PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.12, n.1, 2024
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2024/pmo123

Uma fórmula curiosa para os números de Fibonacci

Eduardo Henrique de Mattos Brietzke

Resumo

Neste artigo apresentamos uma fórmula curiosa para os números de Fibonacci e de Lucas em termos das funções hiperbólicas. Essas fórmulas foram descobertas nos anos 80, mas aparentemente foram quase esquecidas. Mostramos também como elas nos permitem dar novas demonstrações para propriedades conhecidas das sequências de Fibonacci e Lucas. É bem conhecido que existe uma correspondência entre identidades trigonométricas e identidades com funções hiperbólicas. É nosso objetivo estender essa analogia, mostando que existe uma correspondência entre identidades de funções hiperbólicas e identidades de números de Fibonacci e Lucas. Para desenvolver essas ideias, abordamos também uma identidade combinatória devida a Gould.

Palavras-chave: números de Fibonacci; números de Lucas; funções hiperbólicas; identidade de Gould.

Abstract

In this article we present a curious formula for the Fibonacci and Lucas numbers in terms of hyperbolic functions. These formulas were discovered in the 1980s, but apparently have been almost forgotten. We also show how these formulas allow us to give new proofs for well known properties of the Fibonacci and Lucas sequences. It is well known that there is a correspondence between trigonometric identities and identities with hyperbolic functions. It is our aim to extend this analogy, showing that there is a correspondence between identities of hyperbolic functions and identities of Fibonacci and Lucas numbers. To develop these ideas, we also approach a combinatorial identity due to Gould.

Keywords: Fibonacci numbers; Lucas numbers; hyperbolic functions; idendity of Gould.

1. Introdução

Nosso principal objetivo é o de apresentar uma expressão curiosa para os números de Fibonacci em termos de funções hiperbólicas

$$\mathrm{F}_{2\mathrm{n}+1} = \frac{2\cosh\left((2\mathrm{n}+1)\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)}{\sqrt{5}} \qquad \mathrm{e} \qquad \mathrm{F}_{2\mathrm{n}} = \frac{2\,\mathrm{senh}\left(2\mathrm{n}\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)}{\sqrt{5}}, \tag{1}$$

bem como uma expressão similar para os números de Lucas. Vamos ver que essas fórmulas foram descobertas nos anos 80, mas foram praticamente esquecidas. Para ilustrar a utilidade dessas expressões, vamos usá-las para dar novas demonstrações de alguns fatos bem conhecidos sobre números de Fibonacci. Em particular, vamos dar uma nova demonstração para a propriedade que diz que F_m divide F_n, se m dividir n. Usualmente essa propriedade é provada por indução. Nós vamos exibir explicitamente F_m como um fator de F_n. Para fazer isso, mostraremos uma identidade combinatória devida a Gould.

2. Números de Fibonacci e funções hiperbólicas

A sequência de Fibonacci F_n, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ é definida por

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall\, n \geqslant 2 \tag{2}$$

e começa por 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... Vamos precisar da Fórmula de Binet.

Proposição 1 (Fórmula de Binet)**.** *Para todo* $n \geqslant 0$ *vale*

$$F_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n\right]. \tag{3}$$

Demonstração. Definimos uma sequência (G_n) por

$$G_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n\right].$$

Temos que provar que $G_n = F_n$, para todo n. Para isso, basta mostrar que a sequência (G_n) safistaz a mesma recorrência (2) que a sequência de Fibonacci, ou seja, que

$$G_0 = 0, \quad G_1 = 1 \qquad \text{e} \qquad G_n = G_{n-1} + G_{n-2}, \quad \forall\, n \geqslant 2.$$

De fato, é trivial verificar que $G_0 = 0$ e $G_1 = 1$. Além disso, chamando $a = 1 + \sqrt{5}$ e $b = 1 - \sqrt{5}$, temos

$$G_n - G_{n-1} - G_{n-2} = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[a^{n-2}(a^2 - 2a - 4) + b^{n-2}(b^2 - 2b - 4)\right], \quad \forall\, n \geqslant 2.$$

Mas,

$$a^2 - 2a - 4 = (1 + 2\sqrt{5} + 5) - 2(1 + \sqrt{5}) - 4 = 0$$

e também

$$b^2 - 2b - 4 = 0.$$

Logo $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$, $\forall\, n \geqslant 2$.

□

Usaremos as funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico, definidas por

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Existe uma semelhança muito grande entre as propriedades das funções trigonométricas e as das funções hiperbólicas, conforme ilustra a tabela abaixo.

$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$	$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$
$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$	$\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$	$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$
$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$	$\operatorname{senh}(2x) = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$
$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$	$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

Estas propriedades das funções hiperbólicas podem ser demonstradas facilmente a partir das definições dessas funções. Para ilustrar como se faz isso, vamos provar uma propriedade que usaremos bastante e que é a análoga da fórmula de De Moivre para funções trigonométricas

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx).$$

Proposição 2. *Para qualquer* x *real e* $n \geqslant 0$ *inteiro,*

$$(\cosh x + \operatorname{senh} x)^n = \cosh(nx) + \operatorname{senh}(nx). \tag{4}$$

Demonstração.

$$\cosh x + \operatorname{senh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x.$$

Logo

$$(\cosh x + \operatorname{senh} x)^n = \left(e^x\right)^n = e^{nx} = \cosh(nx) + \operatorname{senh}(nx).$$

□

Observação 1. A explicação para o paralelismo entre as fórmulas para as funções trigonométricas e hiperbólicas é que, na verdade, essas funções são muito semelhantes, pelo fato de que

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Decorre disso que $\cosh x = \cos(ix)$ e $\operatorname{senh} x = i \operatorname{sen}(ix)$. Mas não vamos usar este fato.

A seguir, notamos que das definições das funções hiperbólicas segue diretamente que

$$\cosh(\ln x) = \frac{x + x^{-1}}{2} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{senh}(\ln x) = \frac{x - x^{-1}}{2}, \qquad \forall\, x > 0.$$

Substituindo x pelo número de ouro

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

e suas potências, temos

$$\cosh(n \ln \phi) = \frac{\phi^n + \phi^{-n}}{2} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{senh}(n \ln \phi) = \frac{\phi^n - \phi^{-n}}{2}. \tag{5}$$

Em particular,

$$\cosh(\ln\phi) = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{senh}(\ln\phi) = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Portanto,

$$\frac{2\cosh(\ln\phi^{\mathrm{n}})}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{\mathrm{n}} + \phi^{-\mathrm{n}}}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}} + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{n}}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2^{\mathrm{n}}\sqrt{5}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{\mathrm{n}} + \left(-1+\sqrt{5}\right)^{\mathrm{n}}\right]. \tag{7}$$

Comparando com a fórmula de Binet,

$$\mathrm{F}_{\mathrm{n}} = \frac{1}{2^{\mathrm{n}}\sqrt{5}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{\mathrm{n}} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{\mathrm{n}}\right],$$

chegamos às seguinte conclusões.

Conclusão 1: Se n for ímpar, então $\mathrm{F}_{\mathrm{n}} = \dfrac{2\cosh(\mathrm{n}\ln\phi)}{\sqrt{5}}$.

Analogamente,

$$\frac{2\operatorname{senh}(\mathrm{n}\ln\phi)}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2^{\mathrm{n}}\sqrt{5}}\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{\mathrm{n}} - \left(-1+\sqrt{5}\right)^{\mathrm{n}}\right].$$

e, novamente comparando com a fórmula de Binet, obtemos o seguinte.

Conclusão 2: Se n for par, então $\mathrm{F}_{\mathrm{n}} = \dfrac{2\operatorname{senh}(\mathrm{n}\ln\phi)}{\sqrt{5}}$.

Resumindo as conclusões acima, temos o seguinte resultado.

Proposição 3. *Denotando por* $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *o número de ouro, temos as seguintes expressões para os números de Fibonacci:*

$$\mathrm{F}_{\mathrm{n}} = \begin{cases} \dfrac{2\cosh(\mathrm{n}\ln\phi)}{\sqrt{5}}, & \textit{para } \mathrm{n} \textit{ ímpar,} \\[2ex] \dfrac{2\operatorname{senh}(\mathrm{n}\ln\phi)}{\sqrt{5}}, & \textit{para } \mathrm{n} \textit{ par.} \end{cases} \tag{8}$$

3. Números de Lucas e funções hiperbólicas

A sequência de Lucas é definida por $\mathrm{L}_{\mathrm{n}} = \mathrm{F}_{\mathrm{n}+1} + \mathrm{F}_{\mathrm{n}-1}$, para $\mathrm{n} \geqslant 0$ (tomando $\mathrm{F}_{-1} = 1$), e inicia por

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \ldots.$$

Para os números de Lucas valem expressões similares a (1), que apresentamos a seguir.

Proposição 4. *Denotando por* $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *o número de ouro, temos a seguinte expressão para os números de Lucas:*

$$\mathrm{L_n} = \begin{cases} 2\,\mathrm{senh}(\mathrm{n}\ln\phi)\,, & \textit{para } \mathrm{n} \textit{ ímpar,} \\ 2\cosh(\mathrm{n}\ln\phi)\,, & \textit{para } \mathrm{n} \textit{ par.} \end{cases} \tag{9}$$

Demonstração. Suponhamos que n seja par. Então, $\mathrm{n}+1$ e $\mathrm{n}-1$ são ímpares. Portanto, aplicando (8), temos

$$\begin{aligned} \mathrm{L_n} = \mathrm{F_{n+1}} + \mathrm{F_{n-1}} &= \frac{\cosh\big((\mathrm{n}+1)\ln\phi\big) + \cosh\big((\mathrm{n}-1)\ln\phi\big)}{\sqrt{5}/2} \\ &= \frac{2\cosh(\mathrm{n}\ln\phi)\cosh(\ln\phi)}{\cosh(\ln\phi)} = 2\cosh(\mathrm{n}\ln\phi). \end{aligned}$$

O caso n ímpar é similar. □

4. Aplicações das fórmulas para os números de Fibonacci e de Lucas

Vejamos agora como as expressões obtidas para os números de Fibonacci e de Lucas permitem obter novas demonstrações para propriedades bem conhecidas.

Observação importante. A cada identidade trigonométrica envonlvendo senos e cossenos, está associada uma identidade envolvendo as funções hiperbólicas, e desta última resulta uma identidade envolvendo números de Fibonacci ou de Lucas. Por exemplo, consideremos a identidade $\cos^2\mathrm{x} + \mathrm{sen}^2\,\mathrm{x} = 1$. A ela está associada a identidade

$$\cosh^2\mathrm{x} - \mathrm{senh}^2\,\mathrm{x} = 1.$$

Substituindo $\mathrm{x} = \mathrm{n}\ln\phi$, temos

$$\cosh^2(\mathrm{n}\ln\phi) - \mathrm{senh}^2(\mathrm{n}\ln\phi) = 1. \tag{10}$$

Se n for ímpar, resulta

$$\frac{5\mathrm{F_n^2}}{4} - \frac{\mathrm{L_n^2}}{4} = 1,$$

ou seja,

$$\mathrm{F_n^2} = \frac{\mathrm{L_n^2}+4}{5}, \qquad \text{para n ímpar.}$$

Se n for par, a mesma substituição $\mathrm{x} = \mathrm{n}\ln\phi$ em (10) resulta em

$$\frac{\mathrm{L_n^2}}{4} - \frac{5\mathrm{F_n^2}}{4} = 1,$$

ou seja,

$$F_n^2 = \frac{L_n^2 - 4}{5}, \qquad \text{para } n \text{ par.}$$

Reunindo essas duas igualdades em uma única, temos a seguinte indentidade.

Proposição 5. *Para todo* n *temos*

$$F_n^2 = \frac{L_n^2 - 4(-1)^n}{5}. \tag{11}$$

A seguir vamos mostrar como da identidade $(\cosh x + \operatorname{senh} x)^n = \cosh(nx) + \operatorname{senh}(nx)$, que é o análogo para funções hiperbólicas da Fórmula de De Moivre $(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = \cos(nx) + i \operatorname{sen}(nx)$, resulta uma identidade de Fibonacci. Para isso, introduzimos primeiro uma notação. Para $x \in \mathbb{R}$, denotamos por $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro n tal que $n \leqslant x$. Assim, por exemplo, $\lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$.

Proposição 6 (Identidades de Catalan)**.** ([6], p. 192)

$$F_n = 2^{n-1} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 5^k,$$

$$L_n = 2^{n-1} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 5^k.$$

Demonstração. Por (4), temos que

$$(\cosh \phi + \operatorname{senh} \phi)^n = \cosh(n\phi) + \operatorname{senh}(n\phi).$$

Mas, por (6),

$$\cosh \phi + \operatorname{senh} \phi = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}.$$

Então, qualquer que seja n, não importa se par ou ímpar, temos

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = (\cosh \phi + \operatorname{senh} \phi)^n = \cosh n\phi + \operatorname{senh} n\phi = \frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2} &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{5})^k \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 5^k + \frac{\sqrt{5}}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 5^k. \end{aligned}$$

Considerando dos dois lados da igualdade os termos com $\sqrt{5}$ e os termos sem $\sqrt{5}$, segue o resultado. No último passo acima usamos que se $a+b\sqrt{5} = c+d\sqrt{5}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, então $\sqrt{5} = (a-c)/(d-b)$, e , portanto, $a = c$ e $b = d$, devido à irracionalidade de $\sqrt{5}$. □

A próxima identidade resulta das fórmulas para o cosseno hiperbólico e para o seno hiperbólico de uma soma.

Proposição 7. *Seja* $n \geqslant m$.

(i) *Se* m *for par, então* $F_{n+m} + F_{n-m} = F_n L_m$.

(ii) *Se* m *for ímpar, então* $F_{n+m} + F_{n-m} = L_n F_m$.

Demonstração. Suponhamos que m seja par. Consideremos o caso n ímpar. Então, $n+m$ e $n-m$ são ambos ímpares. Portanto

$$F_{n+m} = \frac{2\cosh\big((n+m)\ln\phi\big)}{\sqrt{5}} \qquad \text{e} \qquad F_{n-m} = \frac{2\cosh\big((n-m)\ln\phi\big)}{\sqrt{5}}.$$

Então, utilizando as fórmulas dadas na tabela no início,

$$F_{n+m} + F_{n-m} = \frac{4\cosh(n\ln\phi)\cosh(m\ln\phi)}{\sqrt{5}}.$$

Como n é ímpar e m é par, temos

$$F_n = \frac{2\cosh(n\ln\phi)}{\sqrt{5}} \qquad \text{e} \qquad L_m = 2\cosh(m\ln\phi).$$

Logo $F_{n+m} + F_{n-m} = F_n L_m$.

Os outros casos são análogos. □

Corolário 1. *Para qualquer* $n \geqslant 0$, $F_{2n} = L_n F_n$.

Observação 2. A partir da definição é imediato verificar que

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

isto é, o seno hiperbólico é uma função ímpar. Combinando este fato com (4), temos que

$$\cosh(nx) + \operatorname{senh}(nx) = (\cosh x + \operatorname{senh} x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cosh^{n-k} x \cdot \operatorname{senh}^k x. \tag{12}$$

e

$$\cosh(nx) - \operatorname{senh}(nx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \cosh^{n-k} x \cdot \operatorname{senh}^k x. \tag{13}$$

Somando (12) e (13), obtemos

$$\cosh(nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \cosh^{n-2k} x \cdot \operatorname{senh}^{2k} x. \tag{14}$$

Subtraindo (13) e (12), temos

$$\operatorname{senh}(nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \cosh^{n-2k-1} x \cdot \operatorname{senh}^{2k+1} x. \tag{15}$$

Proposição 8. *Para quaisquer* m *e* n *naturais,*

$$F_{nm} = F_m \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} L_m^{n-1-2k} \big(L_m^2 - 4(-1)^m\big)^k, \tag{16}$$

Demonstração. Começamos com o caso m par. Temos que $n \cdot m$ também é par e, por (15),

$$\begin{aligned}
F_{nm} &= \frac{2\,\mathrm{senh}(nm \ln \phi)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \cosh^{n-1-2k}(m \ln \phi) \cdot \mathrm{senh}^{2k+1}(m \ln \phi) \\
&= \frac{2\,\mathrm{senh}(m \ln \phi)}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \cosh^{n-1-2k}(m \ln \phi) \cdot \big(\cosh^2(m \ln \phi) - 1\big)^k \\
&= F_m \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \left(\frac{L_m}{2}\right)^{n-1-2k} \left(\frac{L_m^2}{4} - 1\right)^k \\
&= F_m \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \big(L_m^2 - 4\big)^k L_m^{n-1-2k}.
\end{aligned}$$

Dividimos o caso m ímpar em dois subcasos, conforme a paridade de n. Supondo m e n ímpares, temos $n \cdot m$ ímpar e

$$\begin{aligned}
F_{nm} &= \frac{2\cosh(nm \ln \phi)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \cosh^{n-2k}(m \ln \phi) \cdot \mathrm{senh}^{2k}(m \ln \phi) \\
&= \frac{2\cosh(m \ln \phi)}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k} \cosh^{n-1-2k}(m \ln \phi) \cdot \big(\cosh^2(m \ln \phi) - 1\big)^k.
\end{aligned}$$

Como n é ímpar, podemos chamar $n - 1 - 2k = 2j$. Ficamos com

$$F_{nm} = F_m \cdot \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{n-1-2j} \cosh^{2j}(m \ln \phi) \cdot \mathrm{senh}^{n-1-2j}(m \ln \phi).$$

Usando combinações complementares, temos

$$\begin{aligned}
F_{nm} &= F_m \cdot \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2j+1} \cosh^{2j}(m \ln \phi) \cdot \mathrm{senh}^{n-1-2j}(m \ln \phi) \\
&= F_m \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} \big(\mathrm{senh}^2(m \ln \phi) + 1\big)^j \cdot \mathrm{senh}^{n-1-2j}(m \ln \phi).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} F_{nm} &= F_m \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} \left(\frac{L_m^2}{4}+1\right)^j \left(\frac{L_m}{2}\right)^{n-1-2j} \\ &= F_m \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} (L_m^2+4)^j L_m^{n-1-2j}. \end{aligned}$$

Finalmente, consideramos o caso m ímpar e n par. Temos que $n \cdot m$ é par e

$$\begin{aligned} F_{nm} &= \frac{2\,\mathrm{senh}(nm\ln\phi)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \cosh^{n-1-2k}(m\ln\phi)\cdot \mathrm{senh}^{2k+1}(m\ln\phi) \\ &= \frac{2\cosh(m\ln\phi)}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \cosh^{n-2-2k}(m\ln\phi)\cdot \mathrm{senh}^{2k+1}(m\ln\phi) \\ &= F_m \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \left(\frac{L_m^2}{4}+1\right)^{\frac{n-2-2k}{2}} \left(\frac{L_m}{2}\right)^{2k+1} \\ &= F_m \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} (L_m^2+4)^{\frac{n-2-2k}{2}} L_m^{2k+1}. \end{aligned}$$

Fazendo $j = \dfrac{n-2-2k}{2}$, temos

$$F_{nm} = F_m \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n}{n-1-2j} (L_m^2+4)^j L_m^{n-1-2j}.$$

Tomando combinação complementar,

$$F_{nm} = F_m \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} (L_m^2+4)^j L_m^{n-1-2j}.$$

Assim, em todos os casos, obtemos a mesma expressão (16). □

Observação 3. A referência básica sobre a relação entre identidades de funções de hiperbólicas e identidades de Fibonacci é o artigo [4] de E. Ehrhardt, de 1983, onde, em particular, são apresentadas as expressões (8) e (9) para as sequências de Fibonacci e de Lucas. Esse artigo foi publicado na revista *The Fibonacci Quarterly*, que é a principal publicação sobre números de Fibonacci e questões relacionadas. No entanto, aparentemente o assunto ficou soterrado debaixo de uma torrente de outras informações, tanto que retornou depois de duas décadas, sem fazer referência ao trabalho de Ehrhardt. Em 2005 Richard Askey, em [1], encontrou a expressão

$$F_n = \frac{2}{i^n\sqrt{5}}\,\mathrm{senh}\,(n\log(i\phi)), \qquad \text{onde} \qquad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

que é muito semelhante a (1). Acreditamos que (1) seja mais elementar, pois evita o uso de logaritmos de números complexos, que inclusive não são unicamente definidos.

Em 2007 (ver [8]), a fórmula de Askey foi usada para dar uma nova demonstração de que, se m divide n, então F_m divide F_n. Mas, novamente, foi uma demonstração por indução sem obter explicitamente F_m como um fator de F_n.

Em 2003 (ver [2]) uma expressão similar foi obtida

$$F_n = i^{n-1}\frac{\operatorname{sen}\left(n\arccos(-\frac{i}{2})\right)}{\operatorname{sen}\left(\arccos(-\frac{i}{2})\right)} \qquad \text{e} \qquad L_n = 2i^n\cos\left(n\arccos(-\frac{i}{2})\right).$$

Um método para a obtenção para as sequências de Fibonacci e Lucas dessas expressões envolvendo funções trigonométricas de argumentos complexos está explicado na dissertação de Mestrado [11] do aluno Bruno Astrolino e Silva e nas referências contidas nela.

Um outro indício de que a relação entre indentidades de funções hiperbólicas e identidades de Fibonacci foi praticamente esquecida é que o assunto não é mencionado em [7], que é uma referência bem completa e atual sobre números de Fibonacci.

5. Uma identidade combinatória de Gould

Nossa principal aplicação da representação dos números de Fibonacci e de Lucas em termo das funções hiperbólicas vai ser à propriedade de divisibilidade da sequência de Fibonacci. Vamos obter F_m explicitamente como um fator de F_n quando m divide n. Para isso, vamos precisar da seguinte identidade combinatória de Gould. É muito interessante observar como duas ideias bem diferentes juntam-se para resolver um problema matemático.

Teorema 1. ([5]) *Para quaisquer inteiros* n *e* j *com* $0 \leqslant j \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$,

$$\sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2k+1}\binom{k}{j} = 2^{n-2j}\binom{n-j}{j}. \tag{17}$$

A identidade (17) não aparece na literatura com muita frequência. Entre outros lugares, ela aparece no artigo [5] de H. W. Gould, de 1972, e também numa lista de fórmulas do Prof. Gould in 7 volumes, editadas e publicadas online pela Professora Jocelyn Quaintance. A identidade (17) e também a identidade (22) do Corolário 2 abaixo estão em [9], que é o volume 6. Esta é uma coleção enorme de fórmulas sem demonstrações.

Para provar o Teorema 1, precisamos de algumas coisas ainda.

Definição 1. Uma função f de duas variáveis é *simétrica* se $f(x,y) = f(y,x)$ para todo (x,y).

Dados α e β reais ou complexos, definimos

$$p = \alpha + \beta \qquad \text{e} \qquad q = \alpha\beta.$$

Note que p e q são funções simétricas de (α, β). Para n natural,

$$\alpha^{n} + \beta^{n} \qquad \text{e} \qquad \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

são funções simétricas polinomiais de (α, β) e, portanto, podem ser expressas como polinômios em (p, q) (ver [3], cáp. XXVII, p. 201). É fácil calcular,

n	$\alpha^{n} + \beta^{n}$	$(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})/(\alpha - \beta)$
0	2	1
1	p	p
2	$p^2 - 2q$	$p^2 - q$
3	$p^3 - 3pq$	$p^3 - 2pq$
4	$p^4 - 4p^2q + 2q^2$	$p^4 - 3p^2q + q^2$
5	$p^5 - 5p^3q + 5pq^2$	$p^5 - 4p^3q + 3pq^2$
6	$p^6 - 6p^4q + 9p^2q^2 - 2q^3$	$p^6 - 5p^4q + 6p^2q^2 - q^3$
7	$p^7 - 7p^5q + 14p^3q^2 - 7pq^3$	$p^7 - 6p^5q + 10p^3q^2 - 4pq^3$

Na coluna do meio, as condições iniciais são $\alpha^0 + \beta^0 = 2$ e $\alpha^1 + \beta^1 = p$. Na coluna da direita as condições iniciais são $(\alpha^1 - \beta^1)/(\alpha - \beta) = 1$ e $(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha - \beta) = p$. Mas em ambas as colunas cada termo é igual a p vezes o termo um passo acima menos q vezes o termo dois passos acima. De fato, é imediato verificar que

$$\alpha^{n} + \beta^{n} = p(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) - q(\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}) \tag{18}$$

e

$$\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = p\frac{\alpha^{n} - \beta^{n}}{\alpha - \beta} - q\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}. \tag{19}$$

Usando essa recorrência podemos facilmente estender a tabela.

Focando na coluna da direita da tabela e considerando só os coeficientes, sem os sinais, construímos o triângulo de números começando com

$$\begin{array}{llll}
1 & & & \\
1 & & & \\
1 & 1 & & \\
1 & 2 & & \\
1 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 3 & \\
1 & 5 & 6 & 1 \\
1 & 6 & 10 & 4
\end{array}$$

Note que se movermos a segunda coluna do triângulo um passo para cima, a terceira coluna dois passos para cima, a quarta coluna três passos para cima, e assim por diante, vamos obter o triângulo de Pascal. Por esta razão, a n-ésima linha do triângulo acima é

$$\binom{n}{0}, \quad \binom{n-1}{1}, \quad \binom{n-2}{2}, \quad \dots \quad \binom{n-k}{k}, \quad \dots$$

Tal ideia é formalizada no próximo resultado.

Proposição 9. ([3], p. 203) *Dados α e β números reais ou complexos e $n \geqslant 0$ inteiro, pondo $p = \alpha+\beta$ e $q = \alpha\beta$, temos*

$$\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n-j}{j} p^{n-2j} q^j. \tag{20}$$

Demonstração. Vamos usar a forma forte do Princípio de Indução. Suponhamos que, para um determinado n, valha que, para todo $m < n$,

$$\frac{\alpha^{m+1}-\beta^{m+1}}{\alpha-\beta} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{m-j}{j} p^{m-2j} q^j.$$

Pela recorrência (19) e usando a hipótese de indução para $m = n-1$ e para $m = n-2$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} &= p\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta} - q\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta} \\
&= p \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n-1-j}{j} p^{n-1-2j} q^j - q \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n-2-j}{j} p^{n-2-2j} q^j.
\end{aligned}$$

Na igualdade acima não precisamos nos preocupar com os limites superiores dos somatórios, pois a partir de um certo j os coeficientes binomiais se anulam. Então, podemos até considerar os somatórios como sendo para todos os $j \geqslant 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} &= \sum_{j\geqslant 0} (-1)^j \binom{n-1-j}{j} p^{n-2j} q^j - \sum_{j\geqslant 0} (-1)^j \binom{n-2-j}{j} p^{n-2-2j} q^{j+1} \\
&= \sum_{j\geqslant 0} (-1)^j \binom{n-1-j}{j} p^{n-2j} q^j + \sum_{j\geqslant 1} (-1)^j \binom{n-1-j}{j-1} p^{n-2j} q^j.
\end{aligned}$$

Na última igualdade acima, no segundo somatório foi feita a substituição de j por $j-1$. A seguir, juntamos os dois somatórios, usando que, pela Relação de Stifel,

$$\binom{n-1-j}{j} + \binom{n-1-j}{j-1} = \binom{n-j}{j}.$$

Para ser bem precisos, destacamos o primeiro termo do primeiro somatório, para que os dois somatórios passem a ser com $j \geqslant 1$, e assim possam ser juntados. Obtemos

$$\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} = \binom{n-1}{0} p^n + \sum_{j\geqslant 1} (-1)^j \binom{n-j}{j} p^{n-2j} q^j.$$

Como

$$\binom{n-1}{0} = 1 = \binom{n}{0},$$

segue que

$$\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} = \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j\binom{n-j}{j}p^{n-2j}q^j,$$

provando que, se valer para todo $m < n$, então também vale para n.Isso conclui a indução. □

Demonstração do Teorema 1. Aplicamos (20) com $\alpha = 1+\sqrt{x}$ e $\beta = 1-\sqrt{x}$. Neste caso $p = \alpha+\beta = 2$ e $q = \alpha\beta = 1-x$. Temos, então,

$$\frac{(1+\sqrt{x})^{n+1}-(1-\sqrt{x})^{n+1}}{2\sqrt{x}} = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^j\binom{n-j}{j}2^{n-2j}(1-x)^j.$$

Por outro lado, aplicando o Teorema Binomial,

$$\begin{aligned}\frac{(1+\sqrt{x})^{n+1}-(1-\sqrt{x})^{n+1}}{2\sqrt{x}} &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(\sqrt{x})^k - \frac{1}{2\sqrt{x}}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k(\sqrt{x})^k\\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n+1}{2j+1}x^j.\end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n+1}{2j+1}x^j = \sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^j\binom{n-j}{j}2^{n-2j}(1-x)^j.$$

A seguir, substituindo x por $1-x$, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^j\binom{n-j}{j}2^{n-2j}x^j &= \sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n+1}{2j+1}(1-x)^j\\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\sum_{r=0}^{j}\binom{n+1}{2j+1}\binom{j}{r}(-1)^r x^r\\ &= \sum_{r=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\sum_{j=r}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^r\binom{n+1}{2j+1}\binom{j}{r}x^r.\end{aligned}$$

No lado direito da igualdade acima, substituímos primeiro j por k e depois r por j; segue que

$$\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^j\binom{n-j}{j}2^{n-2j}x^j = \sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\sum_{k=j}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^j\binom{n+1}{2k+1}\binom{k}{j}x^j.$$

Comparando o coeficiente de x^j dos lados da igualdade, segue (17). □

Exemplo 1. Vejamos três aplicações da identidade (17) do Teorema 1. Tomando $j = 0$ em (17), reobtemos a bem conhecida expressão

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} = 2^n.$$

Tomando $j = 1$ em (17), temos

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} k = 2^{n-2}(n-1).$$

Para qualquer $n \geqslant 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{4n+1}{2n-2k} \binom{n+k}{k} = 2^{2n} \binom{3n}{n}. \tag{21}$$

De fato, substituindo n por $4n$ em (17), obtemos

$$\sum_{k=j}^{2n} \binom{4n+1}{2k+1} \binom{k}{j} = 2^{4n-2j} \binom{4n-j}{j}.$$

Tomando combinações complementares, temos

$$\sum_{k=j}^{2n} \binom{4n+1}{4n-2k} \binom{k}{k-j} = 2^{4n-2j} \binom{4n-j}{j}.$$

Substituindo k por $k + j$,

$$\sum_{k=0}^{2n-j} \binom{4n+1}{4n-2k-2j} \binom{k+k}{k} = 2^{4n-2j} \binom{4n-j}{j}.$$

Em particular, para $j = n$, temos (21).

Usando o Teorema 1, provamos uma identidade companheira para (17).

Proposição 10. ([5]) Para quaisquer inteiros n e j com $0 \leqslant j \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$,

$$\sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \binom{k}{j} = 2^{n-1-2j} \cdot \frac{n}{n-j} \binom{n-j}{j}. \tag{22}$$

Demonstração. Como

$$\binom{n+1}{2k+1} = \binom{n}{2k} + \binom{n}{2k+1},$$

temos

$$\sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \binom{k}{j} = \sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left[\binom{n+1}{2k+1} - \binom{n}{2k+1} \right] \binom{k}{j}.$$

Por (17),

$$\sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2k+1}\binom{k}{j} = 2^{n-2j}\binom{n-j}{j}$$

e

$$\sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}\binom{k}{j} = 2^{n-1-2j}\binom{n-1-j}{j}.$$

Portanto,

$$\sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}\binom{k}{j} = 2^{n-1-2j} \cdot \left[2\binom{n-j}{j} - \binom{n-1-j}{j}\right].$$

Mas,

$$\binom{n-1-j}{j} = \frac{(n-1-j)!}{j!(n-1-2j)!} = \frac{n-2j}{n-j} \cdot \frac{(n-j)!}{j!(n-2j)!} = \frac{n-2j}{n-j}\binom{n-j}{j}.$$

Segue que

$$\sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}\binom{k}{j} = 2^{n-1-2j} \cdot \left[2 - \frac{n-2j}{n-j}\right] \cdot \binom{n-j}{j},$$

provando (22). □

Observação 4. O lado direito da identidade (17)

$$2^{n-2j}\binom{n-j}{j}$$

tem uma interpretação combinatória como o número de ladrilhamentos de um retângulo $1 \times n$ usando j dominós (retângulos 1×2) brancos e $n-2j$ quadrados 1×1 azuis ou vermelhos. De fato, se quisermos contar de quantas maneiras é possível ladrilhar um tabuleiro $1 \times n$ com j dominós e com quadrados, em primeiro lugar, note que precisaremos usar $n - 2j$ quadrados, pois a soma dos comprimentos dos j dominós vale $2j$. Para efeitos de contagem, podemos colapsar os dominós, transformando-os em quadrados. Ficamos com um tabuleiro de $n - j$ casas, das quais devemos escolher j casas para cobrir com dominós colapsados, o que nos dá $\binom{n-j}{j}$ possibilidades. Este é o número de maneiras de ladrilhar um tabuleiro $1 \times n$ com j dominós e $n - 2j$ quadrados. Agora, se vamos permitir que os $n-2j$ quadrados possam ser de duas cores, vamos ter que multiplicar o coeficiente binomial $\binom{n-j}{j}$ por 2^{n-2j}. M. Shattuck mostou em [10] que o lado esquerdo da identidade (17) corresponde a contar, por outro método, os mesmos ladrilhamentos, dando assim uma demonstração combinatória dessa identidade, sem fazer cálculos.

6. Aplicação à propriedade de divisibilidade da sequência de Fibonacci

Uma sequência de inteiros $(a_n)_{n \geqslant 1}$ é dita uma *sequência de divisibilidade* se $m \mid n$ implicar $a_m \mid a_n$. Decorre do teorema a seguir que os números de Fibonacci formam uma sequência de divisibilidade.

Teorema 2. *Para quaisquer* $m, n \geqslant 0$,

$$F_{nm} = F_m \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-k}{k} L_m^{n-1-2k}, \qquad \textit{se } m \textit{ for ímpar,} \tag{23}$$

e

$$F_{nm} = F_m \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-1-k}{k} L_m^{n-1-2k}, \qquad \textit{se } m \textit{ for par.} \tag{24}$$

Demonstração. Por (16),

$$F_{nm} = F_m \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \left(L_m^2 - 4(-1)^m\right)^k L_m^{n-1-2k}.$$

Vamos analisar o polinômio

$$P(x) := \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \left(x^2 - 4(-1)^m\right)^k x^{n-1-2k}.$$

Aplicando o Teorema Binomial, temos

$$P(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{2k+1} \binom{k}{j} x^{2(k-j)} 4^j (-1)^{(m+1)j} x^{n-1-2k}.$$

Trocando a ordem dos somatórios, obtemos

$$P(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \binom{k}{j} 4^j (-1)^{(m+1)j} x^{n-1-2j}.$$

Aplicando (17) do Teorema 1, obtemos

$$P(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-j}{j} (-1)^{(m+1)j} x^{n-1-2j},$$

provando o teorema. □

Observação 5. É um fato bem conhecido que os números de Fibonacci formam uma sequência de divisibilidade, isto é, se m divide n, então F_m divide F_n. No entanto, tanto quanto saibamos, na literatura isto é sempre provado por indução, sem dar explicitamente uma expressão para o quociente F_n/F_m. No Teorema 2, mostramos que

$$F_{nm} = F_m \cdot F_n(L_m), \qquad \text{se } m \text{ é ímpar}$$

e

$$F_{nm} = F_m \cdot \tilde{F}_n(L_m), \qquad \text{se } m \text{ é par,}$$

onde $F_n(x)$ é o polinômio de Fibonacci

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-k}{k} x^{n-1-2k},$$

cujos coeficientes são uma diagonal do triângulo de Pascal, e $\tilde{F}_n(x)$ é o polinômio de Fibonacci modificado

$$\tilde{F}_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-1-k}{k} x^{n-1-2k}.$$

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. James Sellers pela indicação da referência [4]. Agradeço ao (à) parecerista pelos comentários que resultaram na melhora da redação deste artigo e pela indicação da referência [10].

Referências

[1] R. Askey – Fibonacci and Lucas Numbers. *Mathematics Teacher* 98 (2005), 610-614.

[2] N. D. Cahill, J. R. D'Errico, and J. P. Spence – Complex factorizations of the Fibonacci and Lucas numbers. *Fibonacci Quarterly* 41 (2003), 13-19.

[3] G. Chrystal – *Algebra, an Elementary Text-Book*, vol 2, 7th ed, AMS Chelsea Publishing, 1889, reprint 1999 AMS.

[4] E. Ehrhardt – Associated hyperbolic and Fibonacci identities. *The Fibonacci Quarterly* (1983), 87-96.

[5] H. W. Gould – The Case of the strange binomial identities of Professor Moriarty. *The Fibonacci Quarterly* 10 (1972), 381-391.

[6] G. H. Hardy, E. M. Whright – *An introduction to the Theory of numbers,* 6th edition. Oxford University Press, 1979.

[7] T. Koshy – *Fibonacci and Lucas numbers with applications.* John Wiley & Sons, 2001.

[8] T. J. Osler, A. Hilburn – An unusual proof that F_m divides F_{nm} using hyperbolic functions. *The Matematical Gazette* 91 (2007), 510-512.

[9] J. Quaintance – *Combinatorial Identities: Table III: Binomial Identities Derived from Trigonometric and Exponential Series From the seven unpublished manuscripts of H. W. Gould Edited and Compiled by Jocelyn Quaintance.* 2010. http://www.math.wvu.edu/~hgould/Vol.6.PDF.

[10] M. Shattuck – Combinatorial proofs of some Moriarty-type binomial coefficient identities. Integers 6 (2006), #A35.

[11] B. A. Silva – *Números de Fibonacci e números de Lucas.* Dissertação de Mestrado Profissional, Profmat, USP de São Carlos, 2017.

Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
<brietzke@mat.ufrgs.br>

Recebido: 02/09/2023
Publicado: 26/02/2024