



A sequência de Padovan generalizada, números harmoniosos e obras de arte

José Antonio Salvador 

Ana Cláudia Manzoli 

João Carlos Vieira Sampaio 

Resumo

É possível ampliar o espaço escolar buscando uma atuação mais crítica dos estudantes quando visitam uma exposição e observam alguns aspectos de uma obra de arte, abrindo os olhos não só para enxergar a sua beleza, estética e técnica, mas também para explorar e descobrir a matemática visível ou oculta que nela aparece. O aprendizado de vários conteúdos matemáticos pode ser favorecido quando exploramos aspectos matemáticos de obras de arte, tais como formas geométricas, razões e proporções, perímetros e áreas, funções lineares e afins, gráficos, equações polinomiais e suas raízes, equações discretas, simetrias, médias e perspectivas. Neste artigo fazemos uma análise das soluções das equações harmoniosas $x^n - x - 1 = 0$, de ordem $n \geq 2$, cujas raízes reais positivas dão-nos os números harmoniosos, especialmente o número áureo (quando $n = 2$) e o número plástico (quando $n = 3$), que têm sido relacionados com razões em quadros de renomados pintores.

Palavras-chave: Equações harmoniosas; Números harmoniosos; Obras de Arte e Matemática.

Abstract

It is possible to expand the school space seeking a more critical performance of students when they visit an exhibition and observe some aspects of a work of art, opening their eyes not only to see its beauty, aesthetics and technique, but also to explore and discover the visible or hidden mathematics that appears in it. The learning of various mathematical contents can be favored when we explore mathematical aspects of works of art, such as geometrical shapes, ratios and proportions, perimeters and areas, linear functions and the like, graphics, polynomial equations and their roots, discrete equations, symmetries, averages, perspectives. In this article we do a analysis of the solutions of the harmonious equations $x^n - x - 1 = 0$, of order $n \geq 2$, whose positive real roots give us harmonious numbers, especially the golden number (when $n = 2$) and the plastic number (when $n = 3$), which have been related to ratios in paintings by impressive painters.

Keywords: Harmonious equations; Harmonious numbers; Works of Art and Mathematics.

1. Introdução

Desde os tempos mais remotos o homem tem usado referências geométricas como formas, medidas, relações e proporções de objetos, que se tornaram fundamentais ao longo do tempo.

Acreditamos que admirar, explorar e procurar estabelecer relações entre a arte e a matemática pode favorecer o aprendizado de vários conteúdos acadêmicos.

Alberti (1404–1472) descreve em seu livro *Da Pintura* [1] a explicação de um novo procedimento para representar os objetos do espaço em uma tela, citando: *quando devo pintar eis como procedo: desenho um retângulo tão grande quanto eu quero, e o considero como sendo uma janela aberta na qual olho aquilo que será pintado nesse quadro.*

Escher (1898–1972) explora em seus quadros transformações geométricas (translações e deformações), simetrias e padrões de repetições para cobrir maravilhosamente o plano, e afirmava que, apesar de não possuir qualquer conhecimento ou treino nas ciências exatas, sentia muitas vezes que tinha mais em comum com os matemáticos do que com os seus colegas artistas.

Mondrian (1872–1944) representa em seus quadros composições de formas geométricas bastante simples e coloridas.

Portinari (1903–1962) mostrou em seus quadros a história, o povo, a cultura, a flora, a fauna, revelando a alma brasileira. Em cores fortes retratou a pobreza, as dificuldades e a dor daqueles que sofrem. Mas será que temos algo de matemática a explorar em suas obras além de um levantamento estatístico da sua produção anual enquanto viveu?

Hardy [8] comenta que o apelo para os padrões de beleza e elegância também é a força motivadora para a investigação matemática, e que as demonstrações clássicas de Euclides, de que existem infinitos números primos, do teorema de Pitágoras e de que $\sqrt{2}$ é um número irracional são esteticamente agradáveis, simples e inteligíveis mesmo para os leigos.

A observação da presença da matemática no dia a dia, na arquitetura, nas tecelagens, nas obras de arte tais como pinturas famosas sugere-nos relações interessantes em que aparecem razões e aproximações nas relações entre as medidas dos quadros e de seus elementos, gerando números especiais. Entre eles estão os números harmoniosos: o número de ouro, mais conhecido, e o número plástico, considerado por Stewart [16] um número negligenciado.

Quando olhamos para um quadro de uma pintura e afirmamos que há matemática ali, muitos poderiam duvidar. Entretanto, há muita matemática tanto visível quanto oculta nas obras de arte. Aventurando-nos neste universo artístico, podemos abrir nossos olhos para explorar conceitos matemáticos elementares como os que dizem respeito às cores, à geometria das formas e medidas, escala, perspectiva, composição, simetria, projeção, padrões e outros elementos das pinturas de grandes artistas.

A razão áurea ϕ ocorre como um limite, $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$, em que f_n é o n ésimo número da sequência de Fibonacci, enquanto que o mesmo acontece com o número plástico $\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} \approx 1,324$, em que p_n é o n ésimo número da sequência de Padovan.

Alguns autores [14, 4] citam que Leonardo da Vinci (1452–1519), um dos mais destacados como cientista, matemático, engenheiro, inventor, anatomista, pintor, escultor, arquiteto, botânico, poeta e músico do Renascimento, usou a razão áurea em diversas obras, especialmente a Mona Lisa, uma de suas pinturas mais conhecidas que está no Museu de Louvre¹ em Paris. Supõe-se que ela contenha alguns retângulos áureos, dispostos de várias maneiras, mas não existem registros que indiquem que da Vinci tenha usado o número de ouro ao pintá-la, embora a maioria dos artistas utilizem uma malha de fundo para pintar seus quadros numa escala adequada. O uso da razão áurea por da Vinci em seus quadros é no entanto refutado por [10].

Analisando a razão entre o comprimento e a largura de 565 obras de arte de diferentes pintores famosos, Olariu [12] obteve o valor médio obtido aproximadamente de 1,34, mais próximo do

¹www.louvre.fr

número plástico $p \approx 1,324718$, valor significativamente diferente do número áureo $\phi \approx 1,618$, que supostamente deveria imprimir em uma pintura uma harmonia suprema. No trabalho “Beleza e Estética: Razão áurea ou Número Plástico?” Arantes e Salvador [9] notaram que este valor, que está próximo do número plástico (ou número de Padovan), também aparece na média das razões entre as dimensões de obras de arte de renomados pintores brasileiros. O número plástico foi criado por Dom Hans van der Laan, arquiteto escocês do século 20, dentro de uma pesquisa por proporções harmoniosas na arquitetura [17].

Não questionaremos aqui os motivos do aparecimento, caso isso tenha sido aventado, deste e de outros números harmoniosos nas relações entre medidas de elementos de quadros e de peças arquitetônicas famosas. Nosso objetivo é apresentar uma análise dos *números harmoniosos de ordem* n , n natural, $n \geq 2$, que são soluções das *equações harmoniosas* $x^n - x - 1 = 0$.

Para cada número natural $k \geq 2$, definimos a *seqüência de Padovan de ordem* k como sendo a seqüência $(a_n)_{n \geq 1}$, definida por recorrência da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = \dots = a_k = 1 \\ a_n &= a_{n-(k-1)} + a_{n-k}, \text{ se } n \geq k + 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Sendo k um número natural, $k \geq 2$, chamaremos de *número harmonioso de ordem* k à única raiz real positiva r da função polinomial $h_k(x) = x^k - x - 1$.

Notemos que $h_k(x) = 0$ é a equação característica da equação discreta dada em (1). De fato, ela surge ao procurarmos soluções da equação (1) da forma $a_n = x^n$. Supondo que $a_n = x^n$, com $x \neq 0$, seja uma solução particular de (1), obtemos

$$x^n = x^{n-(k-1)} + x^{n-k}, \text{ para } n \geq k + 1$$

Colocando em evidência x^{n-k} , temos

$$(x^k - x - 1) x^{n-k} = 0$$

E, como $x^{n-k} \neq 0$ obtemos a *equação característica associada à equação discreta* (1):

$$h_k(x) = x^k - x - 1 = 0,$$

que chamaremos *equação harmoniosa de grau* k .

Casos especiais acontecem para $k = 2$ e $k = 3$. Temos que $r = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, a *razão áurea*, é a raiz real positiva da equação harmoniosa $x^2 - x - 1 = 0$ de ordem 2, e $r = \psi \approx 1,32$, o *número plástico* ou *número de Padovan*, é a raiz real positiva da equação harmoniosa $x^3 - x - 1 = 0$ de ordem 3.

1.1. Equação harmoniosa e o número de ouro

Leonardo de Pisa (1170–1250) conhecido como Fibonacci, introduziu na Europa a notação indo-arábica para os números tal como os representamos atualmente e a famosa seqüência de números naturais que leva seu nome.

Fazendo $k = 2$ na seqüência de Padovan definida por (1), obtemos a equação discreta linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes (equação de Fibonacci), definida por

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2 = 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ se } n \geq 3, \end{aligned} \tag{2}$$

sendo $x^2 - x - 1 = 0$ sua equação característica.

A equação discreta (2) ficou conhecida a partir de um problema do Livro do Cálculo (Liber Abaci) de Leonardo Fibonacci (1170–1250) para representar um modelo matemático fictício da evolução populacional de casais de coelhos, sob a hipótese de que o número de casais na população em um momento depende do número de casais nas populações de adultos em momentos anteriores.

Supondo que uma solução da equação discreta $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ seja do tipo $f_n = \lambda^n$, por substituição em (2) obtemos que λ deve satisfazer a equação característica do segundo grau associada

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad (3)$$

cujas raízes são $\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (esta sendo a *razão áurea* ϕ) e $\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ ($= -1/\phi$).

Portanto, conforme [5], a solução geral da equação discreta de Fibonacci (2) é uma combinação linear dessas raízes, ou seja, $f_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$ em que c_1 e c_2 são constantes que podem ser determinadas pelas condições iniciais $f_1 = f_2 = 1$. De fato, usando as condições $f_1 = f_2 = 1$ obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = 1 \\ c_1 \lambda_1^2 + c_2 \lambda_2^2 = 1 \end{cases}$$

cuja solução única é dada por

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ e } c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Assim, obtemos

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \quad (4)$$

Como $\lambda_1 = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803 > 1$ e $|\lambda_2| = \left|\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right| < 1$, podemos deduzir que a sequência de Fibonacci, tal como dada em (4), é uma sequência crescente e não limitada, portanto divergente.

A partir da expressão (4), podemos deduzir uma propriedade importante da sequência de Fibonacci:

o limite da razão entre um termo e seu antecessor é o número ϕ , ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Observamos que $\lambda_1 = \phi$ é raiz positiva da equação equivalente a (3), $x - 1 = \frac{1}{x}$.

Geometricamente tanto ϕ quanto $\frac{1}{\phi} = -\lambda_2 \approx 0.6180355123$ aparecem na *divisão áurea* de um segmento AB, satisfazendo à proporção geométrica $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$ como ilustrado na Figura 1. O número ϕ é a razão entre a diagonal e um lado do pentágono regular.

Voet [17] menciona que o arquiteto escocês Dom Hans van der Laan criou o *número plástico* ao buscar a divisão de um segmento AB em três partes, por pontos intermediários C e D, como na Figura 2, satisfazendo $\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{CD} = \frac{CD}{DB}$.

Denotando os comprimentos dos segmentos por $AC = a$, $CD = b$ e $DB = c$, na divisão do segmento AB proposta por van der Laan, deveremos ter

$$\frac{b + c}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

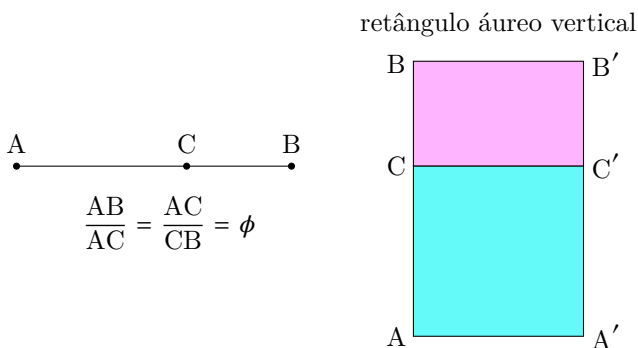


Figura 1: Razão áurea e retângulo áureo. C é o ponto de divisão áurea do segmento AB.

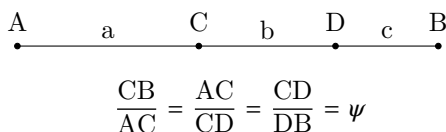


Figura 2: O número plástico ψ e a subdivisão de um segmento em razões propostas por van der Laan.

Assumindo que as três razões sejam iguais a um número ψ teremos

$$b = c\psi, \quad a = b\psi, \quad b + c = a\psi$$

Dessas igualdades, podemos deduzir que então $c\psi + c = c\psi^3$. Como $c \neq 0$, pois c é a medida do segmento DB (Figura 2), temos então $\psi^3 = \psi + 1$. Assim ψ , conhecido como *número plástico*, é raiz real positiva de $h_3(x) = x^3 - x - 1$.

Um retângulo ou quadro qualquer não goza necessariamente da mesma beleza e perfeição estéticas para diferentes pessoas. Entretanto, pode haver um retângulo que possui proporções bem elegantes para cada um de nós. *Vilarejo com ponte e mamoeiro*, de Tarsila do Amaral, possui a razão entre a diagonal e a largura próxima do número de ouro, mas existem outros quadros que apresentam outras razões harmoniosas entre seus lados.

Fazendo $k = 3$ na equação (1) obtemos a equação discreta homogênea, com coeficientes constantes, de terceira ordem,

$$\begin{aligned}
 p_0 &= p_1 = p_2 = 1 \\
 p_n &= p_{n-2} + p_{n-3}, \quad \text{se } n \geq 3,
 \end{aligned} \tag{5}$$

cuja solução dá-nos a *sequência de Padovan* $(p_n) = (1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, \dots)$.

A equação cúbica de Padovan, definida por $x^3 - x - 1 = 0$, é a equação característica associada à equação discreta (5). Tal equação possui uma única solução real $x = \psi \approx 1,324717957$, o *número plástico*.

Uma equação cúbica da forma $x^3 + px + q = 0$, com p e q reais, e $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ possui uma

única solução real x_0 , dada pela conhecida Fórmula de Cardano:

$$x_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \quad (6)$$

A fórmula de Cardano dada em (6), aplicada à equação cúbica $x^3 - x - 1 = 0$, dá-nos então o número plástico ψ em sua forma algébrica,

$$\psi = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \quad (7)$$

Como veremos adiante, a razão entre dois termos consecutivos da sequência de Padovan converge para o número plástico, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \psi$, solução real da equação cúbica de Padovan.

O número plástico aparece como uma aproximação das médias das razões entre os comprimentos e as larguras dos quadros de artistas famosos, e nos quadros *Bandeira do Divino* e *Povoação* de Tarsila do Amaral, *Baiana*, *Circo* e *Retrato de Maria* de Portinari, *Dama com arminho* de Da Vinci. Mais próxima do número plástico também é a média da razão entre os lados dos quadros de pintores brasileiros famosos como Di Cavalcante, Portinari, Tarsila do Amaral, conforme [9].

Na próxima seção, estudaremos a equação harmoniosa de grau n , $h_n(x) = x^n - x - 1 = 0$, para $n \geq 2$, que tem, para cada n , uma única raiz real positiva χ_n , o número harmonioso de ordem n . Como vimos anteriormente, para $n = 2$ e $n = 3$, a equação harmoniosa de grau n é solúvel por radicais. Intuitivamente, isso significa que as raízes da equação polinomial podem ser obtidas substituindo-se os coeficientes da equação em uma “fórmula” que envolve radicais e as quatro operações elementares de números reais, adição, multiplicação, subtração e divisão. Para $n = 2$ temos a “fórmula de Bháskara” que nos dá $\chi_2 = \phi$, a razão áurea, e para $n = 3$ temos a fórmula de Cardano que nos dá $\chi_3 = \psi$, o número plástico, expresso como em (7). A equação $h_4(x) = 0$ também é solúvel por radicais, porém a expressão algébrica para χ_4 é bastante complicada e nos dispensaremos de exibi-la aqui. O leitor interessado poderá visualizar a forma algébrica das raízes de $h_4(x)$ acessando o site WolframAlpha em <https://www.wolframalpha.com/> e digitando $x^4 - x - 1 = 0$ na janela de pesquisa. As soluções reais da equação serão dadas aproximadamente, e para visualizar suas formas algébricas basta clicar no botão Exact forms.

Keith Conrad [6] estabelece a insolubilidade por radicais da equação $x^n - x - 1 = 0$, para $n \geq 5$. O estudo da solubilidade por radicais da equação $h_n(x) = 0$, para $n \geq 5$, demanda ferramentas da Teoria de Galois, e está muito além de nossos propósitos neste artigo.

2. Algumas propriedades das equações harmoniosas

Nesta seção vamos enunciar e demonstrar quatro lemas e então demonstrar alguns teoremas importantes sobre números harmoniosos.

Lema 1. *Se $n \geq 2$ um número natural e $h_n(x) = x^n - x - 1$, temos que h_n possui uma única raiz real positiva χ_n no intervalo $[0, +\infty[$, sendo $1 < \chi_n < 2$. Além disso, $h_n(x) < 0$ se $0 \leq x < \chi_n$ e $h_n(x) > 0$ se $x > \chi_n$.*

Demonstração. Como função real de variável real, h_n é função contínua em \mathbb{R} e

$$\begin{aligned} h_n(1) &= -1 < 0 \\ h_n(2) &= 2^n - 3 > 0 \quad (\text{pois } n \geq 2) \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário [7], existe $\chi_n \in]1, 2[$ tal que $h_n(\chi_n) = 0$.

Notemos que a função real $h_n(x)$ é estritamente crescente no intervalo $[1, +\infty[$ pois, se $x \geq 1$,

$$h'_n(x) = nx^{n-1} - 1 \geq n - 1 > 0$$

Portanto, no intervalo $[1, +\infty[$, a única raiz real de h_n é o número real χ_n e, além disso,

$$\begin{aligned} h_n(x) &> 0 \text{ se } x > \chi_n, \text{ e} \\ h_n(x) &< 0 \text{ se } 1 \leq x < \chi_n \end{aligned}$$

Mostraremos então que se $0 \leq x \leq 1$ então $h_n(x) < 0$. De fato,

$$\begin{aligned} 0 \leq x < 1, \quad n \geq 2 &\Rightarrow 0 \leq x^n < x \\ &\Rightarrow x^n - x < 0 \\ &\Rightarrow x^n - x < 1, \quad \text{e assim} \\ &\Rightarrow h_n(x) = x^n - x - 1 < 0 \end{aligned}$$

Assim, sendo $n \geq 2$, temos $h_n(x) < 0$ se $0 \leq x < \chi_n$ e $h_n(x) > 0$ se $x > \chi_n$. □

Chamaremos de *número harmonioso de ordem* n ao número real χ_n , única raiz real positiva de $h_n(x) = x^n - x - 1$. Também chamaremos $h_n(x)$ de polinômio harmonioso de grau n , e $h_n(x) = 0$ de equação harmoniosa de grau n .

Lema 2. *Seja $n \geq 2$ e $h_n(x) = x^n - x - 1$. Então temos:*

- (a) *se n é par, h_n também tem uma segunda raiz real $\lambda_n \in]-1, 0[$, sendo χ_n e λ_n suas únicas raízes reais.*
- (b) *se n é ímpar, h_n não tem raízes reais negativas, sendo χ_n sua única raiz real.*

Demonstração.(a) Sendo n par, temos

$$\begin{aligned} h_n(-1) &= (-1)^n + 1 - 1 = 1 + 1 - 1 = 1 > 0 \\ h_n(0) &= -1 < 0 \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário [7], h_n tem uma raiz real λ_n no intervalo $]-1, 0[$. Como $h'_n(x) = nx^{n-1} - 1$, e $n - 1$ é ímpar, se $x < 0$ temos $x^{n-1} < 0$, e assim $h'_n(x) = nx^{n-1} - 1 < -1$. Logo, $h'_n(x) < 0$ no intervalo $]-\infty, 0[$, sendo portanto estritamente decrescente no intervalo $]-\infty, 0[$, e assim λ_n é a sua única raiz real negativa.

Como vimos na demonstração do Lema 1, χ_n é a única raiz real positiva de h_n . Portanto, se n é par então λ_n e χ_n são as únicas raízes reais de h_n .

- (b) Na demonstração do Lema 1, ficou estabelecido que, mesmo quando n é ímpar, χ_n é a única raiz real positiva de h_n . Mostraremos que $h_n = x^n - x - 1$ não possui raízes reais negativas quando n é ímpar.

Sendo n ímpar, $n \geq 3$, então

(i) se $-1 \leq x < 0$ então $-1 \leq x^n < 0$, e então somando membro a membro as inequações

$$\left. \begin{array}{l} -1 \leq x^n < 0 \\ 0 < -x \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 < x^n - x < 1$$

e portanto $h_n(x) = x^n - x - 1 < 0$ se $-1 \leq x < 0$.

(ii) se $x < -1$, podemos escrever $x = -1 - h$, $h > 0$.

Então, sendo n ímpar, temos $n \geq 3$, e então

$$\begin{aligned} x^n &= (-1 - h)^n = -(1 + h)^n \\ &= -\left(1 + nh + \binom{n}{2}h^2 + \dots\right) \\ &= -1 - nh - \binom{n}{2}h^2 - \dots \\ &< -1 - nh \\ &< -1 - h = x. \end{aligned}$$

Assim como, $x^n < x$, temos $x^n - x < 0$ e portanto, logo $h_n(x) = x^n - x - 1 < 0$.

Portanto h_n não possui raízes negativas se n é ímpar.

Por (i) e (ii), estabelecemos que $x < 0 \Rightarrow h_n(x) < 0$ e portanto h_n não possui raízes reais negativas quando n é ímpar. \square

Na Figura 3, ilustramos os gráficos das curvas polinomiais $y = h_n(x)$, com x no intervalo $[-1.5, 2]$ e y no intervalo $[-2, 1.5]$, para $n = 1, 2, 3$ e 4.

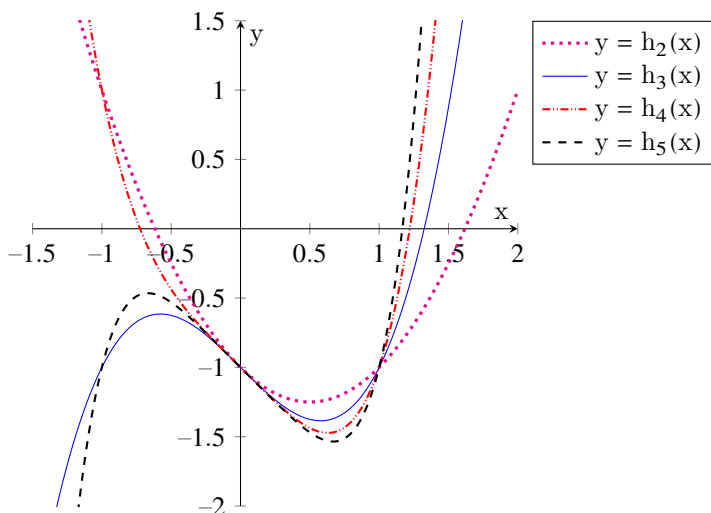


Figura 3: Gráficos de funções harmônicas no intervalo $[-1.5, 2]$.

Lema 3. Sejam z_1, z_2 números complexos não nulos. Então $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, valendo a igualdade se e somente se $z_1 = \lambda z_2$ para algum número real positivo λ .

Demonstração. Escrevemos $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$, $r_1 = |z_1|$, $r_2 = |z_2|$, $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi[$.

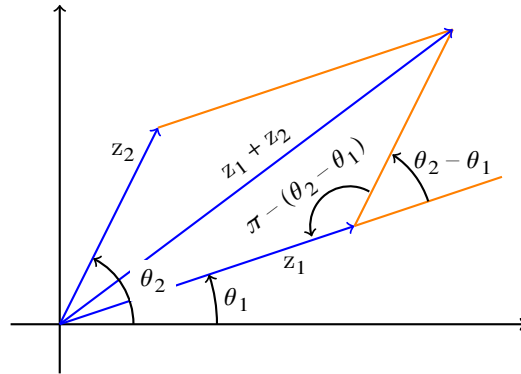


Figura 4: Diagrama para uma dedução geométrica de $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Assumindo $\theta_2 \geq \theta_1$, conforme Figura 4, pela lei dos cossenos,

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2| \cos(\pi - (\theta_2 - \theta_1)) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

e portanto $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Como pode ser visto geometricamente, teremos $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ somente quando tivermos $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$, e isso ocorrerá somente se tivermos $\cos(\theta_2 - \theta_1) = 1$. Como $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi[$, teremos necessariamente $\theta_1 - \theta_2 = 0$, ou seja, $\theta_1 = \theta_2$. Logo, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}$, e portanto $z_1 = \lambda z_2$, com $\lambda = \frac{r_1}{r_2} > 0$. □

Teorema 1. *Seja $n \geq 2$ um número natural e seja $h_n(x) = x^n - x - 1$. Seja χ_n o número harmonioso de ordem n , única raiz real positiva de $h_n(x)$, conforme o Lema 1. Se $z \in \mathbb{C}$ é raiz complexa (possivelmente real) de $h_n(x)$ e $z \neq \chi_n$ então $|z| < \chi_n$.*

Demonstração. Seja z um número complexo, $z \neq \chi_n$, e suponhamos que $h_n(z) = 0$. Pelo Lema 2 se n é par, h_n tem uma segunda raiz real $\lambda_n \in]-1, 0[$. Neste caso, podemos ter $z = \lambda_n$ e então, neste caso, $|z| = |\lambda_n| < 1 < \chi_n$. Pelo Lema 2, h_n terá somente χ_n como raiz real se n é ímpar.

Seja então z uma raiz complexa não real de h_n , isto é, tal que $h_n(z) = z^n - z - 1 = 0$. Escrevendo $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, temos $|z| = r$, $|z|^n = |z|^n = r^n$. E como $z^n = z + 1$, temos $|z|^n = |z + 1|$. Logo, pelo Lema 3, $|z|^n = |z + 1| \leq |z| + 1$. Ainda pelo Lema 3, a igualdade $|z + 1| = |z| + 1$ ocorre se e somente se $z = \lambda \cdot 1$ para algum número real positivo λ . Como z é complexo não real, temos necessariamente que $|z + 1| < |z| + 1$.

Portanto $r^n < r + 1$, isto é, $h_n(r) = r^n - r - 1 < 0$

Pelo Lema 1, o conjunto das soluções da inequação $h_n(x) < 0$, para $x \geq 0$, é o intervalo $[0, \chi_n[$. Sendo $r > 0$, temos então $0 < r < \chi_n$, isto é, $|z| < \chi_n$. □

Lema 4. Para cada inteiro n , $n \geq 2$, as n raízes complexas do polinômio $h_n(x) = x^n - x - 1$ são distintas entre si, sendo todas elas raízes simples.

Demonstração. Sabemos que se alguma raiz de $h_n(x)$ for raiz de multiplicidade 2 ou superior, ela deverá ser raiz também de $h'_n(x) = nx^{n-1} - 1$.

Seja $x \in \mathbb{C}$ tal que $h_n(x) = 0$ e $h'_n(x) = 0$. Então

$$\begin{cases} x^n - x - 1 = 0 \\ nx^{n-1} - 1 = 0 \end{cases}$$

Logo, $nx^n - x = 0$ e então, como $x^n = x + 1$, $n(x + 1) - x = 0$, daí $(n - 1)x = -n$ e assim obtemos $x = \frac{-n}{n-1}$, um número racional, sendo raiz de $h_n(x)$.

Mas pelo teorema das raízes racionais em [2] temos que sendo $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau n , $n \geq 1$, de coeficientes a_n, \dots, a_0 todos inteiros, $a_n \neq 0$, as raízes racionais de $f(x)$ são todas da forma $\frac{p}{q}$, sendo p e q inteiros primos entre si tais que p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n .

Assim, sendo as únicas possíveis raízes racionais de $h_n(x) = x^n - x - 1$ seriam $+1$ e -1 . Como isso não ocorre, isto é, nem 1 e nem -1 é raiz de $h_n(x)$, temos que $h_n(x)$ não possui raízes racionais. Logo, $\frac{-n}{n-1}$ não pode ser raiz de $h_n(x)$. Portanto $h_n(x)$ não tem raízes múltiplas. \square

Teorema 2. Seja $k \geq 2$ e seja $r = \chi_k$ o número harmonioso de ordem k , única raiz real positiva do polinômio $h_k(x) = x^k - x - 1$. Seja (a_n) a sequência de Padovan de ordem k , definida por recorrência como em (1). Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

Demonstração. Sejam $r_1, r_2, r_3, \dots, r_k$, as k raízes complexas de $h_k(x)$, sendo $r_1 = r = \chi_k$ a sua (única) raiz real positiva. Pelo Teorema 1, temos $|r_i| < r$ para $i = 2, \dots, k$.

As progressões geométricas $(r_1^n), (r_2^n), \dots, (r_k^n)$ são seqüências que satisfazem a relação de recorrência $a_n = a_{n-(k-1)} + a_{n-k}$, justamente porque $r_i^k = r_i + 1$, para cada índice i , $1 \leq i \leq k$, e então $r_i^n = r_i^{n-(k-1)} + r_i^{n-k}$ para cada índice $n \geq 1$.

Dadas as condições iniciais $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 1$, que definem a seqüência de Padovan de ordem k , mostraremos primeiramente que podemos encontrar números complexos A_1, A_2, \dots, A_k , com $A_1 \neq 0$, de tal modo que a seqüência de Padovan de ordem k tem termo geral a_n definido por

$$a_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + \dots + A_k r_k^n \tag{8}$$

Os números complexos A_1, A_2, \dots, A_k , tendo em vista as k condições iniciais $a_1 = 1, a_2 = 1, \dots, a_k = 1$ são soluções do seguinte sistema linear

$$S : \begin{cases} A_1 r_1 + A_2 r_2 + \dots + A_k r_k = 1 \\ A_1 r_1^2 + A_2 r_2^2 + \dots + A_k r_k^2 = 1 \\ \dots \\ A_1 r_1^k + A_2 r_2^k + \dots + A_k r_k^k = 1 \end{cases}$$

O determinante da matriz dos coeficientes do sistema linear S é

$$D = \det \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_k \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^k & r_2^k & \cdots & r_k^k \end{pmatrix}$$

Colocando em evidência os fatores r_1 da coluna 1, r_2 da coluna 2, etc., obtemos

$$D = r_1 r_2 \cdots r_k \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \cdots & r_k^{k-1} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Portanto,

$$D = r_1 r_2 \cdots r_k \cdot V(r_1, r_2, \dots, r_k) = r_1 r_2 \cdots r_k \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq k} (r_j - r_i)$$

sendo $V(r_1, r_2, \dots, r_k)$ é o *determinante de Vandermonde*, que aparece em (9).

Pelo lema 4, r_1, r_2, \dots, r_k são números complexos distintos entre si, portanto $D \neq 0$. Isso revela que o sistema linear S tem solução, sendo A_1, \dots, A_k determinados de maneira única. Usando a *regra de Cramer* para soluções de um sistema linear $n \times n$ quando o determinante dos coeficientes é não nulo, temos que $A_1 = \frac{D_1}{D}$ sendo

$$D_1 = \det \begin{pmatrix} 1 & r_2 & \cdots & r_k \\ 1 & r_2^2 & \cdots & r_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & r_2^k & \cdots & r_k^k \end{pmatrix}$$

Colocando em evidência os fatores r_2 da coluna 2, r_3 da coluna 3, etc., obtemos

$$D_1 = r_2 \cdots r_k \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & r_2 & \cdots & r_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & r_2^{k-1} & \cdots & r_k^{k-1} \end{pmatrix} = r_2 \cdots r_k \cdot V(1, r_2, \dots, r_k)$$

As raízes r_2, \dots, r_k são distintas entre si, e nenhuma delas é igual a 1, logo $V(1, r_2, \dots, r_k) \neq 0$ e portanto $D_1 \neq 0$. Assim, temos $A_1 = \frac{D_1}{D} \neq 0$.

Usando a expressão fechada para a_n dada pela igualdade (8), podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{A_1 r_1^{n+1} + A_2 r_2^{n+1} + \cdots + A_k r_k^{n+1}}{A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + \cdots + A_k r_k^n} \\ &= \frac{A_1 r_1^{n+1} \left(1 + \frac{A_2}{A_1} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1} + \cdots + \frac{A_k}{A_1} \left(\frac{r_k}{r_1}\right)^{n+1} \right)}{A_1 r_1^n \left(1 + \frac{A_2}{A_1} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n + \cdots + \frac{A_k}{A_1} \left(\frac{r_k}{r_1}\right)^n \right)} \\ &= \frac{r_1 \left(1 + \frac{A_2}{A_1} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1} + \cdots + \frac{A_k}{A_1} \left(\frac{r_k}{r_1}\right)^{n+1} \right)}{\left(1 + \frac{A_2}{A_1} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n + \cdots + \frac{A_k}{A_1} \left(\frac{r_k}{r_1}\right)^n \right)} \end{aligned}$$

Para cada índice i , $2 \leq i \leq k$, temos $|r_i| < r_1 = r$, logo $|\frac{r_i}{r_1}| < 1$.

Assim, para $i = 2, \dots, k$, $\lim |\frac{r_i}{r_1}|^n = 0$, e então $\lim (\frac{r_i}{r_1})^n = 0$.

Logo, $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = r_1 = r$. □

Como casos particulares do Teorema 2, para as seqüências (f_n) de Fibonacci e (p_n) de Padovan, temos $\lim \frac{f_{n+1}}{f_n} = r_1 = \phi \approx 1.618$ e $\lim \frac{p_{n+1}}{p_n} = r_1 = \psi \approx 1.32$.

Teorema 3. A seqüência de números harmoniosos é estritamente decrescente, ou seja, $\chi_{n+1} < \chi_n$ para cada $n \geq 2$.

Demonstração. Temos $\chi_{n+1}^{n+1} = \chi_{n+1} + 1$ e $\chi_n^n = \chi_n + 1$, pois χ_{n+1} e χ_n são respectivamente raízes de $h_{n+1}(x) = x^{n+1} - x - 1$ e $h_n(x) = x^n - x - 1$.

Daí, $\chi_{n+1}^n = 1 + \frac{1}{\chi_{n+1}}$ e então, como $\chi_n + 1 > 2$ e $2\chi_{n+1} > 2$, pois $1 < \chi_n < 2$,

$$\begin{aligned} \frac{\chi_{n+1}^n}{\chi_n^n} &= \frac{1 + \frac{1}{\chi_{n+1}}}{\chi_n + 1} = \frac{1}{\chi_n + 1} + \frac{1}{\chi_{n+1}(\chi_n + 1)} \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2\chi_{n+1}} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Assim, sendo $\frac{\chi_{n+1}^n}{\chi_n^n} < 1$, temos $\chi_{n+1}^n < \chi_n^n$ e portanto $\chi_{n+1} < \chi_n$. □

Observamos que a seqüência (χ_n) dos primeiros números harmoniosos aproximados, além do número de ouro 1,6183 e do número plástico 1,32472, vai se aproximando de 1 à medida que aumentamos o grau da equação harmoniosa: temos $\chi_4, \chi_5, \chi_6, \chi_7, \chi_8, \chi_9, \chi_{10}$ dados aproximadamente por (usando aqui o ponto como separador decimal) 1.22074, 1.1673, 1.13472, 1.11278, 1.09698, 1.08507, 1.07577, 1.0683.

Esta observação é consolidada pelo seguinte teorema.

Teorema 4. A seqüência de números harmoniosos (χ_n) converge para 1, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n = 1$.

Demonstração. Temos $\chi_n^n = \chi_n + 1$, logo $\chi_n = \sqrt[n]{\chi_n + 1}$.

Conforme [7], se a é um número real positivo, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1$.

Temos $1 < \chi_n < 2$, logo $2 < \chi_n + 1 < 3$ e então $\sqrt[n]{2} < \sqrt[n]{\chi_n + 1} < \sqrt[n]{3}$.

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 1$, pelo teorema do confronto em [7], temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\chi_n + 1} = 1 \quad \square$$

Assim, cometendo um abuso de linguagem, podemos dizer que o número 1 é o número infinitamente harmonioso, ou o número χ_∞ , harmonioso de ordem infinita!

3. Conclusão

Exploramos resultados sobre as equações harmônicas cujas raízes reais positivas, números harmônicos, podem estar relacionados com as medidas de obras de arte e peças de arquitetura. Não questionamos por que acontecem tais relações entre as medidas dos quadros analisados e mesmo nos elementos de algumas pinturas famosas, mas concordamos que artistas e matemáticos buscam em seus trabalhos padrões de beleza, estética e harmonia. Outros resultados em relação às equações harmônicas e suas raízes podem ser abordados com estudantes do ensino médio e licenciandos, ampliando os horizontes da matemática e do aprendizado formal e não formal, relacionado-os com as obras de arte ou com objetos do mundo em que vivemos. Acreditamos com isso que este trabalho aponta problemas matemáticos que podem ser motivados por pinturas famosas e pode conduzir professores de matemática a integrarem equipes interdisciplinares para visitas escolares a exposições em museus, conscientizando-os de que farão seus estudantes questionarem e encontrarem lá a beleza, a estética e a harmonia da matemática também.

Referências

- [1] Alberti, L. B. *Da Pintura*. trad. Antonio da Silveira Mendonça, Editora da Unicamp, Campinas, SP, 1999.
- [2] Andrade, L. N. *Raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros*. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/14/8.htm>. Acesso em: 12 fev. 2017.
- [3] Barco, L., *Arte & Matemática*, Documentário, Fundação Padre Anchieta - Centro Paulista de Rádio e TV Educativas, São Paulo. Coprodução: TV Escola 2001. Disponível em: <http://www.labeduc.fe.usp.br/?videos=arte-e-matematica>. Acesso em: 12 fev. 2017.
- [4] Bergamini, D. & editores da Life. *Mathematics*. Time Inc. New York, 1963.
- [5] Carvalho, P. C. P., e Morgado, A. C., *Matemática Discreta*. Coleção Profmat, SBM, 2014.
- [6] Conrad, K. *The Galois Group of $x^n - x - 1$ over \mathbb{Q}* . Disponível em <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/gradnumthy/galoisselmerpoly.pdf>. Acesso em 18 out. 2013.
- [7] Guidorizzi, H. L. *Um curso de cálculo, Volume 1*, 5a Ed. LTC Editora, 2008.
- [8] Hardy, G. H. *A Mathematician's Apology*. Cambridge: University Press. (2004)
- [9] Magri, M. A. e Salvador, J. A. *Beleza e Estética: Razão Áurea ou Número Plástico?* Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, volume 3, n. 1, 2015. DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0522
- [10] Markowsky, G. *Misconceptions about the Golden Ratio*. College Mathematics Journal, vol. 23, n. 1, pp. 2-19, 1992. Disponível em: <https://www.goldennumber.net/wp-content/uploads/George-Markowsky-Golden-Ratio-Misconceptions-MAA.pdf>. Acesso em 22 jul. 2023.
- [11] Marohnic, L. e Strmeèki, T. *Plastic Number: Construction and Applications*. dezembro, 2012.
- [12] Olariu, A. *Golden Section and the Art of Painting*. 1999. Disponível em: <https://archive.org/details/arxiv-physics9908036>. Acesso em 17 jul. 2023.
- [13] Padovan, R. *Dom Hans Van Der Laan and the Plastic Number*. Nexus Network Journal, vol. 4, no. 3 (Summer 2002), Disponível em: <https://www.nexusjournal.com/the-nexus-conferences/nexus-2002/148-n2002-padovan.html>. Acesso em 12 fev. 2017.
- [14] Pappas, T. *The Joy of Mathematics*. Wide World Publishing, San Carlos, CA, 1989.

- [15] Ramos, M. G. O. *Seqüência de Fibonacci e Número de Ouro*. Dissertação (mestrado). Universidade Estadual de Santa Cruz - Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, 2013.
- [16] Stewart, I. *Tales of a Neglected Number*. Scientific American, jun. 1996; 274(6):102-103. DOI: 10.1038/scientificamerican0696-102
- [17] Voet, C. *Between Looking and Making: Unravelling Dom Hans van der Laan's Plastic Number*. Architectural Histories, 4(1): 1, pp. 1-24, 2016. DOI: <http://dx.doi.org/10.5334/ah.119>.
- [18] www.tarsiladoamaral.com.br. Acesso em 02 Mar. 2020
- [19] <http://www.portinari.org.br/>. Acesso em 02 Mar. 2023.

José Antonio Salvador
DM-UFSCar
<jasalvador@ufscar.br>

Ana Cláudia Manzoli
Licenciada em Matemática - UFSCar
<anaclaudia.manzoli@gmail.com>

João Carlos Vieira Sampaio
DM-UFSCar
<sampaio@ufscar.br>

Recebido: 11/08/2023
Publicado: 12/12/2023