PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.11, n.4, 2023
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2023/pmo1131

Algumas relações entre os números consecutivos de Pell e a razão de Prata

Marcia A. G. Teixeira   Irene M. Craveiro   Enoque S. Reis

Resumo

O objetivo deste artigo é trazer uma abordagem de diferentes provas da convergência da sequência numérica formada pela razão dos números consecutivos de Pell e sua relação com o número de prata. Relembrando que os números de Pell constituem uma sequência de números inteiros definida de forma recursiva da seguinte maneira: $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ e $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$, para $n \geq 2$. Os primeiros números de Pell nessa sequência são $0, 1, 2, 5, 12, 29, 70$ e assim por diante. Essa sequência é notável por algumas propriedades matemáticas interessantes e com aplicações em diversas áreas da matemática. Uma característica marcante dos números de Pell é que a sequência de razões entre os números de Pell consecutivos $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ convergem para um valor conhecido chamado número de prata, que é igual a $1+\sqrt{2}$. Isso significa que à medida que consideramos números de Pell cada vez maiores e calculamos a razão entre eles, essa razão aproxima-se de $1+\sqrt{2}$. Diante disso apresentamos quatro demonstrações distintas da convergência de uma sequência formada pela razão dos números consecutivos de Pell. Além disso, estabelecemos uma relação com a razão de prata.

Palavras-chave: Sequência de Pell;Fórmula Explícita;Razão de Prata.

Abstract

The objective of this article is to bring an approach to different proofs of sequence convergence numerical formed by the ratio of consecutive Pell numbers and its relationship with the number of silver. Recalling that Pell numbers constitute a sequence of integers defined recursively as follows: $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ and $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$, for $n \geq 2$. The The first Pell numbers in this sequence are $0, 1, 2, 5, 12, 29, 70$ and so on. This sequence It is notable for some interesting mathematical properties and has applications in several areas of mathematics. A striking characteristic of Pell numbers is that the sequence of ratios between the consecutive Pell numbers $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ converge to a known value called the number of silver, which is equal to $1+\sqrt{2}$. This means that as we consider Pell numbers each time larger and we calculate the ratio between them, this ratio approaches $1+\sqrt{2}$. Therefore, we present four distinct demonstrations of the convergence of a sequence formed by the ratio of the numbers consecutive Pell grants. Furthermore, we established a relationship with the silver ratio.

Keywords: Pell sequence; Explicit Formula; Silver Ratio.

1. Introdução

Os números de Pell foram nomeados em homenagem ao matemático inglês John Pell. De acordo com [3], John Pell (1611–1685) é descrito como um dos matemáticos mais enigmáticos do século XVI, um homem apaixonado por leitura, estudo, projetos, ensino e correspondências relacionadas à matemática. Sua relativa obscuridade na história da matemática deve-se ao seu desejo de manter-se anônimo e à escassez de publicações de relevância significativa, além de uma produção limitada de materiais publicados.

Dentre os poucos livros e trabalhos que ele publicou, destaca-se a ”Introdução à Álgebra,”publicada em 1668. No entanto, o nome de John Pell é talvez mais conhecido por meio da sequência ou equação de Pell. A sequência de Pell é considerada tão significativa quanto a famosa sequência de Fibonacci, e a literatura matemática oferece uma variedade substancial de resultados relacionados a essa sequência. Para quem se interessar por esse assunto, é possível encontrar uma coletânea de resultados da sequência de Pell em [4] e [5].

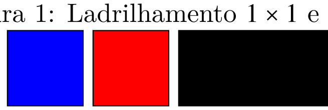
Os números de Pell possuem uma notável conexão com a chamada ”razão de prata”. Essa relação é evidenciada pela sequência dos números de Pell, onde a razão entre números de Pell consecutivos, $\frac{\mathrm{P}_{n+1}}{\mathrm{P}_n}$, converge para uma constante bem conhecida na literatura, a “razão de prata”, também referida como o “número de prata”. Essa constante é exatamente $1 + \sqrt{2}$. Tal descoberta implica que, à medida que consideramos números de Pell cada vez maiores e calculamos a razão entre eles, essa razão aproxima-se da constante $1 + \sqrt{2}$ à medida que n cresce. É importante ressaltar que essa constante já era objeto de estudo na Grécia antiga e desempenha um papel significativo em várias aplicações matemáticas.

Uma observação fascinante é que os arquitetos norte-americanos Donald e Carol Whatts realizaram uma minuciosa investigação das ruínas das Casas de Jardim de Óstia, localizadas na cidade portuária do Império Romano. Eles descobriram que a organização dessas casas seguia um sistema proporcional baseado na “razão de prata”, como documentado em [5].

O nosso objetivo é apresentar quatro demonstrações diferentes da convergência de uma sequência formada pela razão dos números consecutivos de Pell. Além disso, estabelecer uma relação com a razão de prata.

Uma interessante aplicação combinatória para os números de Pell, como veremos adiante, consiste do problema dado pela situação onde se deseja ladrilhar um retângulo $1 \times n$, com 3 tipos de ladrilhos, um ladrilho 1×1 azul, um ladrilho 1×1 vermelho e um dominó 1×2 preto, como ilustra a figura 1.

Figura 1: Ladrilhamento 1×1 e 1×2.

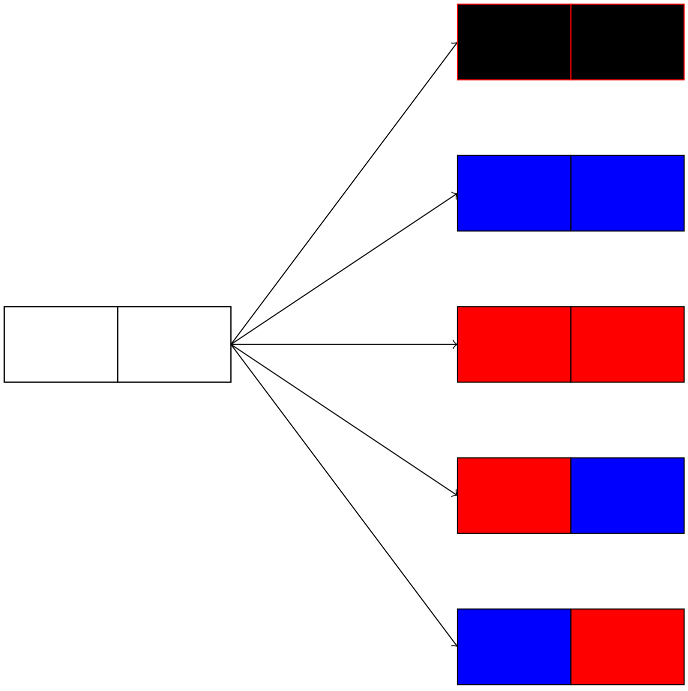


Fonte: Autor

O nosso próximo passo é validar esse problema e verificar que os números de Pell enumeram esse conjunto que consiste no total de ladrilhamento do retângulo $1 \times n$ com três tipos de ladrilhos, um ladrilho de azul 1×1, um ladrilho de cor vermelha 1×1 e um dominó preto 1×2.

Por meio dos ladrilhos dados na figura 1, listamos os possíveis ladrilhamentos para o retângulo 1×2, no caso total $\mathrm{L}_2 = 5$, conforme figura 2.

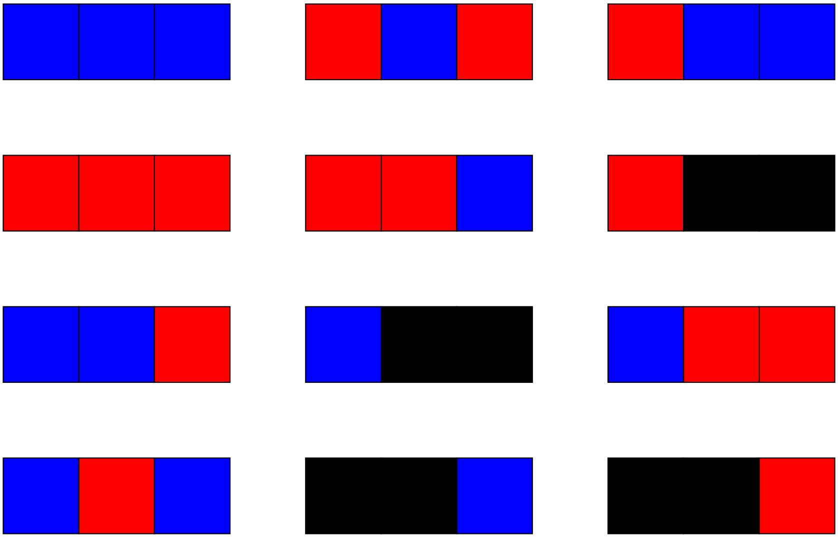
Figura 2: Ladrilhamento $L_2 = 5$



Fonte: Autor

Observamos que $L_3 = 12$, pois há 12 maneiras de ladrilhar o retângulo 1×3 com os três tipos de ladrilhos.

Figura 3: Ladrilhamento $L_3 = 12$



Fonte: Autor

Conforme as figuras 2 e 3, observamos que podemos particionar o conjunto do ladrilhamento $1 \times n$ com $n \geq 2$, em três subconjuntos disjuntos:

1. O conjunto dos ladrilhamentos do retângulo $1 \times n$ que contém na última célula o ladrilho azul 1×1. Observe que temos um total de L_{n-1} ladrilhamentos com essas características;
2. O conjunto dos ladrilhamentos do retângulo $1 \times n$ que contém na última célula o ladrilho vermelho 1×1. Observe que temos um total de L_{n-1} ladrilhamentos, em que a última célula é o ladrilho vermelho;
3. O conjunto dos ladrilhos do retângulo $1 \times n$ que contém nas duas últimas células o dominó preto 1×2. Temos um total de L_{n-2} ladrilhamentos desse tipo.

Segue de $1, 2$ e 3 que $L_n = L_{n-1} + L_{n-1} + L_{n-2}$, ou seja, $L_n = 2L_{n-1} + L_{n-2}$ para $n \geq 2$. Reescrevendo a recorrência temos:

$$\begin{cases} L_0 = 1 \\ L_1 = 2 \\ L_n = 2L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 2 \end{cases}$$

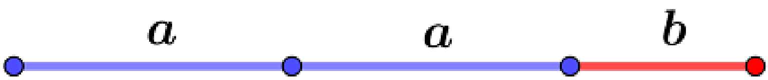
Definição 1. Seja $n \in \mathbb{N}$, denotamos por P_n o número de Pell de ordem n, cuja lei de formação é dada pela relação recorrência:

$$\begin{cases} P_0 = P(0) = 0 \\ P_1 = P(1) = 1 \\ P_n = P(n) = 2P_{n-1} + P_{n-2}. \end{cases} \tag{1}$$

Observe que $L_n = P_{n+1}$, onde P_{n+1} é $(n+1)$-ésimo número de Pell. Portanto, P_{n+1} enumera os ladrilhamentos do retângulo $n \times 1$.

Um fascinante número irracional associado ao número de Pell e a razão de prata, do ponto de vista geométrico, pode se aplicar o conceito de proporção que consiste em um segmento divido em duas partes e sendo essas proporções aplicadas, resultando na razão extrema e média que dá lugar ao número de prata.
Considere o segmento de reta, dividido em duas partes de medidas a, b, com $a > b$.

Figura 4: Segmento Prateado



Fonte: Autor

Para determinarmos a razão de prata, de acordo com a figura 4, dados $a + b \in \mathbb{R}, a, b > 0$ devem satisfazer a seguinte proporção: $\dfrac{2a+b}{a} = \dfrac{a}{b} = S$.
Fazendo as seguintes manipulações algébricas obtemos:

$$\frac{2a+b}{a} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow 2ab + b^2 = a^2 \Leftrightarrow \frac{2ab}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow 2\frac{a}{b} + 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

Como $S = \dfrac{a}{b}$, então $2S + 1 = S^2$, ou seja $S^2 - 2S - 1 = 0$, sendo $S \in \mathbb{R}$ e $S > 0$.

Resolvendo a equação em S, $S^2 - 2S - 1 = 0$ temos,

$$S = 1 + \sqrt{2}. \tag{2}$$

O número $S = 1 + \sqrt{2}$ é chamado de número ou razão de prata.

2. Fórmula Explícita para os números de Pell

Faremos outra abordagem para gerar uma fórmula explícita para os números de Pell, tal abordagem fará o uso de funções geradoras.
Para isso, considere a série de potências a $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n$, em que P_n é o n-ésimo número de Pell.

Multiplicando por x^n em ambos os lados de (1) temos:

$$P_n x^n = 2P_{n-1}x^n + P_{n-2}x^n \tag{3}$$

Somando em ambos os lados de (3) com $n = 2$ até infinito obtemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} P_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} 2P_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-2}x^n =$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} P_n x^n = 2x \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1}x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-2}x^{n-2}.$$

Como $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n$ então $f(x) - P_0 - P_1 x = 2x(f(x) - P_0) + x^2$, ou seja, $f(x) - 2xf(x) - x^2 f(x) = x$.

$$(1 - 2x - x^2)f(x) = x.$$

Desse modo,

$$f(x) = \frac{x}{1 - 2x - x^2}.$$

Assim, obtemos o resultado:

Proposição 1. *A função geradora para os números de Pell é:*

$$f(x) = \frac{x}{1 - 2x - x^2}.$$

A proposição 1 estabelece uma fórmula explícita para os números de Pell como segue.

Proposição 2. *Seja* P_n *o* n*-ésimo número de Pell. Então,*

$$P_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n\right].$$

Demonstração. Usando frações parciais podemos encontrar A e B tais que

$$f(x) = \frac{x}{1 - 2x - x^2} = \frac{x}{(1 - (1 + \sqrt{2})x)(1 - (1 - \sqrt{2})x)} =$$

$$= \frac{A}{(1 - (1 + \sqrt{2})x)} + \frac{B}{(1 - (1 - \sqrt{2})x)}. \tag{4}$$

Logo,

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A(1 + \sqrt{2}) + B(1 - \sqrt{2}) = 1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $A = \frac{\sqrt{2}}{4}$ e $B = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ e substituindo em 4 temos,

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{(1 - (1 + \sqrt{2})x)} + \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{(1 - (1 - \sqrt{2})x)}.$$

Fazendo a expansão das séries geométricas que aparecem em cada parcela de f(x), temos a relação:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{4}\left[(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n\right]x^n.$$

Portanto, o n-ésimo número de Pell é dado pela seguinte fórmula explícita

$$P_n = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n\right]. \tag{5}$$

□

3. Razão de Prata e os números consecutivos de Pell

O número de prata é uma constante matemática, sendo que sua terminologia tem como referência o número de ouro. Como vimos na seção 2, a solução positiva da equação é

$$x^2-2x-1=0$$

a saber,

$$S = 1+\sqrt{2}.$$

Uma interessante relação entre o número de prata e a sequência de Pell é dada pela seguinte proposição:

Proposição 3. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$$(1+\sqrt{2})^n = (1+\sqrt{2}).P_n + P_{n-1}$$

onde P_n *é o n-ésimo número de Pell.*

Demonstração. A prova será feita por indução sobre n. Observe que para $n = 1$, temos

$$(1+\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2}).P_1 + P_0$$

onde $P_0 = 0$ e $P_1 = 1$. Suponha que para $n \geq 1$,

$$(1+\sqrt{2})^n = (1+\sqrt{2}).P_n + P_{n-1}.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
(1+\sqrt{2})^{n+1} &= (1+\sqrt{2}).(1+\sqrt{2})^n \\
&= (1+\sqrt{2})\left[(1+\sqrt{2}).P_n + P_{n-1}\right] \\
&= (1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})P_n + (1+\sqrt{2})P_{n-1} \\
&= (1+2\sqrt{2}+2)P_n + P_{n-1} + \sqrt{2}.P_{n-1} \\
&= 2P_n + P_{n-1} + P_n + 2\sqrt{2}P_n + \sqrt{2}P_{n-1} \\
&= 2P_n + P_{n-1} + P_n + \sqrt{2}(2P_n + P_{n-1})
\end{aligned}$$

$$= P_{n+1} + P_n + \sqrt{2}P_{n+1}$$
$$= (1+\sqrt{2})P_{n+1} + P_n.$$

Segue da Proposição (3) que para todo $n \geq 2$

$$(1+\sqrt{2})^n = (1+\sqrt{2})P_n + P_{n-1}.$$

ou seja,

$$\frac{(1+\sqrt{2})^n}{P_{n-1}} = (1+\sqrt{2})\frac{P_n}{P_{n-1}} + 1$$

ou ainda,

$$\frac{(1+\sqrt{2})^n}{P_{n-1}} - 1 = (1+\sqrt{2})\frac{P_n}{P_{n-1}}.$$

Logo,

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{(1+\sqrt{2})^{n-1}}{P_{n-1}} - \frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$

Segue da proposição (2) que

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{(1+\sqrt{2})^{n-1}.4}{\sqrt{2}}.\left[\frac{1}{(1+\sqrt{2})^{n-1}-(1-\sqrt{2})^{n-1}}\right] - \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}}.\frac{1}{(1+\sqrt{2})^{-n+1}\left[(1+\sqrt{2})^{n-1}-(1-\sqrt{2})^{n-1}\right]} - \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}}.\frac{1}{1-\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{n-1}} - \frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$

Como

$$0 < \left|\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right| < 1 \tag{6}$$

então,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{n-1} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{2} - \frac{(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = 2\sqrt{2} - \frac{(1-\sqrt{2})}{1-2}$$

$$= 2\sqrt{2} - \frac{(1-\sqrt{2})}{1} = 2\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

$\square$

4. Números Consecutivos e fórmula explícita para números de Pell

Nessa prova faremos uso direto da fórmula explícita dada na proposição 2 para analisar a razão entre os números consecutivos de Pell P_{n+1} e P_n como segue:

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{4}}.\frac{\left[(1+\sqrt{2})^{n+1}-(1-\sqrt{2})^{n+1}\right]}{\left[(1+\sqrt{2})^{n}-(1-\sqrt{2})^{n}\right]} = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1}-(1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^{n}-(1-\sqrt{2})^{n}} =$$

$$\frac{(1+\sqrt{2})^{n+1}\left(1-\dfrac{(1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^{n+1}}\right)}{(1+\sqrt{2})^{n}\left(1-\dfrac{(1-\sqrt{2})^{n}}{(1+\sqrt{2})^{n}}\right)} = (1+\sqrt{2}).\frac{1-\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{n+1}}{1-\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{n}}.$$

Como $\left|\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right| < 1$ então, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{n+1} = 0.$

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{P_{n+1}}{P_n} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\sqrt{2}).\left[\dfrac{1-\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{n+1}}{1-\left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{n}}\right] = 1+\sqrt{2}.$

5. Sequência Monótona e limitada e os números consecutivos de Pell

Agora, vamos definir a sequência $R_n = \dfrac{P_{n+1}}{P_n}$, para $n \geq 1$, ou seja, R_n é a razão entre os números de Pell consecutivos P_{n+1} e P_n. Uma observação que fazemos sobre $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência ser limitada.

De fato, para todo $n \geq 1, 0 \leq \dfrac{P_{n+1}}{P_n} < 1$, pois $P_1 > P_0$ e $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} > P_{n-1} > 0$, para todo $n \geq 1$. Dessa forma, $0 < \dfrac{P_{n+1}}{P_n} = \dfrac{2P_n + P_{n-1}}{P_n} = 2 + \dfrac{P_{n-1}}{P_n} < 2+1 = 3$ e com isso, $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Segue de [5] do corolário 2.3.2, página 35 que $P_{n+1}^2 - P_nP_{n+2} = (-1)^{n+1}, n \in \mathbb{N}$ então com isso concluímos:

$$R_n - R_{n+1} = \frac{P_{n+1}}{P_n} - \frac{P_{n+2}}{P_{n+1}} = \frac{P_{n+1}^2 - P_nP_{n+2}}{P_{n+1}P_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{P_{n+1}P_n},$$

onde $P_{n+1}P_n > 0$, para todo $n \geq 1$.

Portanto, $\begin{cases} R_n - R_{n+1} < 0, & \text{se} \quad n \quad \text{é par} \\ R_n - R_{n+1} > 0, & \text{se} \quad n \quad \text{é ímpar.} \end{cases}$

Ou seja, $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui duas subsequências: $(R_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $(R_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$, que são sequências monótonas e limitadas. Toda sequência monótona e limitada é convergente [1]. Como ambas $(R_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $(R_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ são limitadas e monótonas, então convergem, isto é, existem os seguintes limites:

$$\lim_{k\to\infty} R_{2k} = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} R_{2k+1} = L_2.$$

A ideia agora é provar que $L_2 = L_1$. De fato,

$$L_1 = \lim_{k\to\infty} R_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{P_{2k+1}}{P_{2k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2P_{2k} + P_{2k-1}}{P_{2k}} = \lim_{k\to\infty} \left(2 + \frac{P_{2k-1}}{P_{2k}}\right) =$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(2 + \frac{1}{\frac{P_{2k}}{P_{2k-1}}}\right) = \lim_{k\to\infty} \left(2 + \frac{1}{R_{2k-1}}\right) = 2 + \frac{1}{L_2}.$$

Logo, $L_1 = 2 + \dfrac{1}{L_2}$, ou seja, $L_1 \cdot L_2 = 2L_2 + 1$. Fazendo $L_2 = \lim\limits_{k\to\infty} R_{2k-1}$ e procedendo de forma análoga temos que $L_1 \cdot L_2 = 2L_1 + 1$.

Como $\begin{cases} L_1L_2 = 2L_2 + 1 \\ L_1L_2 = 2L_1 + 1, \end{cases}$ então $L_1 = L_2$.

Dessa forma, concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_{n+1}}{P_n} = L$. Segue do teorema da conservação de sinal para limites [1] que $L \geq 0$.

Temos que: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_{n+1}}{P_n} = L$ e $L \geq 0$. Como $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} = \dfrac{2P_n + P_{n-1}}{P_n} = 2 + \dfrac{P_{n-1}}{P_n} = 2 + \dfrac{1}{\frac{P_{n-1}}{P_n}}$, então,

$L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_{n+1}}{P_n} = 2 + \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_{n-1}}{P_n}} = 2 + \dfrac{1}{L}$. Logo: $L^2 = 2L + 1$ isto é, $L^2 - 2L - 1 = 0$.

Resolvendo a equação $L^2 - 2L - 1 = 0$, obtemos a solução positiva $L = 1 + \sqrt{2}$.

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = 1 + \sqrt{2}.$$

6. Sequências de Cauchy e os números consecutivos de Pell

De acordo com [2], a construção dos números reais foi realizada por meio do conjunto dos números racionais por Dedekind, que usou a noção de corte no corpo ordenado dos números racionais, entretanto, esse método não é possível de ser utilizado em outras situações. Por outro lado, Cantor foi mais engenhoso e baseou a construção dos números reais fazendo uso de sequências convergentes de Cauchy, sendo essas aplicáveis em diversos contextos.

Nesta seção estaremos explorando a sequência $x_n = \dfrac{P_{n+1}}{P_n}$, com $n \geq 1$ sendo P_{n+1} e P_n dois números consecutivos de Pell.

Teorema 1. *Considere* $x_{n+1} = \dfrac{P_{n+2}}{P_{n+1}}$ *e* $x_n = \dfrac{P_{n+1}}{P_n}$. *Então*

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{3}|x_n - x_{n-1}|.$$

Demonstração: Observe que:

$$\frac{P_{n+2}}{P_{n+1}} - \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{P_{n+2}P_n - P_{n+1}P_{n+1}}{P_{n+1}P_n} =$$

$$\frac{P_n(2P_{n+1}+P_n)-P_{n+1}(2P_n+P_{n-1})}{(2P_n+P_{n-1})P_n} =$$

$$\frac{2P_nP_{n+1}+P_nP_n-2P_{n+1}P_n-P_{n+1}P_{n-1})}{(2P_n+P_{n-1})P_n} =$$

$$\frac{P_nP_n-P_{n+1}P_{n-1}}{2P_nP_n+P_{n-1}P_n} \tag{7}$$

Para todo $n > 1$, temos que $P_n > P_{n-1}$, assim,

$$2P_nP_n+P_{n-1}P_n \geq 2P_nP_{n-1}+P_nP_{n-1} = 3P_nP_{n-1}.$$

Logo,

$$\left|\frac{1}{2P_nP_n+P_{n-1}P_n}\right| < \frac{1}{|3P_nP_{n-1}|} = \frac{1}{3|P_nP_{n-1}|} \tag{8}$$

Segue de (7) e (8) que

$$\left|\frac{P_{n+2}}{P_{n+1}}-\frac{P_{n+1}}{P_n}\right| < \left|\frac{P_n^2-P_{n+1}P_{n-1}}{3P_nP_{n-1}}\right| = \frac{1}{3}\left|\frac{P_n^2}{P_nP_{n-1}}-\frac{P_{n+1}P_{n-1}}{P_nP_{n-1}}\right| = \frac{1}{3}\left|\frac{P_n}{P_{n-1}}-\frac{P_{n+1}}{P_n}\right|.$$

Portanto, $|x_{n+1}-x_n| < \frac{1}{3}\left|x_n-x_{n-1}\right|.$

Relacionado a esse teorema (1) temos a seguinte proposição.

Proposição 4. *Para todo* $n \geq 1$

$$|x_{n+1}-x_n| = \left|\frac{P_{n+2}}{P_{n+1}}-\frac{P_{n+1}}{P_n}\right| < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

Demonstração: Faremos prova por indução sobre n. No caso $n = 1$ temos:

$$\left|\frac{P_3}{P_2}-\frac{P_2}{P_1}\right| = \left|\frac{5}{2}-\frac{2}{1}\right| = \left|\frac{5}{2}-\frac{4}{2}\right| = \frac{1}{2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{1-2} = 3.$$

Suponha que $n \geq 1$,

$$\left|\frac{P_{n+2}}{P_{n+1}}-\frac{P_{n+1}}{P_n}\right| < \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}.$$

Segue do teorema (1) que

$$\left|\frac{P_{n+3}}{P_{n+2}}-\frac{P_{n+2}}{P_{n+1}}\right| < \frac{1}{3}\left|\frac{P_{n+2}}{P_{n+1}}-\frac{P_{n+1}}{P_n}\right| < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

Com esses resultados concluímos que sequência formada pela razão dos números consecutivos de Pell, $\left(\frac{P_{n+1}}{P_n}\right)$ é uma sequência de Cauchy. De fato, faça $x_{n+k} = \frac{P_{n+2+k}}{P_{n+1+k}}$, para todo $k \geq 0$ e analise:

$$|x_{n+k} - x_n| =$$
$$|x_{n+k} - x_{n+k-1} + x_{n+k-1} - x_{n+k-2} + x_{n+k-2} - \cdots - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n| \leq$$

$$|x_{n+k} - x_{n+k-1}| + |x_{n+k-1} - x_{n+k-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \leq$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n+k-1-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+k-2-2} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+j-2} = \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{3}\right)^{j} =$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{j}.$$

Agora calculando
$$S_k = \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{j} = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{k}\right).$$

Para todo $k > 0$, $\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{k}\right) < 1$. Logo, $S_k < \frac{3}{2}$ para todo $k > 0$ inteiro.

Portanto, para todo $k > 0$ inteiro,

$$|x_{n+k} - x_n| < \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}.$$

Como $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \to 0$, quando $n \to \infty$, então concluímos que a sequência $\left(\frac{P_{n+1}}{P_n}\right)_{n>0}$ é uma sequência de Cauchy.

O fato de as classes de sequências numéricas de Cauchy implicar que essas sequências são convergentes garante a existência de número real L tal que $x_n = \frac{P_{n+1}}{P_n} \to L$.

Observe que $x_1 = \frac{2}{1} = 2$. Além disso,

$$x_n = \frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{2P_n + P_{n-1}}{P_n} = 2\frac{P_n}{P_n} + \frac{P_{n-1}}{P_n} = 2 + \frac{1}{\frac{P_n}{P_{n-1}}},$$

ou seja, $x_n = 2 + \frac{1}{x_{n-1}}$.

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2 + \frac{1}{\lim_{n\to\infty} x_{n-1}}.$$

Dessa forma, $L = 2 + \frac{1}{L}$, com $L > 0$. Com isso, $L^2 - 2L - 1 = 0$ e resolvendo a equação em L temos: $L = \frac{2 + \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2.4}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$. Portanto $\frac{P_{n+1}}{P_n} \to 1 + \sqrt{2}$.

Referências

[1] Caminha, A. *Fundamentos de Cálculo*.Ed. 1. Sociedade Brasileira de Matemática,Rio de Janeiro. 2015.

[2] Hefez, A. *Curso de Algébra*, 5ª Ed., Rio de Janeiro, Impa,2016, 214p.

[3] Stedall, J. A. *A discourse concerning algebra:English algebra to 1685.*. New York,Oxford University Press Inc,p.23 2002.

[4] Teixeira, M. A. G, Craveiro, I. M. e Reis, E. S. *Números de Pell*. Curitiba, Appris,2021, 111p.

[5] Teixeira, M. A. G. *Aspectos Algébricos e Combinários dos Números de Pell e Catalan*. Dissertação (Profmat). Universidade Federal da Grande Dourados, Dourados, 2018.

Marcia A. G. Teixeira
Escola Estadual Bonifácio Camargo Gomes
<teixe_ira@hotmail.com>

Irene M. Craveiro
UFGD - Universidade Federal da Grande Dourados
<irenecraveiro@ufgd.edu.br>

Enoque S. Reis
Universidade Federal de Rondônia
<enoque.reis@unir.br>

Recebido: 14/06/2023
Publicado: 07/12/2023