

Dualidade: construção do tetraedro triakis a partir do tetraedro truncado via mediatrizes

Maxwell Aires da Silva 

Gustavo da Silva Araújo¹ 
Cabral 

Állisson Henrique Leite

Resumo

Este estudo tem como propósito realizar uma análise geométrica e analítica do fenômeno da dualidade relacionado aos poliedros de Arquimedes e aos poliedros de Catalan, mais especificamente, o tetraedro truncado (um poliedro arquimediano) e o tetraedro triakis (um poliedro catalaniense). Existe um algoritmo que possibilita a construção de um poliedro Q , que é dual ao poliedro P , utilizando a noção de inversão em relação a uma esfera. Apresentaremos um método que simplifica a construção do sólido catalaniense a partir de um sólido arquimediano, utilizando as mediatrizes das arestas do tetraedro truncado. Em outras palavras, nosso método construtivo dispensa a necessidade de uma esfera e dos demais elementos requeridos no algoritmo mencionado.

Palavras-chave: Poliedros; Dualidade; Mediatrizes

Abstract

This study aims to perform a geometric and analytical analysis of the duality phenomenon related to the Archimedean polyhedra and the Catalan polyhedra, more specifically, the truncated tetrahedron (an Archimedean polyhedron) and the triakis tetrahedron (a Catalan polyhedron). There is an algorithm that allows the construction of a polyhedron Q , which is dual to the polyhedron P , using the concept of inversion with respect to a sphere. We will present a method that simplifies the construction of the Catalan solid from an Archimedean solid, using the mediatrices of the edges of the truncated tetrahedron. In other words, our constructive method does not require the use of a sphere or the other elements required in the mentioned algorithm.

Keywords: Polyhedra; Duality; Mediatrices

1. Introdução

Registros de objetos, gravuras e esculturas em formato de poliedros reforçam a ideia de que os estudos sobre esses sólidos geométricos remontam a uma parte muito antiga da história da humanidade. Ainda na Grécia antiga, os pitagóricos já tinham conhecimento sobre esse tipo de figura espacial. **Platão** (428/427 a.C. - 348/347 a.C.), inclusive, observava os poliedros sob uma perspectiva filosófica, atribuindo a cada um dos quatro elementos primordiais da natureza (terra, água, ar

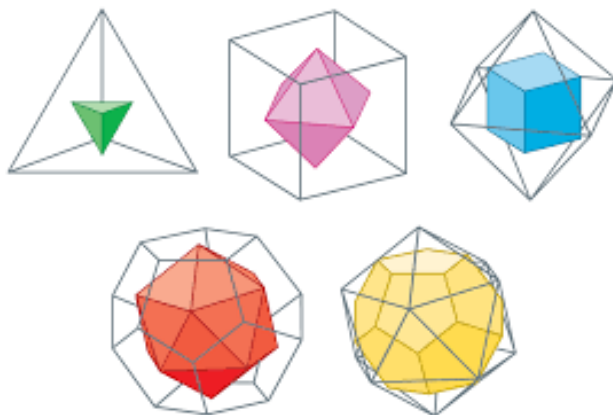
¹Apoiado pela Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado da Paraíba (Fapesq), Termo de Outorga n° 3024/2021.

e fogo) um poliedro regular correspondente. Nesse contexto, o cosmos era associado ao dodecaedro regular. Tempos depois, **Euclides** (360 a.C. - 295 a.C.) publicou na sua famosa obra *Os Elementos* uma abordagem sobre os poliedros regulares. Apenas no século III a.C., **Arquimedes** (287 a.C. - 212 a.C.) construiu poliedros semirregulares (faces poligonais regulares de mais de uma natureza) a partir dos cinco poliedros regulares convexos. Além dos cinco poliedros regulares, é conhecido que existem somente treze poliedros semirregulares: os poliedros de Arquimedes.

Uma relação de dualidade entre poliedros foi definida pelo matemático e físico **Johannes Kepler** (1571 - 1630) e publicada no seu livro *A Harmonia dos Mundos*, em 1619. Segundo Kepler, chama-se poliedros duais aos poliedros em que um se encontra inscrito no outro, de tal forma que os vértices de um coincidem com os centros das faces do outro. Contudo, o sistema idealizado por ele se limitava à classe dos poliedros regulares e a outras classes específicas, como a dos antiprismas, cujos duais correspondem aos trapezoedros ou deltoedros. Nessas classes de poliedros, a inscrição e a circunscrição mútua dos sólidos acontecia de maneira natural, satisfazendo as condições de dualidade percebida por Kepler.

A figura a seguir estabelece a dualidade existente entre os poliedros regulares na perspectiva definida por Kepler:

Figura 1: Dualidade segundo Kepler



Fonte:

<https://silو.tips/download/escola-secundaria-de-alberto-sampaio-ficha-informativa-formativa-poliedros-duais>

A proposta de Kepler para a definição de dualidade de poliedros é precisa quando aplicada aos poliedros regulares, mas não se aplica a poliedros convexos em geral. Vê-se, portanto, a necessidade de apresentar uma definição que abranja a dualidade em todos os casos possíveis. Podemos, de fato, definir poliedros duais de uma maneira mais geral (ver [3]).

Definição 1 (Poliedros duais). Diz-se que dois poliedros convexos P e Q são duais um do outro se existe uma bijeção φ da família de vértices e faces de P na família de vértices e faces de Q , que possui as seguintes propriedades:

- (1) Se V é um vértice de P , então $\varphi(V)$ é uma face de Q ;
- (2) Se F é uma face de P , então $\varphi(F)$ é um vértice de Q ;
- (3) V é vértice da face F de P se, e somente se, $\varphi(F)$ é vértice da face $\varphi(V)$ de Q .

Por exemplo, os sólidos de Catalan são uma família de poliedros gerados como os poliedros duais dos sólidos de Arquimedes. O tetraedro triakis (sólido de Catalan), por exemplo, é o dual do tetraedro truncado (sólido de Arquimedes). Abaixo, apresentamos as definições desses objetos.

Definição 2 (Sólidos de Arquimedes). Chama-se sólidos de Arquimedes aos poliedros convexos que satisfazem as seguintes condições:

- (1) Todas as suas faces são formadas por polígonos regulares de mais de uma natureza;
- (2) O número de arestas que concorrem em cada vértice do poliedro é sempre o mesmo.

Definição 3 (Sólidos de Catalan). Chama-se sólidos de Catalan aos poliedros convexos que satisfazem as seguintes condições:

- (1) As suas faces não são formadas por polígonos regulares, mas são todas congruentes entre si;
- (2) Os ângulos determinados por duas faces adjacentes são sempre congruentes.

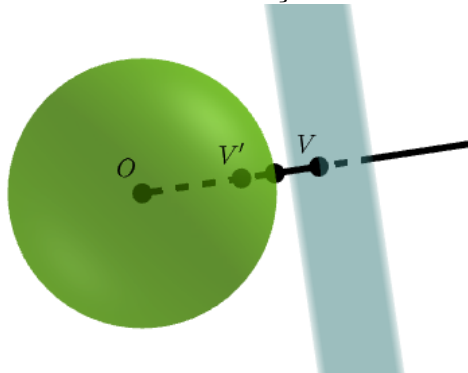
Observação 1. Existem apenas treze sólidos arquimedianos e treze sólidos catalanienses.

É interessante observar que existe um algoritmo para obter o dual de qualquer poliedro convexo, que utiliza o conceito de *inversão em relação a uma esfera*. Esse algoritmo estabelece o seguinte: dada uma esfera de centro O e raio r , o inverso de um ponto V com relação a essa esfera é o ponto V' , sobre a semirreta S_{OV} , tal que

$$d(O, V) \cdot d(O, V') = r^2, \quad (1)$$

em que $d(O, V)$ denota a distância entre O e V e $d(O, V')$ é a distância entre O e V' . É importante notar que V' depende da esfera escolhida inicialmente, de modo que para cada esfera escolhida obtém-se um dual cujas arestas têm medidas diferentes. Assim, para cada ponto V diferente de O , associa-se um plano que passa por V' e é perpendicular à semirreta S_{OV} , conforme ilustra a figura a seguir (Figura 2):

Figura 2: Inversão com relação a uma esfera

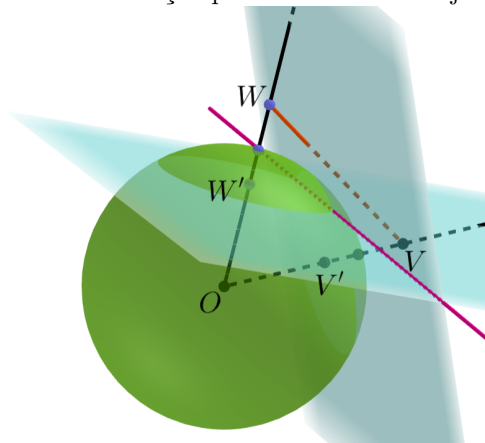


Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Quando V é um vértice do poliedro P , o plano em azul na figura anterior conterá a aresta do poliedro dual Q associado a V , via bijeção ϕ . Ademais, sendo V e W vértices adjacentes do poliedro P , a interseção dos planos passando por V' e W' (fazendo a mesma construção anterior) conterá a respectiva aresta do poliedro dual Q . Aplicando-se esse processo a todos os vértices de

P, obtêm-se as faces, arestas e vértices de Q. A figura a seguir (Figura 3) ilustra a construção para dois vértices adjacentes.

Figura 3: Construção para dois vértices adjacentes



Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

2. Construção do tetraedro triakis utilizando o conceito de inversão com relação a uma esfera

Esta seção é dedicada à obtenção do tetraedro triakis (dual do tetraedro truncado) utilizando o algoritmo proposto em [2], o qual mencionamos anteriormente, a saber, usando o conceito de inversão com relação a uma esfera.

Inicialmente, considere um tetraedro regular de aresta medindo três unidades de comprimento (u.c.) e divida cada aresta do poliedro em três segmentos de mesmo comprimento, isto é, três segmentos unitários. Unindo os vértices obtidos por meio dessa divisão, fomentamos, após a truncatura – ou seja, a secção do tetraedro regular por meio de planos que passam por exatamente três pontos obtidos nas divisões das arestas e que são paralelos a uma face do tetraedro regular – o tetraedro truncado, sólido com quatro faces hexagonais e quatro faces triangulares (ambos polígonos regulares), conforme ilustram as Figuras 4 e 5 a seguir:

Figura 4: Tetraedro regular

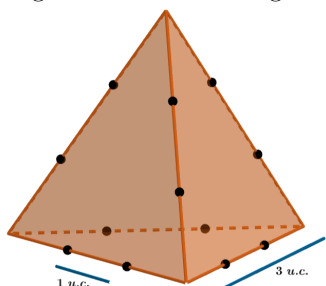
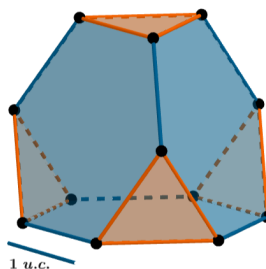


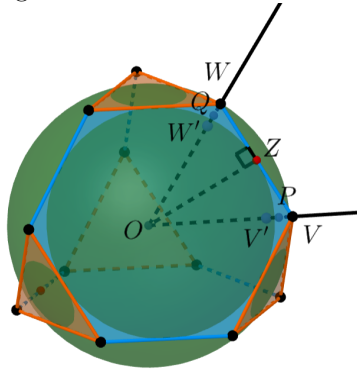
Figura 5: Tetraedro truncado



Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Agora, considere a esfera cujo centro O é o centro do tetraedro truncado (centro também do tetraedro regular) e que tangencia os pontos médios de suas arestas, conforme ilustra a Figura 6 a seguir:

Figura 6: Esfera de raio $r = \overline{OZ}$



Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Agora, vamos determinar o raio dessa esfera construída anteriormente, e para isso vamos considerar novamente o tetraedro regular inicial e considerar algumas construções que nos serão convenientes para obtenção de \overline{OZ} . A saber, tome o ponto J , vértice do tetraedro regular, e trace a altura de uma face do tetraedro partindo de J . Repita o mesmo processo a partir do ponto L , vértice também do tetraedro, formando assim o triângulo isóscele JKL , de base JL . Tome também os vértices do tetraedro truncado V e W , fomentando o triângulo isóscele OVW , de base VW . Trace também a altura do tetraedro regular, denotada por JM , e, por fim, tome o segmento OL , conforme ilustram as Figuras 7 e 8 a seguir:

Figura 7: Construção

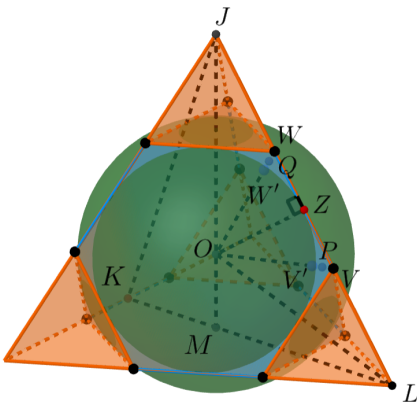
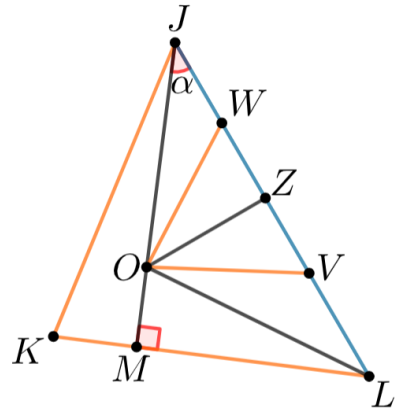


Figura 8: Seção medial



Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Vamos calcular inicialmente \overline{LM} e, para isso, note que M é o baricentro do triângulo equilátero

que é base do tetraedro regular. Assim,

$$\overline{LM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \overline{LM} = \sqrt{3}. \quad (2)$$

Agora, vamos nos concentrar no triângulo retângulo JLM, retângulo em M, a fim de calcular \overline{JM} . Para tanto, note que

$$\overline{JL}^2 = \overline{JM}^2 + \overline{LM}^2 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} 9 = \overline{JM}^2 + 3 \Rightarrow \overline{JM} = \sqrt{6}. \quad (3)$$

Agora, considere o triângulo retângulo LMO, retângulo em M, sendo $\overline{MO} = x$. Então, por (3),

$$\overline{LO} = \overline{JO} = \sqrt{6} - x.$$

Logo,

$$(\sqrt{6} - x)^2 = 3 + x^2 \Rightarrow 6 - 2\sqrt{6}x + x^2 = 3 + x^2 \Rightarrow 2\sqrt{6}x = 3 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

e, com isso,

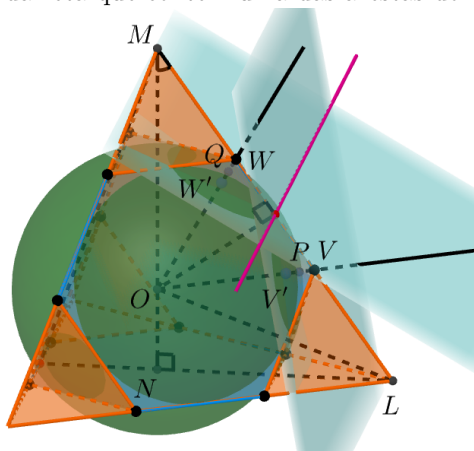
$$\overline{JO} = \sqrt{6} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{3\sqrt{6}}{4}. \quad (4)$$

Agora estamos em condições de determinar \overline{OZ} , bastando, para isso, focarmos no triângulo retângulo KOZ, retângulo em Z. De (4), pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\overline{JO}^2 = \overline{JZ}^2 + \overline{OZ}^2 \Rightarrow \frac{27}{8} = \frac{9}{4} + \overline{OZ}^2 \Rightarrow \overline{OZ} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

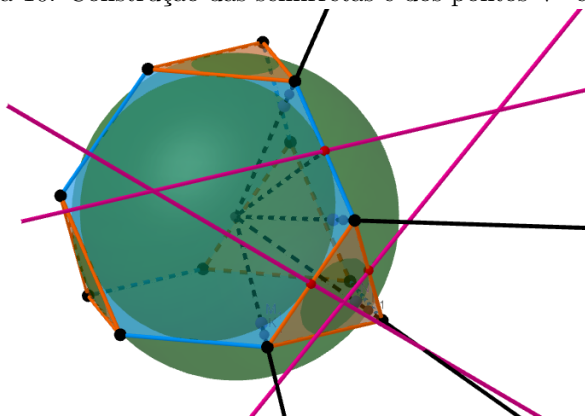
Voltemos a considerar as semirretas OV e OW traçadas anteriormente. Tomando os planos perpendiculares às semirretas S_{OV} e S_{OW} e que passam pelos pontos V' e W' , respectivamente, fomenta-se a reta que contém uma das arestas do tetraedro triakis, conforme ilustra a Figura 9 a seguir:

Figura 9: Obtenção da reta que contém uma das arestas do tetraedro triakis



Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Figura 10: Construção das semirretas e dos pontos V' e W'

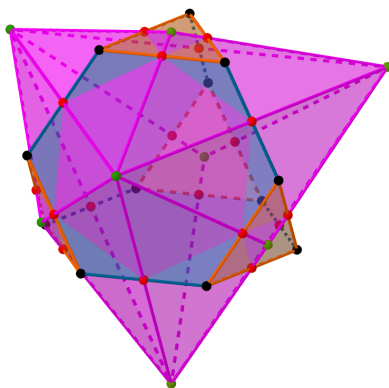


Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Repetindo esse algoritmo, usando as semirretas destacadas na Figura 10, as interseções, duas a duas, entre as três retas (rosas) dão origem a uma das faces do tetraedro triakis.

Estendendo esse procedimento para os demais vértices do tetraedro truncado, constroem-se todas as faces do tetraedro triakis, o qual é um poliedro catalaniense, pois todas as suas faces são triângulos isósceles congruentes entre si e seus ângulos diédricos também o são (veja a Figura 11).

Figura 11: Tetraedro triakis



Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

3. Construção do tetraedro triakis via mediatrizes

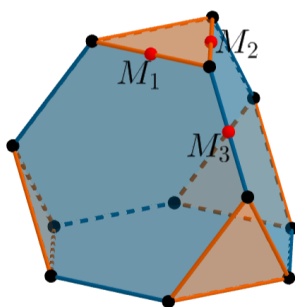
Nesta seção vamos fazer a construção do tetraedro triakis, a partir do tetraedro truncado, utilizando um outro método construtivo, distinto do apresentado anteriormente. É importante enfatizar que

tal construção constitui uma contribuição dos autores neste estudo e, até onde temos conhecimento, não há registros documentados que abordem essa construção sob essa perspectiva.

Para obter o tetraedro triakis, dual do tetraedro truncado, não será necessário recorrer ao conceito de inversão com relação a uma esfera. Antes, basta traçar mediatrizes convenientes das arestas do tetraedro truncado e, conforme vamos mostrar, o resultado será o poliedro desejado.

Considere inicialmente o tetraedro truncado e tome os pontos médios M_1, M_2, M_3 de três arestas que concorrem em um mesmo vértice, conforme ilustra a Figura 12 a seguir:

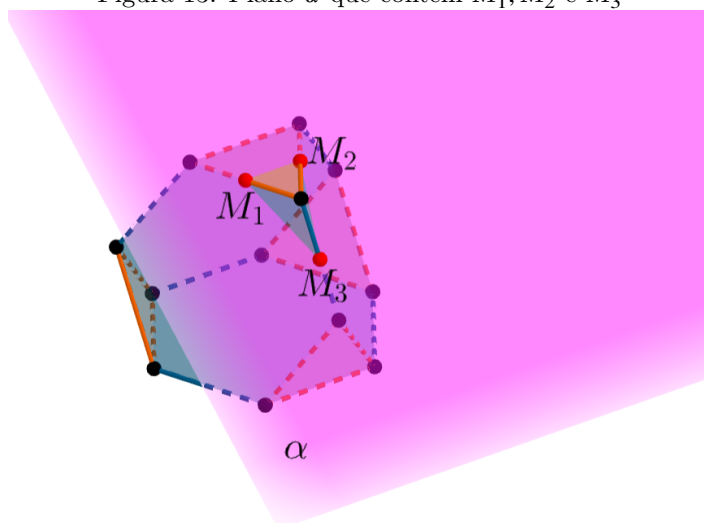
Figura 12: Pontos médios M_1, M_2 e M_3



Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Agora, como tais pontos são não colineares, existe um único plano que os contém. Considere, então, α esse plano, conforme ilustra a Figura 13 a seguir:

Figura 13: Plano α que contém M_1, M_2 e M_3

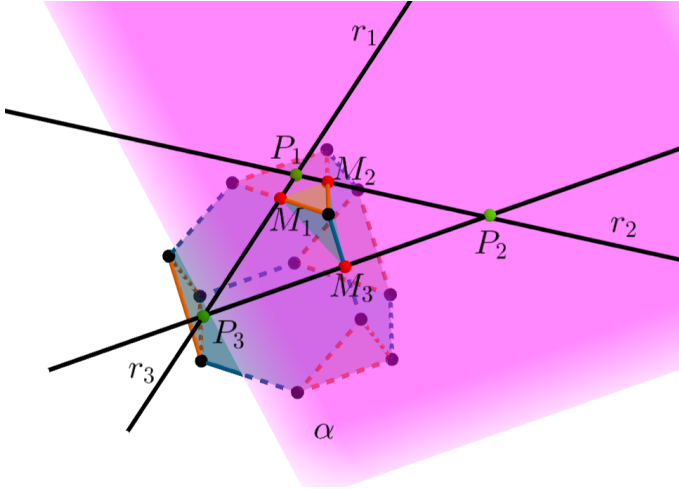


Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Tracemos agora a reta r_1 que está contida no plano α , que passa pelo ponto M_1 e que é perpendicular à aresta que contém esse ponto. Repetindo esse processo para as arestas destacadas na

Figura 14, fomentamos as retas r_1, r_2 e r_3 , as quais são as mediatrizes dessas arestas. Ora, como tais retas são concorrentes, existem pontos P_1, P_2 e P_3 que são as interseções dessas retas, duas a duas, como pode-se observar a seguir (Figura 14):

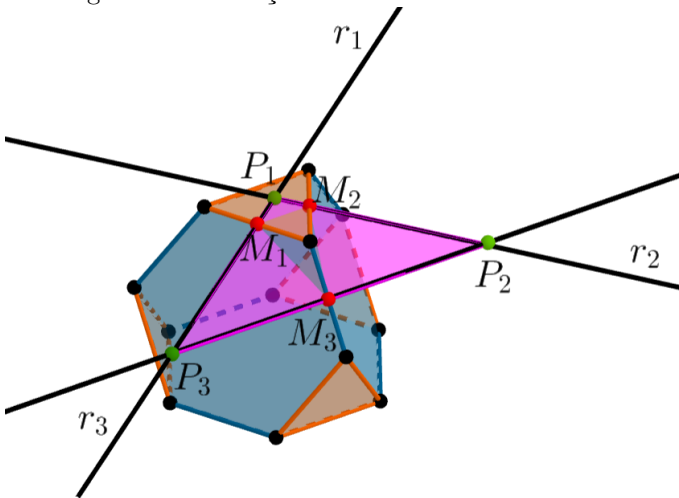
Figura 14: Mediatrizes associadas a cada ponto médio contidas em α



Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Com isso, basta considerar os pontos P_1, P_2, P_3 , os quais determinam uma face do tetraedro triakis, como ilustra a Figura 15 a seguir:

Figura 15: Obtenção de uma das faces do triakis

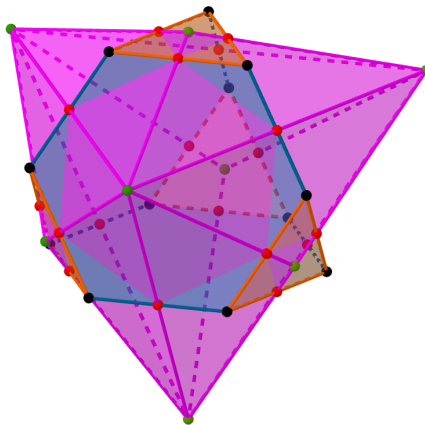


Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Finalmente, reproduzindo os passos realizados anteriormente, obtemos o tetraedro triakis, apresentado na Figura 16 abaixo.

Nosso trabalho agora consiste em provar que o poliedro que acabamos de gerar é, de fato, um

Figura 16: Tetraedro triakis

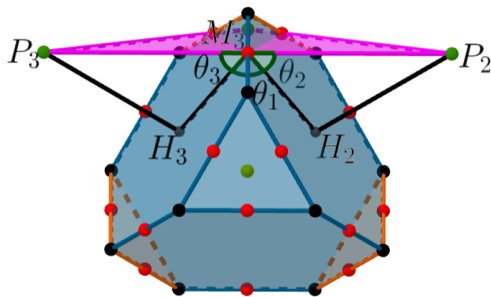


Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

tetraedro triakis. Para isso, devemos mostrar que todas as faces desse poliedro são congruentes entre si e que seus ângulos diédricos também são todos congruentes. Começemos, pois, com o cálculo da medida dos lados dos triângulos.

Sejam P_2 e P_3 vértices do poliedro. Trace os segmentos perpendiculares com respeito às faces hexagonais do tetraedro truncado. Sejam H_2 e H_3 o pé dessas perpendiculares. Trace também os segmentos H_2M_3 e H_3M_3 a fim de formar triângulos retângulos cujas hipotenusas são, cada uma, metade do comprimento de uma das arestas do poliedro candidato a tetraedro triakis. Por fim, sejam θ_1 o ângulo diédrico do tetraedro truncado formado por duas faces hexagonais, o qual já foi calculado em [1, págs. 60 e 61], e verifique $\cos \theta_1 = \frac{1}{3}$, e θ_2, θ_3 os ângulos adjacentes a θ_1 e que são congruentes, conforme ilustra a Figura 17 a seguir:

Figura 17: Construção



Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Ora, como $\theta_2 = \theta_3$, temos

$$\theta_1 + 2\theta_2 = \pi \Rightarrow 2\theta_2 = \pi - \theta_1 \Rightarrow \cos 2\theta_2 = \cos(\pi - \theta_1) \Rightarrow \cos 2\theta_2 = -\cos(\theta_1) \Rightarrow \cos 2\theta_2 = -\frac{1}{3}$$

e, conseqüentemente,

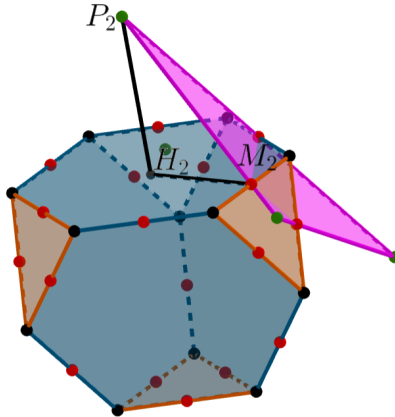
$$2 \cos^2 \theta_2 - 1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow 2 \cos^2 \theta_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos^2 \theta_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos \theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Além disso, como $\overline{H_2M_3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, uma vez que é a altura de um triângulo equilátero construído na face hexagonal do tetraedro truncado, temos

$$\cos \theta_2 = \frac{\overline{H_2M_3}}{\overline{M_3P_2}} \Rightarrow \overline{M_3P_2} = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/3} \Rightarrow \overline{M_3P_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \overline{M_3P_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \overline{P_2P_3} = 3.$$

Observe a Figura 18 a seguir e perceba que $\overline{M_3P_2} = \overline{M_2P_2} = \frac{3}{2}$, bastando, para isso, fazer o mesmo cálculo que foi feito anteriormente.

Figura 18: Construção

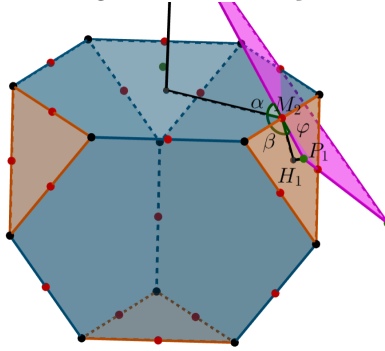


Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Agora, considere a Figura 19 a seguir:

Ora, pelo mesmo cálculo feito anteriormente, α é um ângulo tal que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e, além disso, β é o ângulo diédrico do tetraedro truncado formado por uma face hexagonal e uma face triangular, a qual já foi calculada em [1, pág. 62] e verifica $\cos \beta = -\frac{1}{3}$. Por fim, observe que φ é um ângulo tal

Figura 19: Construção



Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

que $\alpha + \beta + \varphi = \pi$. Portanto, temos

$$\begin{aligned}
 \alpha + \beta + \varphi = \pi &\Rightarrow \alpha + \beta = \pi - \varphi \\
 &\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \cos(\pi - \varphi) \\
 &\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = -\cos \varphi \\
 &\Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{9} - \frac{4\sqrt{3}}{9} = -\cos \varphi \\
 &\Rightarrow \cos \varphi = \frac{5\sqrt{3}}{9}.
 \end{aligned}$$

Prosseguindo, como H_1 é baricentro da face triangular do tetraedro truncado, $\overline{H_1M_2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, e como $\cos \varphi = \frac{\overline{H_1M_2}}{\overline{P_1M_2}}$, obtemos

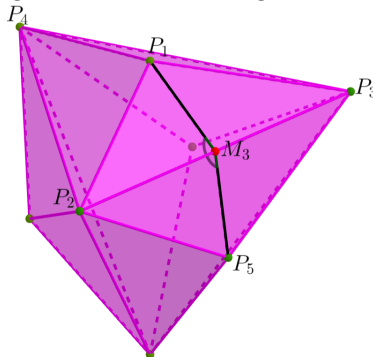
$$\cos \varphi = \frac{\overline{H_1M_2}}{\overline{P_1M_2}} \Rightarrow \overline{P_1M_2} = \frac{\sqrt{3}/6}{5\sqrt{3}/9} \Rightarrow \overline{P_1M_2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{9}{5\sqrt{3}} \Rightarrow \overline{P_1M_2} = \frac{3}{10}.$$

Logo, $\overline{P_1P_2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{10} = \frac{9}{5}$. Efetuando-se o mesmo cálculo, concluímos que $\overline{P_1P_3} = \frac{9}{5}$, mostrando, assim, que as faces do poliedro são formadas por triângulos isósceles cuja medida do lado maior vale 3 e as medidas dos lados menores valem $\frac{9}{5}$. Para completar a demonstração, precisamos calcular os ângulos diédricos e mostrar que todos são congruentes. Com efeito, vamos obter inicialmente o ângulo diédrico $\theta = P_1\widehat{M_3}P_5$, conforme ilustra a Figura 20 a seguir:

Para obtenção deste ângulo, considere inicialmente a pirâmide de base triangular $P_1P_2P_3P_4$ e, a partir de P_1 , trace o segmento perpendicular à base da pirâmide. Denotando o pé da perpendicular por M é possível fomentar o triângulo retângulo P_1M_3M , retângulo em M , cujo ângulo que nos interessa calcular é $\theta_1 = P_1\widehat{M_3}M$, conforme ilustra a Figura 21 a seguir:

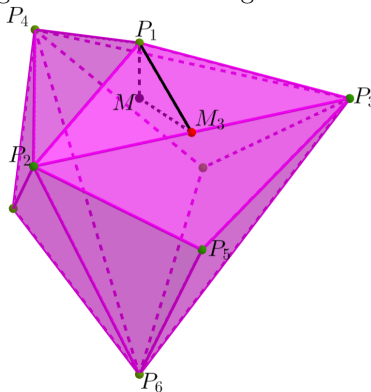
Efetuando a mesma construção na pirâmide de base triangular $P_5P_2P_3P_6$ obtemos o triângulo retângulo P_5M_3N , retângulo em N , cujo ângulo que nos interessa é $\theta_3 = P_5\widehat{M_3}N$, e o triângulo

Figura 20: Primeiro ângulo diédrico



Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

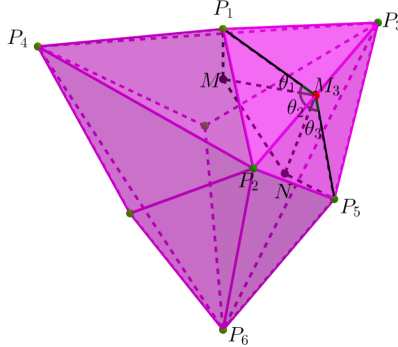
Figura 21: Primeiro ângulo diédrico



Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

isóscele MM_3N , cujo ângulo que nos interessa é $\theta_2 = \widehat{MM_3N}$, uma vez que $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$. Como os triângulos retângulos são congruentes, temos $\theta = 2\theta_1 + \theta_2$. Essa construção pode ser vista na Figura 22 a seguir:

Figura 22: Construção para o cálculo do ângulo diédrico



Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Calculemos inicialmente o valor de $\overline{P_1M_3}$. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned}
 \overline{P_1P_3}^2 &= \overline{P_3M_3}^2 + \overline{P_1M_3}^2 \Rightarrow \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \overline{P_1M_3}^2 \\
 &\Rightarrow \overline{P_1M_3}^2 = \frac{81}{25} - \frac{9}{4} \\
 &\Rightarrow \overline{P_1M_3}^2 = \frac{99}{100} \\
 &\Rightarrow \overline{P_1M_3} = \frac{3\sqrt{11}}{10}.
 \end{aligned}$$

Agora, note que M é o baricentro do triângulo equilátero $P_2P_3P_4$ de lado 3 u.c., de onde concluímos que $\overline{MM_3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Assim,

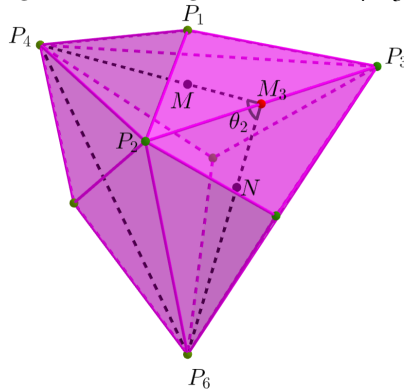
$$\cos \theta_1 = \frac{\overline{MM_3}}{\overline{P_1M_3}} = \frac{\sqrt{3}/2}{3\sqrt{11}/10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{10}{3\sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{33}}{33}$$

e, conforme mencionamos anteriormente, pelo mesmo cálculo chega-se em $\cos \theta_3 = \frac{5\sqrt{33}}{33}$. Agora vamos determinar o ângulo θ_2 . Para isso, considere o triângulo isóscele $P_4M_3P_6$, cujos lados medem $\overline{P_4M_3} = \overline{P_6M_3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ e $\overline{P_4P_6} = 3$, conforme a Figura 23 a seguir:

Pela lei dos cossenos, temos

$$3^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \theta_2,$$

Figura 23: Triângulo isóscele $P_4M_3P_6$



Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

ou ainda,

$$\begin{aligned}
 -\frac{27}{2} \cos \theta_2 &= 9 - \frac{27}{2} \Rightarrow -\frac{27}{2} \cos \theta_2 = -\frac{9}{2} \\
 &\Rightarrow 27 \cos \theta_2 = 9 \\
 &\Rightarrow \cos \theta_2 = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Para determinar o ângulo diédrico, basta observar que

$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= \cos(2\theta_1 + \theta_2) \\
 &= \cos 2\theta_1 \cos \theta_2 - \sin 2\theta_1 \sin \theta_2 \\
 &= (2 \cos^2 \theta_1 - 1) \cos \theta_2 - 2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2.
 \end{aligned}$$

Agora, usando a identidade fundamental da trigonometria, temos

$$\cos \theta_1 = \frac{5\sqrt{33}}{33} \Rightarrow \sin \theta_1 = \frac{2\sqrt{66}}{33}$$

e

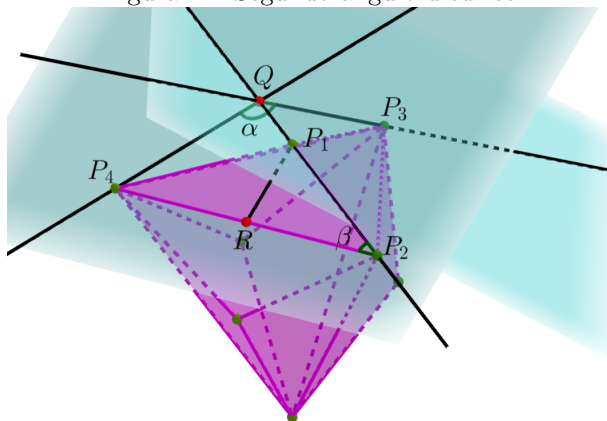
$$\cos \theta_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \theta_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= (2 \cos^2 \theta_1 - 1) \cos \theta_2 - 2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\
 &= \left(2 \cdot \frac{25}{33} - 1\right) \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{2\sqrt{66}}{33} \cdot \frac{5\sqrt{33}}{33} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \\
 &= -\frac{7}{11}.
 \end{aligned}$$

Por fim, vamos determinar o ângulo diédrico formado pelas faces triangulares $P_1P_2P_4$ e $P_1P_2P_3$, denotado por $\alpha = P_3\widehat{QP}_4$, conforme ilustra a Figura 24 a seguir:

Figura 24: Segundo ângulo diédrico



Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Vamos inicialmente calcular o cosseno do ângulo $\beta = \widehat{P_1 P_2 R}$:

$$\cos \beta = \frac{3/2}{9/5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{6}.$$

Pela identidade fundamental da trigonometria, obtemos

$$\cos \beta = \frac{5}{6} \Rightarrow \sin \beta = \frac{\sqrt{11}}{6}.$$

Como o triângulo $P_2 Q P_4$ é retângulo em Q , temos

$$\sin \beta = \frac{\overline{P_4 Q}}{\overline{P_2 P_4}} \Rightarrow \overline{P_4 Q} = 3 \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow \overline{P_4 Q} = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Agora, analisando o triângulo $P_2 Q P_3$, vê-se que é congruente ao triângulo $P_2 Q P_4$, e com isso $\overline{P_3 Q} = \frac{\sqrt{11}}{2}$. Finalmente, estamos em condição de calcular o ângulo diédrico α , bastando para isso usar a lei dos cossenos no triângulo isóscele $P_3 Q P_4$, ou seja,

$$3^2 = \left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{11}}{2} \cdot \frac{\sqrt{11}}{2} \cdot \cos \beta,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} -\frac{11}{2} \cos \beta &= 9 - \frac{11}{2} \Rightarrow -\frac{11}{2} \cos \beta = \frac{7}{2} \\ &\Rightarrow 11 \cos \beta = -7 \\ &\Rightarrow \cos \beta = -\frac{7}{11} \\ &\Rightarrow \cos \beta = \cos \theta. \end{aligned}$$

Isso mostra que os ângulos diédricos são todos congruentes, uma vez que, para determinar os demais, serão feitas construções iguais às que fizemos anteriormente. Logo, o poliedro construído é, de fato, o poliedro catalaniense tetraedro triakis.

Referências

- [1] CABRAL, A. H. L.; *Poliedros duais e algumas aplicações*. Dissertação, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande-PB, pp. 101, 2019.
- [2] BORTOLOSSI, H. J.; EL ADJI, V. I. S.; *Uma Pletora de Poliedros*, Projeto de Iniciação Científica, Universidade Federal Fluminense, Disponível em: <<http://www.cdme.im-uff.mat.br/html5/pdp/pdp-html/pdp-br.html>>. Acesso em: 08/06/2023.
- [3] GRÜNBAUM, B.; SHEPHARD, G. C.; *Duality of Polyhedra*. Em SENECHAL, M; FLECK, G. (editores); *Shaping Space - A Polyhedral Approach*, Birkhäuser, 1988.

Maxwell Aires da Silva
Universidade Estadual da Paraíba
<maxwellaires@servidor.uepb.edu.br>

Gustavo da Silva Araújo²
Universidade Estadual da Paraíba
<gustavoaraujo@servidor.uepb.edu.br>

Állisson Henrique Leite Cabral
E.E.E.F.M. Poetisa Vicentina Figueiredo Vital do Rego
<madagascar_kof@hotmail.com>

Recebido: 10/06/2023
Publicado: 04/12/2023

²Apoiado pela Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado da Paraíba (Fapesq), Termo de Outorga nº 3024/2021.