco cosseno no círculo de raio $\frac{1}{2}$ e $\mathrm{x} \in [0,1]$.

Demonstração. É bem sabido que se $\angle \mathrm{AOB} = \alpha$, então $\angle \mathrm{BOC} = \pi - \alpha$, $\angle \mathrm{BAO} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ e

$$\cos \angle \mathrm{BAO} = \frac{\mathrm{x}}{2\mathrm{r}}.$$

Com isso

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\mathrm{x}}{2\mathrm{r}} &\Leftrightarrow \mathrm{x} = 2\mathrm{r} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \alpha = 2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{\mathrm{x}}{2\mathrm{r}}\right), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\mathrm{x}}{2\mathrm{r}} &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \arccos\left(\frac{\mathrm{x}}{2\mathrm{r}}\right) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{r}(\pi - \alpha) = 2\mathrm{r} \arccos\left(\frac{\mathrm{x}}{2\mathrm{r}}\right). \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\widehat{\mathrm{AB}} = \mathrm{r}\alpha = 2\mathrm{r} \operatorname{arcsen}\left(\frac{\mathrm{x}}{2\mathrm{r}}\right),$$

e

$$\widehat{\mathrm{BC}} = \mathrm{r}(\pi - \alpha) = 2\mathrm{r} \arccos\left(\frac{\mathrm{x}}{2\mathrm{r}}\right).$$

e o resultado segue. □

Sob as mesmas condições do Teorema 1, considere $\mathrm{r} = \frac{1}{2}$, fixe um semiplano fechado cuja fronteira é a reta única que contém o diâmetro $\overline{\mathrm{AC}}$, e a seguinte a relação biunívoca entre as cordas da circunferência $\mathcal{C}_{1/2}$ com uma das extremidades sendo o ponto A sobre esta circunferência e o intervalo $[-1, 1]$, definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \{\overline{\mathrm{AB}}; \mathrm{B} \in \mathcal{C}_2\} &\to (-1, 1] \\ \overline{\mathrm{AB}} &\mapsto \begin{cases} \mathrm{x} \in [0,1], & \text{se } \textbf{Propriedade 1}, \\ -\mathrm{x} \in (-1, 0), & \text{se } \textbf{Propriedade 2}, \end{cases} \end{aligned}$$

onde

Propriedade 1. Se o arco de circunferência $\widehat{AB}$ está contida no semiplano fixado fechado acima e o segmento de reta $\overline{AB}$ mede x;

Propriedade 2. Se o arco de circunferência $\widehat{AB}$ não está contida no semiplano fechado fixado acima e o segmento de reta $\overline{AB}$ mede x.

Com isso, para $r = \frac{1}{2}$ em (2) e (3), obtemos (1) (desde que $x \in [-1, 1]$) e visualmente a Figura 6 abaixo.

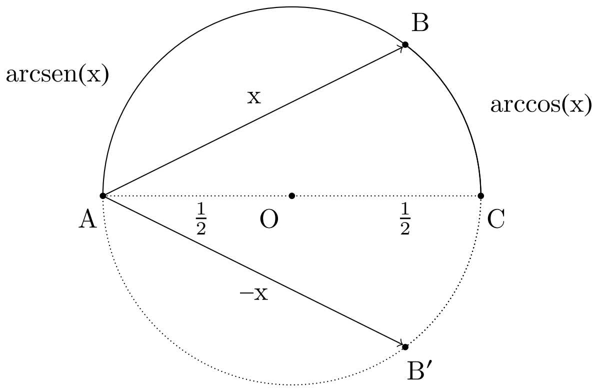

Figura 6: Arco seno e arco cosseno com $r = \frac{1}{2}$ e $x \in (-1, 1]$.

Corolário 1. *Considere uma circunferência centrada em um ponto* O *de um plano e de raio* $\frac{1}{2n}$ *com* $n \in \mathbb{N}$, *um diâmetro* $\overline{AC}$ *desta circunferência e* $x \in [0, 1]$. *Considere também o arco de circuferência* $\widehat{AB}$ *de modo que as cordas* $\overline{B_jB_{j+1}}$ *da circunferência* $\mathcal{C}_{1/2n}$ *tenham mesmo comprimento, e todas sejam de comprimento igual a* $\frac{x}{n}$, *onde* $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $B_0 = A$ *e* $B_n = B$, *conforme a Figura 7 abaixo. Então, o comprimento do arco desta circunferência* $\widehat{AB}$ *satisfaz a seguinte relação:*

$$\widehat{AB} = \text{arcsen}(x). \tag{4}$$

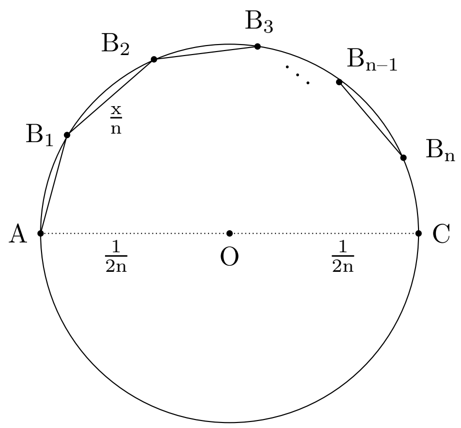

Figura 7: Arco seno e arco cosseno no círculo de raio $\frac{1}{2n}$ e $x \in [0, 1]$.

Demonstração. Graças ao Teorema 1 o arco de circunferência $\widehat{B_0B_1}$ é tal que

$$\widehat{B_0B_1} = \frac{1}{n}\operatorname{arcsen}(x).$$

Consequentemente

$$\widehat{B_jB_{j+1}} = \frac{1}{n}\operatorname{arcsen}(x)$$

e usando o caminho poligonal definido pela colagem justaposta dos segmentos de reta $\overline{B_jB_{j+1}}$ inscrito na circunferência $C_{1/2n}$ a identidade em (4) é válida. □

Um argumento análogo ao do Corolário 1 pode ser usado para obter um resultado como o do Corolário 1 quando a circunferência possui raio da forma $\frac{1}{2n+1}$ com $n \in \mathbb{N}$.

3.2. Arco tangente

Inicialmente, recordemos que a identidade

$$\operatorname{arccotan}(x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \tag{5}$$

é verdadeira seja qual for $x \in \mathbb{R}$. O leitor pode checar essa identidade para alguns valores de x usando, por exemplo, <https://www.wolframalpha.com>.

Agora, uma pergunta a ser respondida é: como identificar um arco de circunferência na Figura 5 acima associado com $\arctan\left(\frac{x}{2r}\right)$? Para responder essa pergunta, novamente, consideremos a circunferência centrada em um ponto O de um plano e de raio $r > 0$ e $x \geqslant 0$. Em seguinda, considere a seguinte agenda dividida em três etapas:

Primeiro: considere uma reta tangente t à circuferência C_r no ponto B;

Segundo: considere o segmento de reta pertencente à t de comprimento $\frac{x}{2r}$ cuja ponto médio é o ponto B;

Terceiro: considere dois segmento de reta com extremidades no ponto O cuja outras extremidades são pontos extremos do segmento de reta obtido na Segunda etapa desta agenda, denote estes pontos por E e F, conforme a Figura 8 abaixo.

Teorema 2. *Seja $\mathcal{C}_r$ uma circunferência centrada em um ponto O de um plano de raio $r > 0$ e $\overline{AC}$ um diâmetro desta circunferência. Seja $x \geqslant 0$, conforme a Figura 8 abaixo. Então o comprimento dos arcos desta circunferência $\widehat{CG}$ e $\widehat{GA}$ satisfazem as seguintes relações:*

$$\widehat{CG} = 2r \arctan\left(\frac{x}{2r}\right). \tag{6}$$

e

$$\widehat{GA} = 2r\,\mathrm{arccotan}\left(\frac{x}{2r}\right). \tag{7}$$

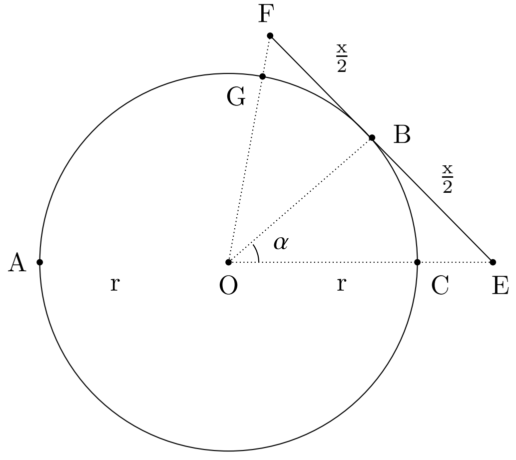

Figura 8: Arco tangente no círculo de raio $r > 0$ e $x \geqslant 0$.

Demonstração. Segue do fato de que ambos os triângulos ΔOBE e ΔOBF são retângulos com catetos medindo r e $\frac{x}{2}$. Consequentemente, se $\angle COB = \alpha$

$$\widehat{CG} = 2\alpha r = 2r \arctan\left(\frac{x}{2r}\right)$$

e

$$\widehat{GA} = (\pi - \alpha)r = 2r\ \mathrm{arccotan}\left(\frac{x}{2r}\right).$$

□

Com isso, para $r = \frac{1}{2}$ em (6), obtemos

$$\widehat{CG} = \arctan(x)$$

e

$$\widehat{GA} = \mathrm{arccotan}(x)$$

(desde que $x \geqslant 0$) e visualmente a Figura 9 abaixo.

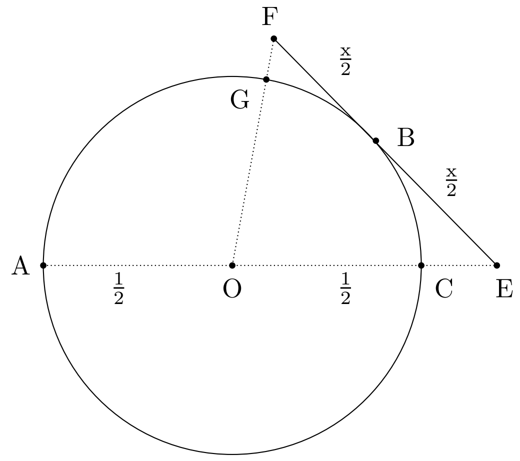

Figura 9: Arco tangente no círculo de raio $\frac{1}{2}$ e $x \geqslant 0$.

Corolário 2. *Considere uma circunferência centrada em um ponto* O *de um plano e de raio* $\frac{1}{2n}$ *com* $n \in \mathbb{N}$*, um diâmetro* $\overline{AC}$ *desta circunferência e* $x \in [0, 1]$*. Considere também o arco de circuferência* $\widehat{AB}$ *de modo que os segmentos de reta* $\overline{B'_j B'_{j+1}}$ *sejam tais que o ponto médio destes segmentos pertençam a circunferência* $\mathcal{C}_{1/2n}$*, e todas sejam de comprimento igual a* $\frac{x}{n}$*, onde* $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$*,* B'_j, O *e* $B_j \in \mathcal{C}_{2n}$ *sejam colineares, seja qual for* $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ *com* $A = B_0$*, conforme a Figura 10 abaixo. Então, o comprimento do arco desta circunferência* $\widehat{AB}$ *satisfaz a seguinte relação:*

$$\widehat{AB} = \arctan(x). \tag{8}$$

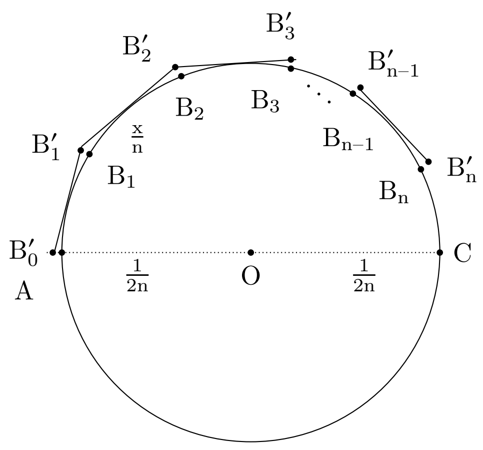

Figura 10: Arco tangente no círculo de raio $\frac{1}{2n}$ e $x \in [0, 1]$.

Demonstração. Graças ao Teorema 2 o arco de circunferência $\widehat{B_0B_1}$ é tal que

$$\widehat{B_0B_1} = \frac{1}{n}\arctan(x).$$

Consequentemente

$$\widehat{B_j B_{j+1}} = \frac{1}{n}\arctan(x)$$

e usando o caminho poligonal definido pela colagem justaposta dos segmentos de reta $\overline{B'_j B'_{j+1}}$ circunscrito na circunferência $\mathcal{C}_{1/2n}$ a identidade em (8) é válida. $\square$

Um argumento análogo ao do Corolário 2 pode ser usado para obter um resultado como o do Corolário 2 quando a circunferência possui raio da forma $\frac{1}{2n+1}$ com $n \in \mathbb{N}$.

4. Auxílio do GeoGebra

O GeoGebra Clássico, encontrado no endereço da internet: <https://www.geogebra.org> pode ser entendido como um aplicativo computacional de acesso livre de Matemática dinâmica definido por pacote gratuito de aplicativos on-line capaz de permitir o uso e produção de gráficos de funções em 2D e 3D, manipulações algébricas de expressões, manipulações estatísticas de expressões, manipulações de curvas em 2D e 3D, cálculo de probabilidades, uso e produção de animações, dentre outras ferramentas.

Usando o GeoGebra disponibilizamos animações para ilustrar o arcsen(x) e arccos(x), sejam qual for $x \in [-1, 1]$, sobre uma circunferência centrada em um ponto O de um plano de raio $r > 0$. Animações pode ser encontrada no endereço da internet: <https://www.geogebra.org/m/cvurfffu>.

Em particular, usando o GeoGebra disponibilizamos animações para ilustrar o arcsen(x) e arccos(x), sejam qual for $x \in [-1, 1]$, sobre uma circunferência centrada em um ponto O de um plano de raio $\frac{1}{2}$. Animações pode ser encontrada no endereço da internet: <https://www.geogebra.org/m/zv2fy9zs>. A seguir, exibimos ilustrações dessa animação.

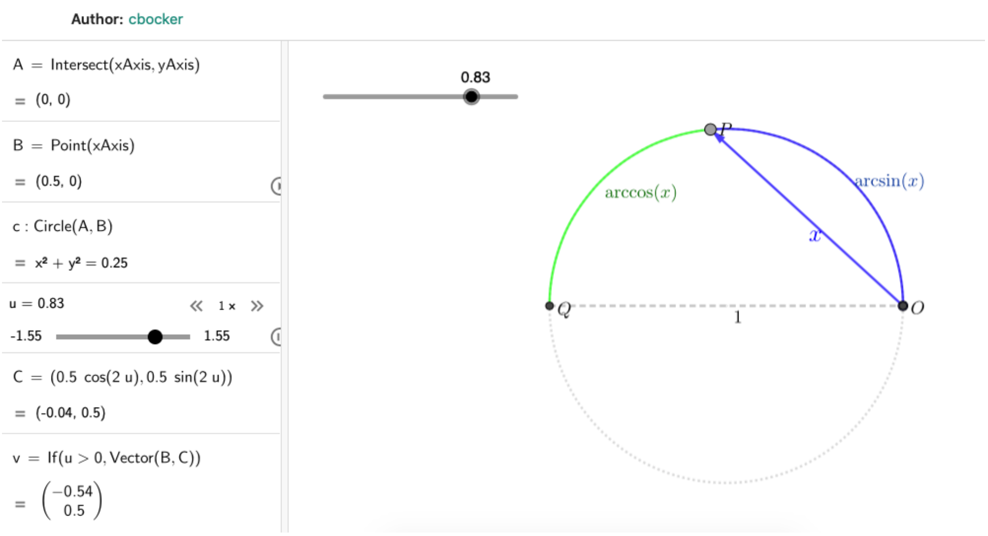

Figura 11: Figura de autoria própria gerada com o GeoGebra e $x \in [0, 1]$.

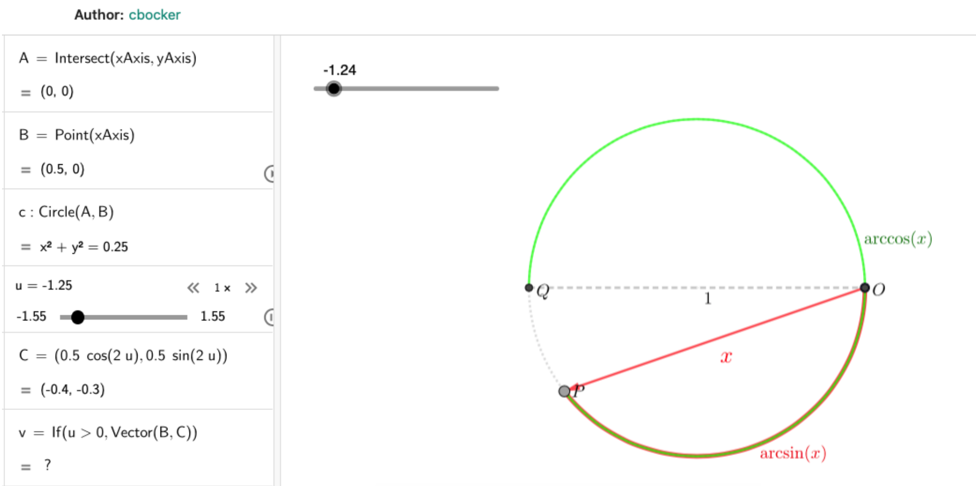

Figura 12: Figura de autoria própria gerada com o GeoGebra e $x \in [-1, 0]$.

Usando o GeoGebra disponibilizamos animações para ilustrar o arctan(x) e arccotan(x), sejam qual for $x \in \mathbb{R}$, sobre uma circunferência centrada em um ponto O de um plano de raio $\frac{1}{2}$. Animações pode ser encontrada no endereço da internet: <https://www.geogebra.org/classic/zea9vzce>. A seguir, exibimos ilustrações dessa animação.

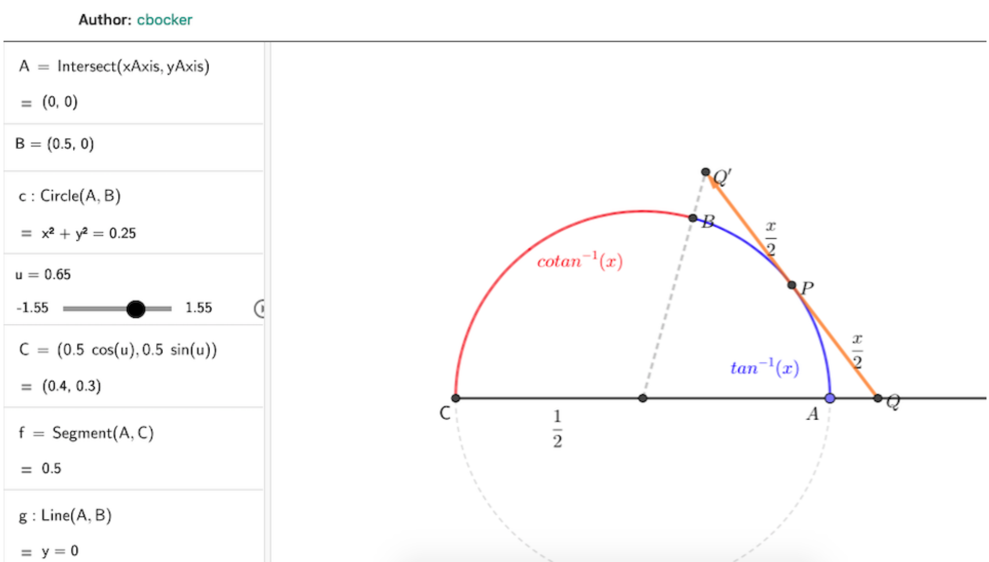

Figura 13: Figura de autoria própria gerada com o GeoGebra e $x \geqslant 0$.

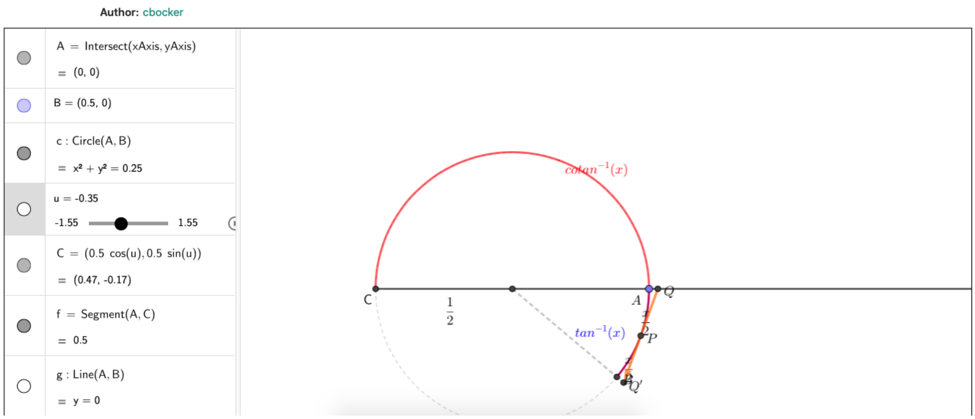

Figura 14: Figura de autoria própria gerada com o GeoGebra e x $\leqslant$ 0.

5. Comentários Finais

1. Considerando uma circunferência centrada na origem do plano cartesiano e de raio r = $\frac{1}{n}$ com n $\in \mathbb{N}$, como ilustrar arcsen(x), arccos(x) e arctan(x) sobre esta circunferência seja qual for x $\in [-1, 1]$? Neste artigo, apresentamos resposta à essa pergunta para alguns casos. No entanto, acreditamos que a mesma pergunta pode ser reproduzida em sala de aula na Educação Básica, a fim de que respostas diferentes sejam apresentadas seja qual for o caso.

2. Considerando uma circunferência centrada na origem do plano cartesiano e de raio r = $\frac{1}{n}$ com n $\in \mathbb{N}$, como ilustrar arcsec(x) (arco cuja secante é x), arccosec(x) (arco cuja cosecante é x) e arccotan(x) (arco cuja cotangente é x) sobre esta circunferência seja qual for x $\in [-1, 1]$? Neste artigo, também apresentamos resposta à essa pergunta para alguns casos. No entanto, acreditamos que a mesma pergunta pode ser reproduzida em sala de aula na Educação Básica, a fim de que respostas diferentes sejam apresentadas seja qual for o caso. Devemos tratar deste problema em trabalhos futuros.

3. Uma atividade a ser proposta em sala de com o auxílio do GeoGebra é a reprodução dos resultados mencionados acima em formato de animação.

Agradecimentos

O primeiro autor agradece à Aurora S. Bezerra e Solange S. Santos pelo apoio constante sempre o que ele decide iniciar um novo projeto de pesquisa. O segundo autor agradece à Ronally Dantas e Lucas Bocker pela paciência e todo o apoio na realização desse projeto.

Referências

[1] L. H. C. Braz, G. T. Castro e P. M. Oliveira, O GeoGebra no estudo das funções trigonométricas: uma experiência em um minicurso com alunos do 2º ano do Ensino Médio, Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, v. 8, n. 1 (2019) 70–84.

[2] C. S. Brito, D. H. da Luz e J. E. A. Duarte, Estudo da Trigonometria no 11o. Ano Com Recurso ao Software Geogebra, Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, v. 7, n. 1 (2018) 65–80.

[3] T. Görbe, Postagem do $\mathbb{X}$ (antigo Twitter) em 26 de dezembro de 2022. Disponível em <https://twitter.com/TamasGorbe/status/1607314588831195136>. Acesso em: 22 de agosto de 2023.

[4] L. H. Guidorizzi, Um curso de Cálculo, Volume 1, 5a. Edição, Editora LTC, 2013.

[5] E. L. Lima, Curso de análise, volume 1, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1976.

[6] R. C. S. Ortega e M. Sano, Provas sem palavras: uma ponte entre a intuição e a linguagem matemática, PMO v.8, n.4, (2020), 440–461.

[7] R. O. Reis Jr. e E. S. Silva, Funções trigonométricas e números complexos: uma abordagem possível na Educação Básica, Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, v. 4, n. 2, (2015), 88–102.

[8] R. O. Reis Jr., E. D. Bernardes e M. S. Reis, Ensino e aprendizagem da trigonometria com o auxílio do software GeoGebra, Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, v. 7, n. 2, (2018), 03–28.

[9] M. Rodrigues e N. Barroso, Trigonometria Indiana: o método das diferenças, as séries de potências do seno, cosseno, e as estimativas de π, PMO v.8, n.4 (2020), 422–439.

[10] J. Stewart, Cálculo, Tradução da 7a edição norte-americada, Volume 1, Trilha, Cenage Learning, 2016.

Flank David Morais Bezerra
Universidade Federal da Paraíba
<flank@mat.ufpb.br>

Carlos Bocker Neto
Universidade Federal da Paraíba
<carlos.bocker@academico.ufpb.br>

Recebido: 01/09/2023
Publicado: 06/11/2023