PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.12, n.1, 2024
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2024/pmo1201

Teoria Matricial dos Grafos: uma proposta para ser trabalhada no Ensino Médio

Hugo Santos Nunes   Gisele Costa da Silva

Resumo

A teoria matricial dos grafos é uma área da matemática que estuda a relação entre matrizes e grafos. Essa teoria é importante para entender as propriedades dos grafos, como conectividade e ciclos, por meio de operações em matrizes. A abordagem dessa teoria no ensino médio pode ser útil para a compreensão de diversos problemas práticos, como a organização de redes de comunicação, planejamento de rotas de transporte, análise de redes sociais e muito mais.

Palavras-chave: Pesquisa matemática; Teoria dos grafos; Teoria das matrizes

Abstract

The matrix theory of graphs is a mathematical area that studies the relationship between matrices and graphs. This theory is important for understanding the properties of graphs, such as connectivity and cycles, through operations on matrices. The approach of this theory in high school can be useful for understanding various practical problems, such as the organization of communication networks, planning of transportation routes, analysis of social networks and much more.

Keywords: Mathematical Research; Graph Theory; Matrix Theory

1. Introdução

O pano de fundo histórico que se conhece sobre a teoria dos grafos remonta ao século 18, quando o primeiro artigo científico sobre grafos apareceu, escrito pelo matemático suíço Leonhard Euler, em 1736. Euler baseou-se no problema das pontes de Königsberg (atual Kaliningrado) para escrever seu artigo. O problema trata das sete pontes que conectam as duas margens do rio Pregel com duas de suas ilhas. Duas das pontes ligam a ilha principal à margem oriental, e outras duas à margem ocidental. A ilha menor é conectada a cada margem por uma ponte, e a sétima ponte une as duas ilhas. O problema colocado é se seria possível que, ao partir de um local arbitrário, você retorne ao ponto de partida se cruzar cada ponte apenas uma vez. Euler provou que o grafo associado ao esquema da ponte de Königsberg não tem solução; ou seja, não é possível retornar ao nó inicial sem passar por alguma aresta duas vezes.

2. Matriz

Grafos e matrizes estão intimamente relacionados entre si. Uma matriz é um conjunto de números dispostos em linhas e colunas, de modo a formar uma matriz retangular. Algumas matrizes podem fornecer informações valiosas sobre grafos, como quantos vértices estão conectados, quantos caminhos podem existir entre 2 vértices e muito mais. Abordaremos como encontrar o número de vértices conectados entre si, bem como quantos caminhos podem existir entre 2 vértices mais à frente.

2.1. Motivação para o estudo de matrizes

O desenvolvimento da teoria e aplicações da matemática é baseado na descrição, através de modelos matemáticos, dos fenômenos que ocorrem ao nosso redor. Ao estudar um fenômeno de qualquer tipo, uma das primeiras preocupações que devemos abordar é decidir quantas características precisam ser analisadas para obter o conhecimento desejado do fenômeno. Por exemplo, em um processo de produção com m itens diferentes, onde cada um também pode ser produzido por n linhas de produção diferentes, pode ser interessante estabelecer, de forma ordenada. As tabelas aparecem em diversas situações porque são objetos eficientes para processar informações de maneira ordenada. O exemplo a seguir é um exemplo disso.

Exemplo 1. Uma empresa fabrica baterias elétricas em três tamanhos: A, B e C, e duas tensões: V_1 e V_2. O número de peças fabricadas por dia (em milhares de unidades) é dado pela tabela 1, e o preço (em centavos por unidade) é dado pela tabela 2:

Tabela 1: Nº de peças fabricadas por dia

	A	B	C
V_1	20	19	18
V_2	22	19	21

Tabela 2: Preço

	V_1	V_2
A	70	120
B	45	65
C	50	50

Como pode ser observado, as tabelas anteriores contêm as informações sobre a produção diária de cada tamanho de bateria e seus preços. Dessas tabelas podemos extrair informações implicitamente contidas nelas. Por exemplo, a soma de todos os elementos da tabela 1 dá-nos o número total de baterias de todos os tamanhos fabricadas pela empresa em um determinado dia. Se somarmos os elementos de cada coluna obteremos o número de baterias fabricadas nos tamanhos A, B e C, nas duas tensões V_1 e V_2. Se, pelo contrário, somarmos os elementos de cada linha, obteremos o número de baterias fabricadas por tensão, de todos os tamanhos.

A representação dos fenômenos de estudo por meio de tabelas pode ter objetivos muito mais gerais do que a simples representação apresentada no exemplo 1. Do ponto de vista matemático, representar um fenômeno não tem como objetivo principal sua representação, mas determinar a álgebra de operações que podem ser feitas com ele, além de estudar as ligações entre diferentes fenômenos que relacionam suas características de estudo.

Desta forma, o objetivo é determinar uma estrutura algébrica para os conjuntos cujos elementos são do tipo mostrado no exemplo 1. Para isso, partimos da construção de um conjunto, onde seus elementos são definidos de forma que possam representar e responder, por meio de operações algébricas simples, ao problema levantado em 1.

Definição 1 (Matriz)**.** Um arranjo retangular $\mathbf{A}$ com m linhas e n colunas, onde seus mn componentes são números reais, é chamada de **matriz** de ordem ou tamanho $m \times n$.

Em geral, na matriz $\mathbf{A}$, a componente da linha i e coluna j é representada por a_{ij}; então, se a matriz for de ordem $m \times n$ temos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Denotamos o conjunto que representa tudo isso por:

$$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) = \left\{\mathbf{A} \;\mid\; \mathbf{A} \text{ é uma matriz de ordem } m \times n\right\}.$$

Existem algumas matrizes que, devido à sua importância, recebem nomes particulares.

Definição 2 (Matriz Quadrada)**.** Uma matriz é dita quadrada, quando o número de linhas (m) é igual ao número de colunas (n), ou seja, $m = n$.

Definição 3 (Matriz Transposta)**.** Dada uma matriz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, denominamos a transposta de $\mathbf{A}$, e indicaremos por $\mathbf{A}^{\mathbf{T}} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, a matriz obtida trocando-se ordenadamente as linhas pelas colunas de $\mathbf{A}$.

Definição 4 (Matriz Simétrica)**.** Uma matriz quadrada $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ denomina-se simétrica quando

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}.$$

Definição 5 (Matriz Antissimétrica)**.** Uma matriz quadrada $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ denomina-se antissimétrica quando

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = -\mathbf{A}.$$

2.2. Propriedades algébricas

Agora que definimos uma matriz, apresentaremos as operações básicas. Existem três tipos de operações com matrizes que abordaremos em nosso artigo. Uma das operações que será abordada é a Adição. Embora a ordem das matrizes possa não importar ao adicionar matrizes, ambas as matrizes precisam ter o mesmo número de linhas e colunas. Uma vez confirmado que ambas as matrizes têm o mesmo número de linhas e colunas, as entradas correspondentes podem ser adicionadas.

Definição 6. A soma de duas matrizes $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ define-se como sendo a matriz $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ de modo que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall\, i, j.$$

Propriedade 1 (Adição de Matrizes)**.** *Sejam* A,B *e* C *matrizes arbitrárias em* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. *Então:*

1. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$. *(Associativa)*
2. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$. *(Comutativa)*
3. $\mathbf{A} + \mathbf{0}_{m\times n} = \mathbf{A}$. *(Elemento neutro)*
4. *Para toda matriz de ordem* $m \times n$, *existe uma matriz de mesma ordem, denotada por* $-\mathbf{A}$, *tal que* $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{A} = \mathbf{0}$. *(Simétrico)*

Outro tipo de operação com matrizes é a multiplicação de matrizes por uma constante. Essa operação é análoga à multiplicação de um número na frente de uma expressão entre parênteses, usando a propriedade distributiva.

Definição 7. A multiplicação de uma matriz, $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, por um escalar, $\alpha \in \mathbb{R}$, define-se como sendo a matriz $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$\mathbf{B} = \alpha \mathbf{A}$$

resultante da multiplicação por α de cada um dos elementos da matriz A, ou seja,

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad \forall i, j.$$

Propriedade 2 (Propriedades da Multiplicação de Matriz por Escalar)**.** *Sejam* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *matrizes de mesma ordem e* $k, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$*:*

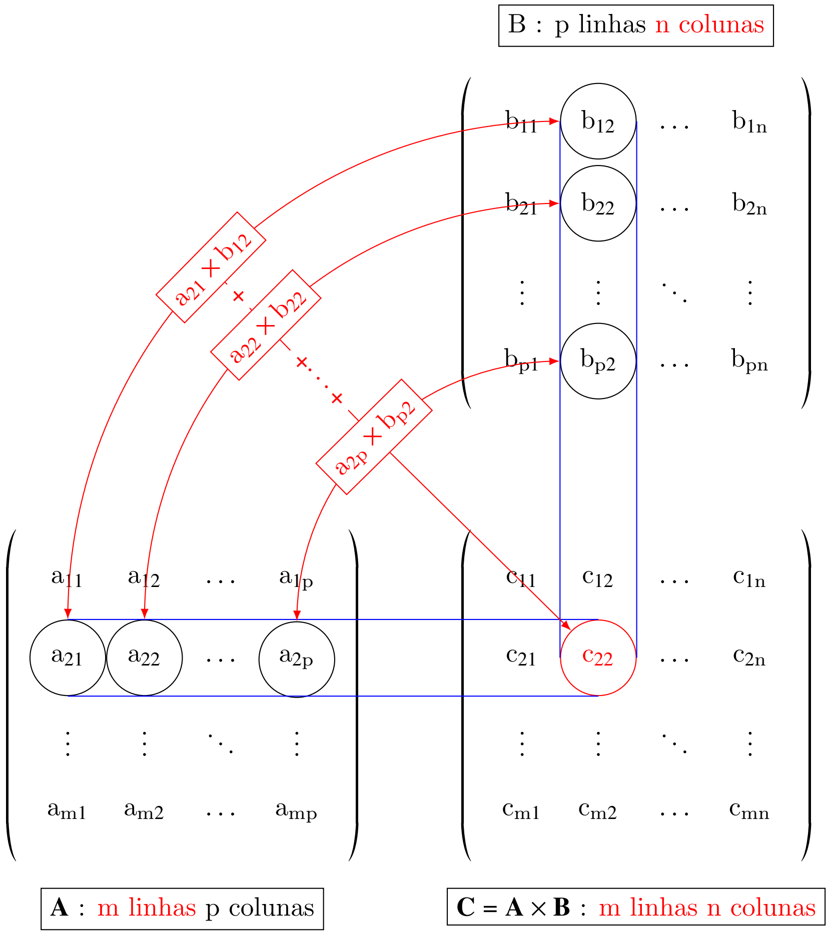
1. $(k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A}$
2. $(k_1 k_2)\mathbf{A} = k_1(k_2\mathbf{A})$
3. $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$
4. *A multiplicação do escalar* 0 *por qualquer matriz* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$*, gera a matriz nula, isto é* $0.\mathbf{A} = \mathbf{0}_{m\times n}$.
5. *Para toda matriz* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$*,* $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$
6. $(-k)\mathbf{A} = -(k\mathbf{A})$

Finalmente, a operação de matriz restante é a multiplicação de duas (ou mais) matrizes entre si. Ao multiplicar uma matriz por outra matriz, o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda matriz, caso contrário as duas matrizes não podem ser multiplicadas. Uma vez que esteja claro que este requisito foi atendido, a entrada correspondente para a primeira linha da primeira matriz deve ser multiplicada pela entrada correspondente da primeira coluna da segunda matriz. Em seguida, os produtos da multiplicação de todas as entradas da primeira linha da primeira matriz e da primeira coluna da segunda matriz seriam adicionados para encontrar a entrada correspondente para o produto. Tal processo teria que continuar até que cada linha da primeira matriz fosse multiplicada por cada coluna da segunda matriz.

Definição 8. Sejam as matrizes $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$. O produto de duas matrizes, tais que o número de colunas da primeira é igual ao número de linhas da segunda, define-se como sendo a matriz $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ cujos elementos, c_{ij}, resultam da soma dos produtos dos elementos da linha i da matriz $\mathbf{A}$ pelos elementos correspondentes da coluna j da matriz $\mathbf{B}$. Ou seja:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{AB} \\ c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}, \quad \forall i, j. \end{aligned}$$

Figura 1: Representação do produto de duas matrizes.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por que a multiplicação de matrizes é definida dessa forma? Existem muitas respostas possíveis para esta questão, mas a mais simples tem a ver com a necessidade de obter uma representação matricial simples para sistemas de equações lineares. Considere o seguinte sistema de duas equações em duas incógnitas:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}.$$

Isso pode ser representado em forma de matriz como:

$$\begin{bmatrix} 2x+3y \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

Onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \text{é chamada matriz dos coeficientes} \\ \mathbf{X} &= \text{é chamada matriz das variáveis} \\ \mathbf{B} &= \text{é chamada matriz dos termos independentes} \end{aligned}$$

Outra razão pela qual a multiplicação de matrizes é definida da maneira mostrada acima é que ela permite-nos lidar facilmente com sistemas de insumo-produto nos quais determinados produtos podem ser obtidos a partir de combinações fixas de insumos.

Exemplo 2. Uma fábrica pode produzir dois bens, denotados por B_1 e B_2, usando diferentes combinações de dois insumos, I_1 e I_2. Em particular, 2 unidades de I_1 e 1 unidade de I_2 são necessárias para produzir uma unidade de B_1, e 1 unidade de I_1 e; 3 unidades de I_2 são necessárias para produzir uma unidade de B_2. Essa informação pode ser resumida pela matriz de entrada-saída:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

onde as duas linhas correspondem às duas saídas e as duas colunas correspondem às duas entradas. Cada unidade de I_1 custa 2 reais, e cada unidade de I_2 custa 1 real. Essas informações podem ser resumidas pela matriz de preços:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar os custos de produção dos dois produtos, basta realizar a seguinte multiplicação de matrizes:

$$\begin{aligned} \mathbf{AX} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\quad \text{Multiplica as matrizes} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} \\ &\quad \text{Resolvendo} \\ &= \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, ambas as saídas têm um custo de produção de 5 reais.

Propriedade 3 (Propriedades da Multiplicação de Matrizes)**.** *Suponha que* A, B *e* C *sejam matrizes para as quais as seguintes somas e produtos estão definidos. Seja* α *um escalar. Então:*

1. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$; *(Associatividade da multiplicação)*
2. $(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}$; *(Distributiva em relação à soma pela esquerda)*
3. $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$; *(Distributiva em relação à soma pela direita)*
4. $(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{AB})$; *(Distributiva em relação ao produto escalar)*
5. $\mathrm{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}$ *e* $\mathbf{A}\mathrm{I}_n = \mathbf{A}$. *(Elemento Neutro)*

3. Grafos

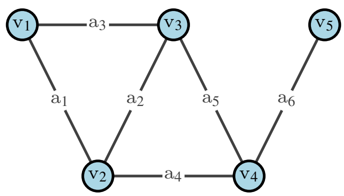
Em geral, um grafo é uma coleção de objetos, chamados vértices, que geralmente são representados geometricamente como pontos, juntamente com um conjunto de conexões entre esses vértices, chamados de arestas, que geralmente são representados como segmentos de reta. Para seu estudo é interessante então, conhecer conceitos básicos como os apresentados a seguir.

Definição 9 (Grafo)**.** Seja $V(G)$ um conjunto de vértices e $A(G)$ um conjunto de arestas ou arcos. Dá-se o nome de **grafo** ao par ordenado $G = (V, A)$, onde todo elemento $A(G)$ está relacionado a elementos de $V(G)$.

Exemplo 3. A figura abaixo fornece a representação gráfica de um grafo onde $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, sendo:

$$a_1 = (v_1, v_2),\quad a_2 = (v_2, v_3),\quad a_3 = (v_1, v_3),\quad a_4 = (v_2, v_4),\quad a_5 = (v_3, v_4)\ \text{ e }\ a_6 = (v_4, v_5).$$

Figura 2: Grafo com 5 vértices e 6 arestas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Várias situações práticas requerem que associemos sentido às arestas do grafo. Por exemplo, considere um grafo representando as ruas de um bairro. Nem todas as ruas são de mão dupla. Ao se estudar rotas é necessário considerar se as ruas são de mão única, isto é, permitem fluxo apenas no sentido (v_i, v_j) ou se são de mão dupla. Quando associamos sentido às arestas do grafo temos um grafo direcionado.

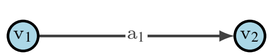
Definição 10 (Grafo direcionado)**.** Um grafo direcionado G é um par (V, A), formado por um conjunto de vértices $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e um conjunto de arestas dirigidas $A(G) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, onde cada aresta é um par ordenado de vértices (v_1, v_j).

Observação 1. Se as relações não tiverem um sentido definido, podendo a aresta ser seguida em qualquer direção, o grafo é chamado de **não direcionado**.

Em um grafo direcionado, quando dizemos que uma aresta é incidente a um vértice, queremos saber em que sentido.

Definição 11. Seja uma aresta associada ao par (v_i, v_j). Se o sentido da aresta "sai" de v_i e "chega" a v_j, dizemos que a aresta é divergente em relação a v_i e convergente em relação a v_j.

Figura 3: A aresta a_1 é divergente em relação à v_1 e convergente em relação à v_2



Fonte: Elaborado pelo autor.

Exemplo 4. A figura 4a abaixo fornece a representação gráfica de um grafo direcionado onde $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $A(G) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, sendo:

$$a_1 = (v_1, v_2), \quad a_2 = (v_1, v_3), \quad a_3 = (v_2, v_3), \quad a_4 = (v_2, v_4), \quad a_5 = (v_3, v_4) \ \text{ e } \ a_6 = (v_5, v_4).$$

Figura 4: Exemplo de grafos Direcionado e Não Direcionado.

(a) Direcionado. (b) Não Direcionado.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 12 (Laço)**.** É uma aresta que liga um vértice a ele mesmo.

Definição 13 (Arestas múltiplas)**.** Também chamada de **arestas paralela**, são arestas diferentes que possuem os mesmos vértices como extremidades.

Definição 14. Um grafo é dito:

a) **Simples:** quando ele não possui laços nem arestas múltiplas.
b) **Multigrafo:** quando o grafo possui laços e arestas múltiplas

Figura 5: Exemplo de grafos simples e multigrafo.

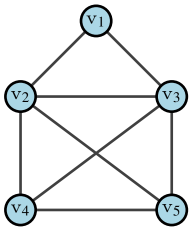
(a) Grafo Simples. (b) Multigrafo.

Fonte: Elaborado pelo autor.

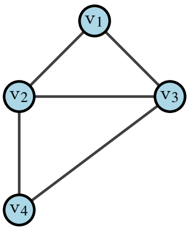
Definição 15 (Subgrafo)**.** Um grafo G' é dito um **subgrafo** de um grafo G se o conjunto de vértices $V(G') \subseteq V(G)$ e o conjunto de arestas $A(G') \subseteq A(G)$.

A figura 6 ilustra um grafo G' 6b que é subgrafo de G 6a.

Figura 6: Exemplo de grafo e subgrafo.



(a) Grafo G.

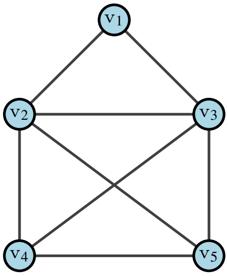


(b) Subgrafo G′.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 16 (Ordem)**.** A **ordem** de um grafo G é dada pela cardinalidade do seu conjunto de vértices, ou seja, pelo número de vértices que G possui.

Figura 7: Grafo de ordem 5.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 17 (Passeio)**.** Um passeio em um grafo G é uma sequência alternada de vértices e arestas, onde cada aresta é incidente ao vértice que a precede e ao que a sucede. Podendo ser distinguido por:

a) **Trajeto:** um passeio onde todas as arestas são distintas.

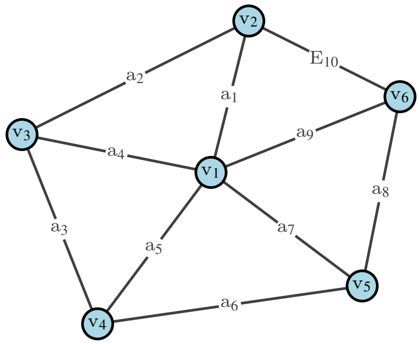
b) **Caminho:** um passeio onde todos os vértices são distintos.

Observação 2. Quando o vértice inicial é também o vértice final, formando assim um caminho fechado, ele é chamado de **Ciclo** (ou Circuito).

Definição 18 (Comprimento)**.** O **comprimento** de um passeio, trajeto ou caminho é o número de arestas que o constitui.

No grafo a seguir um passeio, por exemplo, a sequência $v_3, v_1, v_5, v_6, v_1, v_4, v_3$ que tem comprimento 6. É também um trajeto, pois não temos repetição de arestas. Um exemplo de caminho seria a sequência v_3, v_1, v_6, v_5, v_4 de comprimento 4.

Figura 8: Passeio.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 19 (Conexidade)**.** Um grafo G é **conexo** se existir pelo menos um caminho entre cada par de vértices pertencente a ele. Caso contrário, o grafo é dito **desconexo**.

Definição 20 (Incidência)**.** Dados dois vértices v_i e v_j, eles são ditos incidentes de uma aresta a_k, se eles forem os extremos de a_k.

Definição 21 (Vértices adjacentes)**.** Dados dois vértices v_i e v_j, eles são ditos adjacentes ou vizinhos se existir uma aresta a_k em comum entre eles, ou seja, quando estes forem os extremos de uma mesma aresta.

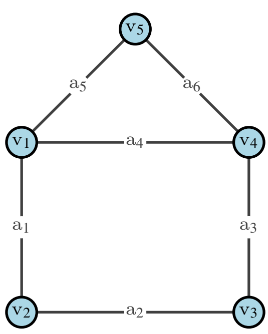
Definição 22 (Arestas adjacentes)**.** Dados duas arestas a_i e a_j, elas são ditas adjacentes se tiverem ao mesmo tempo um vértice v_k em comum.

Definição 23 (Grau de um vértice)**.** É o número de arestas que incidem em um vértice.

Definição 24. A soma dos graus dos vértices de um grafo recebe o nome de **grau do grafo**.

Exemplo 5. No grafo temos que v_1 e v_4 são vértices adjacentes, pois a aresta a_4 é comum a eles, o que faz deles também vértices incidentes na aresta a_4. Temos também, a_5 e a_6 como exemplo de arestas adjacentes, pois, v_5 é um vértice em comum entre as duas arestas. É um grafo de grau 12, resultado obtido ao somar os graus de seus vértices.

Figura 9: Grafo (Vértice e Aresta Adjacente).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Teorema 1. *O grau de um grafo é sempre um número par.*

Demonstração. Ao somarmos em um grafo os graus dos vértices cada aresta pertencente a ele é contada duas vezes. Portanto a soma será um número par. Assim, tomando m como o número de arestas do grafo:

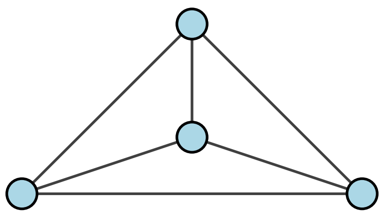
$$\sum_{v \in V} g(v) = 2m.$$

□

Definição 25 (Grafo Completo)**.** Dá-se o nome de **grafo completo** ao grafo simples em que cada um dos seus n vértices é adjacente a qualquer outro vértice. Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n.

Definição 26 (Grafo Regular)**.** Um grafo G é **regular** quando todos os seus vértices têm o mesmo grau.

Figura 10: grafo completo que é também um grafo regular, pois todos os seus vértices tem grau 3.



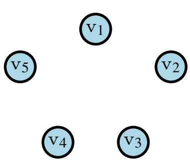
Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 27 (Grafo Nulo)**.** Um grafo simples G é **nulo** ou **vazio** quando o conjunto de arestas é vazio.

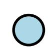
Definição 28 (Grafo Trivial)**.** Quando o grafo simples possui um único vértice, ele é dito **trivial**.

Observação 3. Perceba que todo grafo trivial é também um grafo nulo, mas nem todo grafo nulo é um grafo trivial.

Figura 11: Exemplo de grafos nulo e trivial.



(a) Grafo nulo.

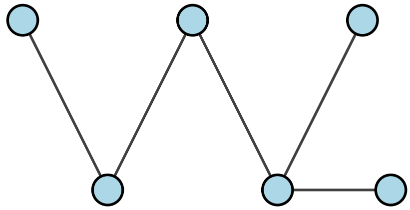


(b) Grafo trivial.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Definição 29 (Árvore)**.** Um grafo G é denominado **árvore** se ele for conexo e não possuir ciclos.

Figura 12: Árvore.



Fonte: Elaborado pelo autor.

4. Representação de um Grafo

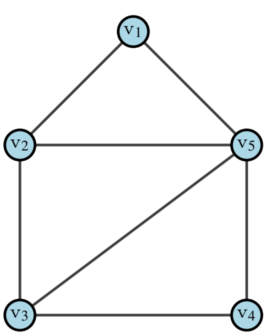
Ao se trabalhar com grafos é importante saber representá-los de maneiras diferentes, não apenas na forma de desenho. Além da representação geométrica, podemos colocar todas as informações relevantes para um grafo em forma de tabela usando matriz. É uma forma útil onde se estabelece uma relação entre grafos e álgebra, e facilita a resolução de problemas onde se tem um número elevado de ligações. Duas matrizes possíveis de serem geradas por um grafo são: matrizes de adjacência e de incidência. A construção dessas matrizes difere para grafos direcionados e não direcionados.

4.1. Para grafos não direcionados

Definição 30 (Matriz de adjacência)**.** Seja G um grafo simples com n vértices. A matriz de adjacência X é uma matriz $n \times n$, cujas entradas são:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se existe uma aresta entre os vértices } v_i \text{ e } v_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Figura 13: Grafo G e sua matriz de adjacência.



$$X = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Cada grafo pode ser expresso matematicamente na forma de uma matriz de adjacência. Assim, dada apenas a matriz de adjacência, é possível reconstruir o grafo. Nessas matrizes as linhas e colunas são atribuídas aos vértices do grafo, e a presença de uma aresta é simbolizada por um valor numérico. Usando a representação matricial do grafo podemos calcular propriedades desse grafo como grau e outras centralidades aplicando conceitos básicos de matrizes.

Observação 4.

(i) Em grafos não direcionados a relação de adjacência é simétrica, isto é, os elementos x_{ij} são iguais aos elementos x_{ji}, pois ambos os elementos são 1 quando v_i e v_j são adjacentes, e ambos os elementos são 0 caso contrário. Logo, a matriz de adjacência será uma matriz simétrica, ou seja $X = X^T$.

(ii) O grau de um vértice em um grafo não direcionado, representado por sua matriz de adjacência, pode ser obtido pela soma de sua linha (ou coluna) correspondente.

Teorema 2. *Seja* G *um grafo simples e* X *a sua matriz de adjacência. O número de passeios de comprimento* K *entre os vértices* v_i *e* v_j *de* G*, que denotaremos por* $p_{ij}(K)$*, é igual à entrada* x_{ij}^K *da matriz* X^K.

Demonstração. Vamos provar fazendo indução em K. Tomando $K = 1$, o resultado é válido, uma vez que só existe um único passeio de comprimento 1 entre os vértices v_i e v_j se existir uma aresta que os ligue, e, nesse caso, por definição de matriz de adjacência

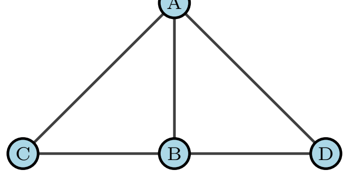
$$x_{ij} = 1 = p_{ij}(1).$$

Suponha, por indução, que para $k > 2$ o número de passeios de comprimento $k-1$ entre os vértices v_i e v_j em G é igual à entrada x_{ij}^{K-1} da matriz X^{K-1}. Vejamos para os passeios de comprimento K. Como $X^K = X^{K-1}X$. Dessa forma, para quaisquer $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, temos que

$$\begin{aligned} x_{ij}^{(K)} &= \sum_{p=1}^{n} x_{ip}^{(K-1)} x_{pj} \\ &= \sum_{p=1}^{n} p_{ip}(K-1) p_{pj}(1) \\ &= p_{ij}(K). \end{aligned}$$

Uma vez que cada passeio de comprimento $K-1$ entre os vértices i e j acrescentamos uma aresta, obtemos passeios de comprimento K. Portanto, $x_{ij}^{(K)} = p_{ij}(K)$, para todo $K \geq 1$. □

Exemplo 6. Seja um terreno com quatro reservatórios de água, alguns deles interligados por canos. Na matriz X abaixo, a posição $x_{ij} = 1$ significa que o reservatório i pode despejar água diretamente no reservatório j. Já a posição $x_{ij} = 0$ significa que o reservatórios i não despeja água no reservatório j. O fato de a diagonal principal ser nula significa que um reservatório não despeja água em si mesmo de forma direta.



$$X = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

A matriz de adjacência X contém o número de passeios de comprimento 1 entre dois reservatórios. Ou seja, $x_{12} = 1$ significa que o reservatório A despeja água diretamente para o reservatório B, sem precisar passar por um terceiro. Para calcular a matriz X^2, vamos multiplicar a matriz X por ela mesma.

$$
\begin{aligned}
X^2 &= XX \\
&= \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \\
&= \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}
\end{aligned}
$$

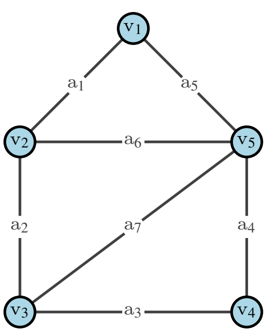
Por exemplo, olhando para a posição $x_{22}^{(2)} = 3$, significa que existem 3 caminhos que ligam B consigo mesmo:

$$B - A - B, \qquad B - C - B \quad \text{e} \quad B - D - B.$$

Definição 31 (Matriz de incidência)**.** Seja G um grafo com n vértices e m arestas. Sua matriz de incidência é uma matriz de ordem $n \times m$, denotada por $Y = [y_{ij}]$, definida como:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } a_j \text{ é incidente no } v_i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Figura 14: Grafo G e sua matriz de incidência.



$$
Y = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}
$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na matriz acima é possível observar que as linhas estão associadas aos vértices e as colunas às arestas. O elemento da linha i e coluna j é 1 quando a aresta j incide sobre o vértice i, caso contrário o elemento é 0.

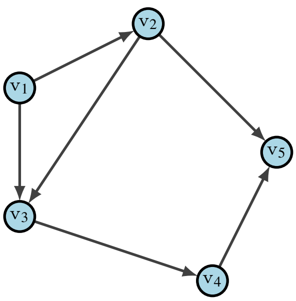
4.2. Para grafos direcionados

Em um grafo orientado suas arestas indicam um sentido, ou seja, suas arestas são pares ordenados, representados por setas, de maneira que $(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$.

Definição 32 (Matriz de adjacência)**.** Seja G um grafo direcionado com n vértices e sem arestas paralelas. A matriz de adjacência X é uma matriz $n \times n$, cujas entradas são:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se existe uma aresta direcionada do vértice } v_i \text{ para o vértice } v_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Figura 15: Grafo G e sua matriz de adjacência.



$$X = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observação 5.

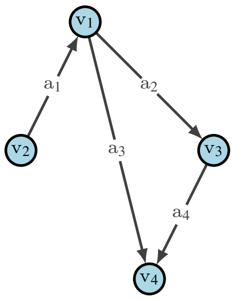
(i) Em grafos direcionados, sua matriz de adjacência não necessariamente tem que ser simétrica, pois pode não haver uma aresta de v_i para v_j.

(ii) Para um grafo direcionado, a soma dos elementos na linha i representa o grau de saída do vértice v_i, enquanto a soma dos elementos na coluna j representam o grau de entrada de v_j.

Definição 33 (Matriz de incidência)**.** Seja G um grafo direcionado com n vértices e sem arestas paralelas. A matriz de incidência Y é uma matriz $n \times n$, cujas entradas são:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } a_j \text{ diverge do vértice } v_i \\ -1, & \text{se a aresta } a_j \text{ converge do vértice } v_i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Figura 16: Grafo G e sua matriz de incidência.



$$Y = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

5. Proposta didática

Os grafos são uma importante ferramenta matemática que permite modelar e resolver problemas em diversas áreas do conhecimento, como a informática, a engenharia, a biologia, entre outras. Mas que, apesar das suas diversas aplicações, é algo que ainda não faz parte do Currículo Escolar. Sendo assim, refletir sobre propostas de se trabalhar grafos na educação básica, em especial no Ensino Médio, é algo necessário, uma vez que esse conteúdo proporciona um desenvolvimento prático da matemática de maneira significativa.

Quando se trata do processo de ensino-aprendizagem na educação básica, há uma preocupação com o desenvolvimento de competências específicas da matemática como a utilização de estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos que possibilitem ao estudante interpretar situações em diversos contextos do seu cotidiano.

Desse modo, propor uma aplicação envolvendo grafos mostra-se bastante pertinente, uma vez que auxilia no aperfeiçoamento dessas competências. Dessa forma, apresentamos aqui a proposta didática de uma sequência de atividades para o ensino dos grafos no ensino médio, que busca despertar o interesse dos alunos e tornar o aprendizado mais significativo e divertido.

- Objetivos:
  - Objetivo Geral: Conhecer a utilidade da Teoria Matricial dos Grafos para solucionar problemas.
  - Objetivos Específicos:
    - i. Trabalhar as definições e operações com matrizes;
    - ii. Conhecer as definições básicas de grafos;
    - iii. Utilizar a Teoria Matricial dos Grafos para modelar e resolver problemas;
    - iv. Desenvolver habilidades de análise e interpretação de dados.
- Recomendação: É recomendado aplicar esta atividade em turmas que já conheçam o conteúdo de Matrizes, para dar celeridade ao desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem.
- Sequência de atividades:
  1. Introdução ao conceito de grafo:

     Para introduzir o conceito de grafo, é possível começar com uma atividade prática e visual, que pode ser a construção de um grafo simples com objetos do cotidiano, como tampas de garrafa (para serem os vértices) e lápis colorido ou palitos (representando as arestas). Os alunos devem ser desafiados a conectar um determinado número de objetos de forma a criar um desenho, seguindo as seguintes regras básicas: não pode haver conexões cruzadas e todos os vértices devem estar conectados.
  2. Identificação de elementos do grafo:

     Após a introdução, é importante apresentar aos alunos os principais elementos que compõem um grafo, como vértices, arestas, grau de um vértice e caminhos. Para isso, além dos elementos utilizados pelos alunos anteriormente para a construção do grafo, pode-se utilizar exemplos do cotidiano, como as possíveis rotas de metrô em uma cidade ou as relações em redes sociais.
  3. Classificação dos grafos:

Após a compreensão dos elementos que compõem um grafo é interessante que os alunos saibam os diferentes tipos de grafo, conheçam as matrizes de adjacência, incidência e a representação matricial e gráfica dos grafos, para isso sugere-se a apresentação de maneira expositiva dialogada que permita não só ao professor apresentar os conceitos, mas discutir com seus alunos características e propriedades essenciais.

4. Modelagem para solucionar problemas com grafos:

   Os grafos são uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas. Nesta etapa, os alunos devem ser desafiados a modelar pequenos problemas do cotidiano como as possíveis rotas de ônibus entre bairros, a melhor rota a ser seguida por ele tendo que passar por pontos específicos ou a organização de um torneio esportivo da escola. Para isso, o educador pode utilizar a aplicação de um exercício prático envolvendo uma situação do cotidiano onde ele pode usar apenas materiais simples como caderno, lápis e borracha, ou trazer como diferencial o uso do *software* Geogebra para construção do Grafo.

5. Sugestão de exercício:

   João, ao sair do trabalho, precisa passar no banco, na oficina, no supermercado, na farmácia e só então retornar para casa. Para não perder tempo, ele precisa então, planejar as melhores rotas. Para o problema, suponha seis pontos, por onde João deve passar e a seguinte matriz de adjacência, com as ligações diretas entre esses pontos:

$$X = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \\ n_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & n_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

n_1 = Trabalho de João
n_2 = Banco
n_3 = Oficina
n_4 = Farmácia
n_5 = Supermercado
n_6 = Casa de João

   Devemos então:

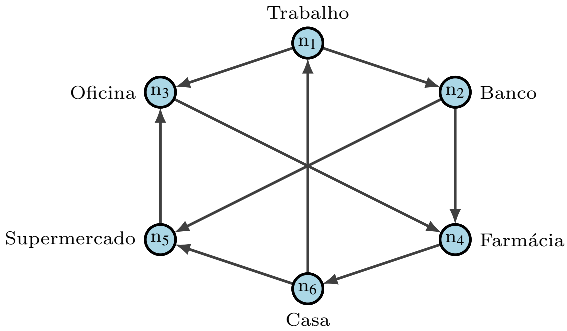
   a) Por meio de produto entre matrizes, determinar a primeira ligação que leva João do trabalho para o supermercado.

   b) Por meio de produto entre matrizes, determinar a primeira ligação que leva João do trabalho para casa.

   c) Representar graficamente o grafo da matriz X.

   Ao final da aplicação do exercício, tendo os alunos a solução para o problema apresentado, é interessante discutir com a turma as estratégias utilizadas para se chegar às respostas. Além disso, baseando-se nos resultados obtidos e analisando o grafo construído, qual seria então, na opinião deles, a melhor rota a ser seguida por João para ir do trabalho a sua casa, passando antes em todos os pontos desejados por ele.

Figura 17: Grafo do exercício proposto.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O ensino dos grafos pode ser uma atividade divertida e desafiadora para os alunos do ensino médio. Ao utilizar exemplos do cotidiano e problemas reais, é possível despertar o interesse dos alunos e tornar o aprendizado mais significativo. Além disso, as habilidades desenvolvidas no estudo dos grafos são úteis em diversas áreas do conhecimento, tornando essa proposta didática ainda mais relevante.

6. Conclusão

A teoria matricial dos grafos é um campo da matemática que estuda a relação entre matrizes e grafos. Essa teoria é uma extensão natural da teoria de grafos, que é uma ferramenta amplamente utilizada em diversas áreas, como ciência da computação, engenharia, física, biologia, entre outras. No ensino médio, a teoria de grafos é frequentemente apresentada como uma maneira de representar relações entre objetos, como vértices e arestas, e estudar propriedades dessas relações, como a conectividade e a planaridade. A teoria matricial dos grafos acrescenta uma nova dimensão a essa abordagem, mostrando como as propriedades de um grafo podem ser descritas por meio de matrizes. A teoria matricial dos grafos é fundamental em diversas aplicações práticas, como no projeto de redes de computadores, na modelagem de sistemas elétricos e mecânicos, na análise de redes sociais, na criptografia, na teoria de jogos, entre outras. O estudo das matrizes que representam grafos permite entender e otimizar esses sistemas de maneira eficiente e precisa. Por fim, é importante ressaltar que a teoria matricial dos grafos é um campo em constante evolução e que suas aplicações estão se expandindo continuamente. É uma área emocionante e relevante, que oferece oportunidades para descobertas significativas e inovações em muitas áreas do conhecimento.

Referências

[1] ANTON, Howard; BUSBY, R. C. *Álgebra Linear Contemporânea*. Bookman Editora, 2006.

[2] BOLDRINI, José Luiz *et al.* *Álgebra Linear*, 3ª edição. Harbra-Harper & Row do Brasil, São Paulo, 1984.

[3] GOLDBARG, Marco; GOLDBARG, Elizabeth. *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier, 2012.

[4] GONZÁLEZ, Eduardo Gutiérrez; OCHOA, Sandra. *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Ciudad de Mexico: Grupo Editorial Patria S. A., 2014.

[5] HUNTER, David James. *Fundamentos da matemática discreta*. LTC, 2011.

[6] JURKIEWICZ, Samuel. *Grafos – uma introdução*. São Paulo: Obmep, 2009.

[7] KOLMAN, Bernard; HILL, David R. *Introdução À Álgebra Linear com Aplicações*. Grupo Gen-LTC, 2000.

[8] LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc. *Matemática discreta-*: Coleção schaum. Bookman Editora, 2013.

[9] SOUZA, Audemir Lima. *Teoria dos grafos e aplicações*. 2013.

Hugo Santos Nunes
Instituto Federal de Alagoas
<hugo.nunes@ifal.edu.br>

Gisele Costa da Silva
<gcs5@aluno.ifal.edu.br>
Instituto Federal de Alagoas

Recebido: 29/06/2023
Publicado: 19/1/2024