PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.12, n.1, 2024
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2024/pmo124

O baricentro como ponto crítico de uma função

Ruthyelen Cristina Machado de Freitas   Rogério César dos Santos   Fabio Couzzi Velasco

Resumo

Dada a mediana AM de um triângulo ABC, seja P um ponto deslizante sobre a mesma. Neste artigo iremos encontrar o ponto sobre AM que otimiza a razão $\frac{PC}{PB}$ e também verificar sob que condição tal ponto crítico coincide com o baricentro. As conclusões a que chegamos foram que o ponto crítico P é tal que $PM = \frac{BC}{2}$, e que esse ponto coincide com o baricentro se e somente se o triângulo satisfaz a relação $5BC^2 = AC^2 + AB^2$. Usaremos, para a demonstração, o teorema de Stweart, a Lei dos Cossenos e o Cálculo Diferencial.

Palavras-chave: Razão Ótima; Triângulo; Baricentro; Mediana.

Abstract

Given the median AM of a triangle ABC, let P be a point sliding along it. In this article, we will find the point on AM that optimizes the ratio $\frac{PC}{PB}$ and also verify under which condition such a critical point coincides with the centroid. The conclusions we have reached are that the critical point P is such that $PM = \frac{BC}{2}$ and this point coincides with the centroid if and only if the triangle satisfies the relationship $5BC^2 = AC^2 + AB^2$. For the proof, we will employ Stewart's theorem, the Law of Cosines, e Differential Calculus.

Keywords: Optimal Ratio; Triangle; Centroid; Median.

1. Introdução

No artigo [1] de Bialostocki e Bialostocki (2011), os autores demonstraram que, dada a bissetriz AT de um triângulo ABC, como mostra a figura 1, e dado P um ponto deslizante na reta suporte $\overleftrightarrow{AT}$, então os pontos que otimizam a razão $\frac{PC}{PB} = \frac{r_1}{r_2}$ são o incentro I e o ex-incentro I_a do triângulo.

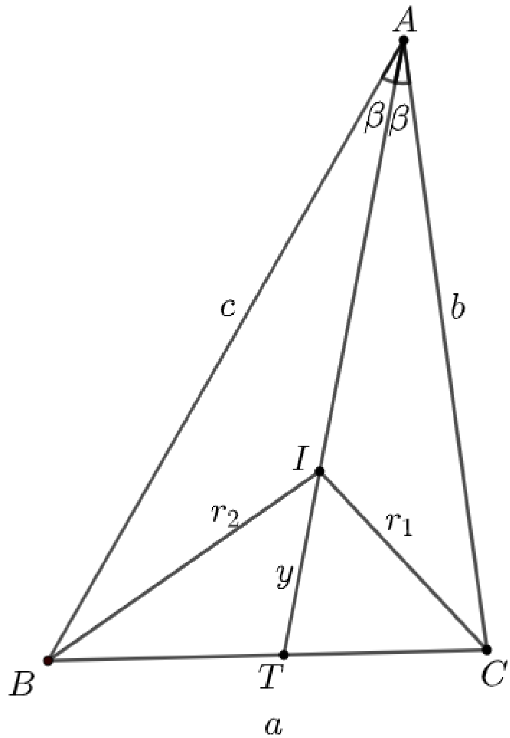

Figura 1: O ponto P na bissetriz AT que otimiza $\frac{\mathrm{r}_1}{\mathrm{r}_2}$ é o incentro I.

Bialostocki e Ely (2015) em [2] generalizaram esse problema para qualquer ceviana AT, onde T é qualquer ponto no interior de BC, não necessariamente o pé da bissetriz de $\widehat{\mathrm{A}}$. Eles demonstraram, por caminhos distintos, a seguinte proposição.

Proposição 1. *Sejam dados quaisquer dois pontos* B *e* C *do plano, uma reta* l *não perpendicular a* BC *que passa pelo interior de* BC, *e* O *o ponto interseção da mediatriz de* AB *com a reta* l, *conforme ilustra a figura 2. Considere ainda a circunferência de centro* O *e raio* OB = OC, *e* Q *a interseção dessa circunferência com a reta* l. *Então, o ponto sobre a reta* l *que otimiza a razão* $\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{PB}}$, *com* P *pertencente à* l, *é o ponto* Q.

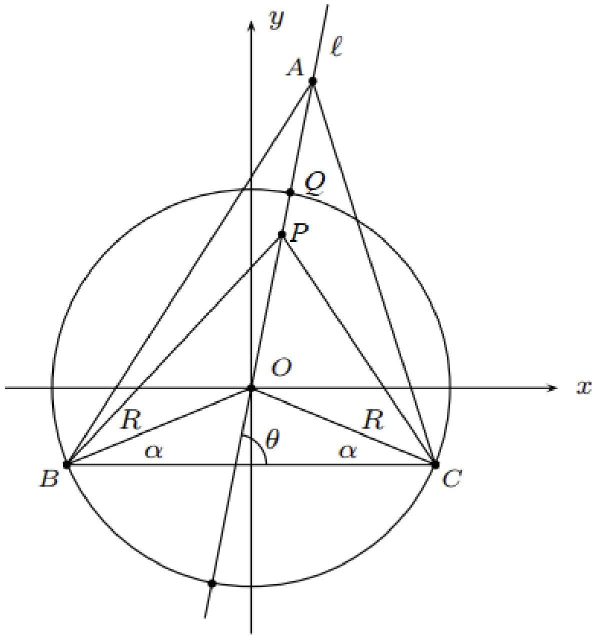

Figura 2: Figura retirada do artigo de Bialostocki e Ely (2015): o problema geral de encontrar o ponto P na reta l que otimiza a razão $\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{PB}}$, na figura, o ponto Q.

Os trabalhos [3] e [4] de Hajja (2012 e 2017) levantaram outras questões relacionadas ao tema.

Motivados por esse problema, fizemo-nos a mesma pergunta, porém substituindo a bissetriz AT da figura 1 ou a reta l da figura 2 pela mediana AM da figura 3. Nesse caso, desejamos determinar sob que condições o ponto P na mediana AM que otimiza a razão $\frac{r_1}{r_2}$ coincide com o baricentro G. No caso da bissetriz, foi provado pelos autores mencionados anteriormente que esse ponto coincide com o incentro em qualquer triângulo.

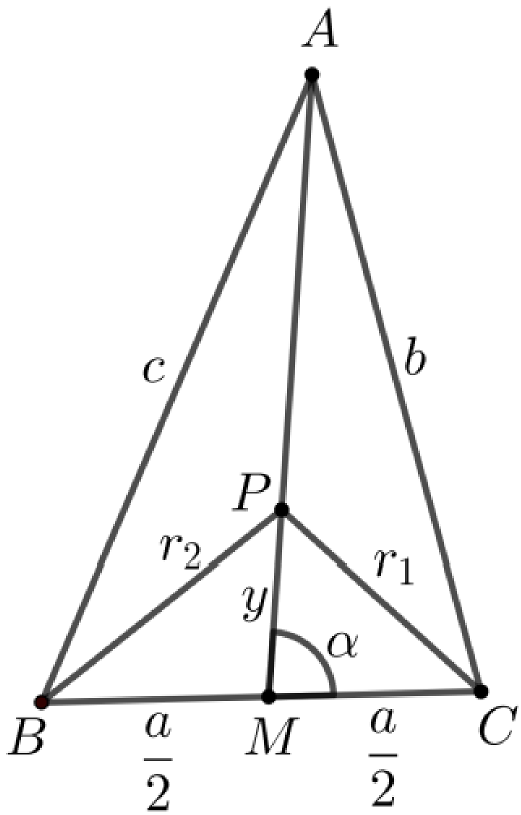

Figura 3: Dado M ponto médio de BC, queremos uma condição necessária e suficiente para que o ponto em AM que otimiza $\frac{r_1}{r_2}$ seja o baricentro do triângulo ABC.

2. Lema auxiliar

Vamos precisar do seguinte lema, para podermos enunciar e provar o teorema central do nosso artigo.

Lema 1. *Considere um triângulo* ABC *de medidas* $\mathrm{AB} = \mathrm{c}$, $\mathrm{BC} = \mathrm{a}$ *e* $\mathrm{AC} = \mathrm{b}$, *e seja* M *o ponto médio de* BC, *de modo que o ângulo* $\alpha = \angle\mathrm{AMC}$ *seja menor que noventa graus, conforme ilustra a figura 3. Seja* P *qualquer ponto na mediana* AM. *Seja* $\mathrm{y} = \mathrm{PM}$, *que depende da posição de* P *na mediana. Sejam* $\mathrm{r}_1 = \mathrm{PC}$ *e* $\mathrm{r}_2 = \mathrm{PB}$. *Defina* $\mathrm{f}(\mathrm{y}) = \frac{\mathrm{r}_1(\mathrm{y})}{\mathrm{r}_2(\mathrm{y})}$. *Então,*

$$\mathrm{f}' = 0 \iff \mathrm{y} = \pm\frac{\mathrm{a}}{2}.$$

Ou seja, os pontos críticos de f *são* $\pm\frac{\mathrm{a}}{2} = \pm\frac{\mathrm{BC}}{2}$.

Demonstração. Vamos demonstrar o lema de duas formas. A primeira, calculando os pontos críticos de f por meio da derivada. A segunda, por meio da proposição 1.

Sem perigo de confusão, vamos identificar y ao seu ponto P correspondente na mediana AM, como mostra a figura 3. Isto é, dizer que P é ponto crítico de f vai significar, para nós, que y = PM é ponto crítico de f.

Feita essa observação, vamos à prova do lema.

Definindo $g(y) = f^2(y)$, observamos que

$$g' = 0 \iff f' = 0,$$

pois:

$$g' = 0 \iff (f^2)' = 0 \iff$$
$$2 \cdot f \cdot f' = 0 \iff$$
$$f' = 0,$$

pois a função $f = \frac{r_1}{r_2}$ nunca se anula.

Logo, para a prova do lema, basta encontramos os pontos críticos de g, que serão os mesmos de f.

Similarmente à demonstração apresentada em [2], podemos utilizar a Lei dos Cossenos para estabelecer

$$r_1^2 = y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2y\frac{a}{2}\cos\alpha = y^2 + \frac{a^2}{4} - ya\cos\alpha$$

e

$$r_2^2 = y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2y\frac{a}{2}\cos(180-\alpha) = y^2 + \frac{a^2}{4} + ya\cos\alpha.$$

Logo,

$$g = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{y^2 + \frac{a^2}{4} - ya\cos\alpha}{y^2 + \frac{a^2}{4} + ya\cos\alpha} = \frac{4y^2 + a^2 - 4ya\cos\alpha}{4y^2 + a^2 + 4ya\cos\alpha}.$$

Calculando g', obtemos:

$$g' =$$
$$\frac{(8y - 4a\cos\alpha)(4y^2 + a^2 + 4ya\cos\alpha) - (8y + 4a\cos\alpha)(4y^2 + a^2 - 4ya\cos\alpha)}{(4y^2 + a^2 + 4ya\cos\alpha)^2}.$$

Então, lembrando que $\cos\alpha \neq 0$, concluímos que

$$f' = 0 \iff g' = 0 \iff$$

$$32y^3 + 8ya^2 + 32ay^2\cos\alpha - 16ay^2\cos\alpha - 4a^3\cos\alpha - 16a^2y\cos^2\alpha -$$
$$(32y^3 + 16y^2a\cos\alpha + 8ya^2 + 4a^3\cos\alpha - 32ay^2\cos\alpha - 16a^2y\cos^2\alpha) = 0$$

$$\iff$$

$$32ay^2\cos\alpha - 8a^3\cos\alpha = 0$$

$$\iff$$

$$a\cos\alpha(32y^2 - 8a^2) = 0$$

$$\iff$$

$$y^2 = \frac{a^2}{4}.$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$y = \pm\frac{a}{2},$$

como queríamos demonstrar.

□

Vamos ver a outra maneira de demonstrar o lema, utilizando a proposição 1. Observe a figura 4. Seja l a reta $\overleftrightarrow{AM}$. Então, a interseção da mediatriz de BC com l é o próprio ponto M, o ponto médio de BC. Isso implica que O = M é o centro do círculo com raio OB = OC = $\frac{a}{2}$. A interseção desse círculo com a reta l será o ponto Q na mediana AM tal que y = MQ = $\frac{a}{2}$. Pela proposição 1, esse é o ponto crítico de f, portanto, no caso da mediana.

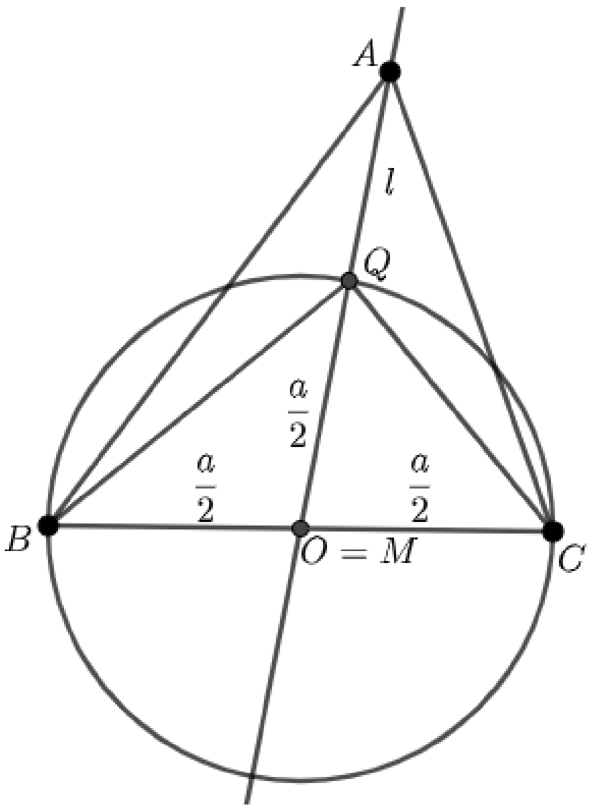

Figura 4: Outra prova do lema 1 de que o ponto crítico Q no caso da mediana é tal que MQ = $\frac{a}{2}$, por meio da proposição 1.

Observe que, como consequência do lema 1, se P é ponto crítico de f, então o triângulo BPC é retângulo em P, conforme ilustra a figura 5, pois um triângulo é retângulo se e somente se a mediana com relação a um lado mede metade desse lado.

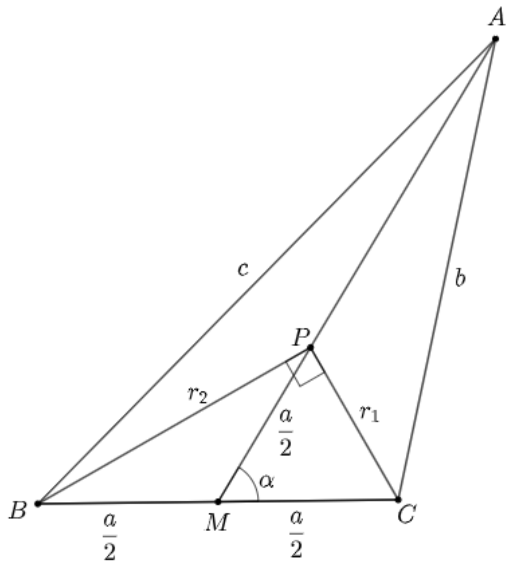

Figura 5: O ponto P em AM que minimiza $f = \frac{r_1}{r_2}$ é tal que $MP = \frac{a}{2}$ e, portanto, $B\widehat{P}C = 90°$.

Vamos classificar esses pontos críticos $y = \pm\frac{a}{2}$ encontrados.

Como $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, sabemos que $\cos\alpha > 0$. Logo, $g' > 0$ se e somente se $y > \frac{a}{2}$ ou $y < -\frac{a}{2}$, enquanto que $g' < 0$ se e somente se $-\frac{a}{2} < y < \frac{a}{2}$. Portanto, a função g é crescente no intervalo $(-\infty, -\frac{a}{2})$, decrescente no intervalo $(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$, e crescente em $(\frac{a}{2}, \infty)$.

Assim, $\frac{a}{2}$ é ponto de mínimo e $-\frac{a}{2}$ é ponto de máximo da função g. Logo, são de mínimo e de máximo da função f, respectivamente.

Vamos calcular $f\left(\frac{a}{2}\right)$ e $f\left(-\frac{a}{2}\right)$. Nos triângulos PMC e PMB da figura 5, temos, para o ponto de mínimo $\frac{a}{2}$:

$$r_1^2 = 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cos\alpha \iff$$

$$r_1^2 = \frac{a^2}{2}(1 - \cos\alpha)$$

e

$$r_2^2 = 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cos(180^0 - \alpha) \iff$$

$$r_2^2 = \frac{a^2}{2}(1 + \cos\alpha).$$

Assim,

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{r_1\left(\frac{a}{2}\right)}{r_2\left(\frac{a}{2}\right)} = \sqrt{\frac{-\cos\alpha + 1}{\cos\alpha + 1}}.$$

Para o ponto de máximo $-\frac{a}{2}$, temos que P encontra-se na reta suporte de AM, exterior ao triângulo ABC, de modo que o ângulo $C\widehat{M}P$ vale, agora, $180^0 - \alpha$, isto é, r_1 é oposto ao ângulo $180^0 - \alpha$. Por outro lado, $B\widehat{M}P$ vale α e, assim, r_2 é oposto ao ângulo α.

Logo,

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cos\alpha + 1}{-\cos\alpha + 1}} = \frac{1}{f\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

3. Resultado principal

Agora sim, vamos ao nosso teorema.

Teorema 1. *Considere novamente o triângulo* ABC *da figura 3 e seja* M *o ponto médio de* BC*, de modo que o ângulo* $\alpha = \angle AMC$ *seja menor que noventa graus. Seja* P *qualquer ponto na mediana* AM*. Seja* $y = PM$*, o qual depende da posição de* P *na mediana. Sejam* $r_1 = PC$ *e* $r_2 = PB$*. Defina* $f = \frac{r_1}{r_2}$*. Então, o baricentro* G *do triângulo* ABC *é ponto de mínimo de* f *se e somente se* $5a^2 = b^2 + c^2$

Demonstração. Para a ida, a hipótese é que o baricentro $P = G$ minimiza a razão $f = \frac{r_1}{r_2}$. A tese é que $5a^2 = b^2 + c^2$.

Como G minimiza f, então, pelo lema 1, temos que $\frac{a}{2} = GM$. Além disso, o baricentro divide a mediana na razão 2 para 1, logo, $GM = \frac{AM}{3}$.

Portanto,

$$AM = \frac{3a}{2}.$$

Sabemos, a partir do teorema de Stewart aplicado à mediana, que

$$2(b^2 + c^2) = 4AM^2 + a^2.$$

Substituindo, temos:

$$2(b^2 + c^2) = 4\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + a^2 \iff$$

$$2b^2 + 2c^2 = 9a^2 + a^2 \iff$$

$$5a^2 = b^2 + c^2.$$

Isso conclui a demonstração da ida do teorema.

Para provar a volta do teorema 1, vamos supor que

$$5a^2 = b^2 + c^2. \tag{1}$$

A tese é que o baricentro G minimiza f.

Seja P o ponto de AM que minimiza f. Então, pelo lema 1, temos que

$$\mathrm{PM} = \frac{a}{2}. \tag{2}$$

Pela relação de Stewart,

$$2(b^2 + c^2) = 4\mathrm{AM}^2 + a^2.$$

Substituindo a equação (1), temos:

$$2(5a^2) = 4\mathrm{AM}^2 + a^2 \iff$$

$$\mathrm{AM}^2 = \frac{9a^2}{4}.$$

Finalmente, pela equação (2), obtemos $\mathrm{AM} = 3 \cdot \frac{a}{2} = 3\mathrm{PM}$, e portanto, $P = G$, como queríamos demonstrar.

□

Para os triângulos tais que $5a^2 = b^2 + c^2$, isto é, em que G é o ponto mínimo de f, é possível calcular $\cos\alpha$ do seguinte modo. Primeiro, lembremos que para esses triângulos, vale $\mathrm{AM} = \frac{3a}{2}$. Logo, observando o triângulo AMC da figura 5, temos:

$$b^2 = \mathrm{AM}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \mathrm{AM} \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\alpha \iff$$

$$b^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\alpha \iff$$

$$b^2 = \frac{10a^2}{4} - \frac{6a^2}{4}\cos\alpha \iff$$

$$4b^2 = a^2(10 - 6\cos\alpha) \iff$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{6}\left(10 - \frac{4b^2}{a^2}\right) \iff$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}\left(5 - \frac{2b^2}{a^2}\right).$$

Esse cálculo permite-nos, ainda, obter o valor mínimo de f, $f\left(\frac{a}{2}\right)$, em termos de a e b:

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{-\cos\alpha + 1}{\cos\alpha + 1}} =$$

$$\sqrt{\frac{-\frac{1}{3}\left(5 - \frac{2b^2}{a^2}\right) + 1}{\frac{5}{3} - \frac{2b^2}{3a^2} + 1}} =$$

$$\sqrt{\frac{-\frac{2}{3}+\frac{2b^2}{3a^2}}{\frac{8}{3}-\frac{2b^2}{3a^2}}} =$$

$$\sqrt{\frac{-2a^2+2b^2}{8a^2-2b^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{b^2-a^2}{4a^2-b^2}}.$$

Também, o valor máximo:

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{a}{2}\right)} =$$

$$\sqrt{\frac{4a^2-b^2}{b^2-a^2}}.$$

4. Aplicações no GeoGebra

A recíproca do teorema permite-nos obter e esboçar no GeoGebra exemplos de triângulos cujo baricentro minimiza f. Observe que, como $A\widehat{M}C < 90^0$, ao considerarmos os triângulos AMC e AMB, devemos ter $c > b$.

Por exemplo, o triângulo com lados $a = 13$, $b = 19$ e $c = 22$, no qual

$$5a^2 = 5 \cdot 13^2 =$$

$$5 \cdot 169 = 5 \cdot (170 - 1) = 850 - 5 = 845$$

e

$$b^2 + c^2 = 19^2 + 22^2 =$$

$$(20-1)^2 + (20+2)^2 = 400 - 40 + 1 + 400 + 80 + 4 = 845.$$

A figura 6 ilustra.

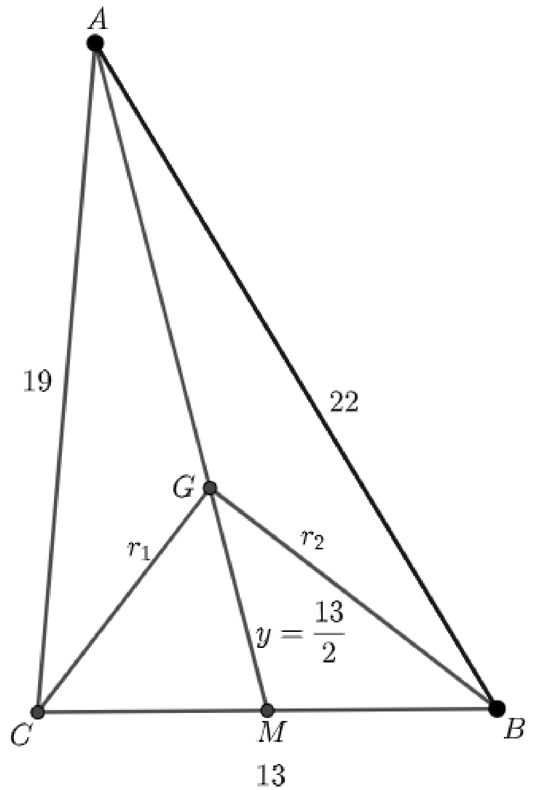

Figura 6: Um triângulo no qual o ponto na mediana AM que otimiza $\frac{r_1}{r_2}$ é o baricentro G.

Calculando o ângulo $\mathrm{A\widehat{M}C}$, temos:

$$\mathrm{A\widehat{M}C} = \alpha = \arccos\left[\frac{1}{3}\left(5 - \frac{2b^2}{a^2}\right)\right] =$$

$$\arccos\left[\frac{1}{3}\left(5 - \frac{2 \cdot 19^2}{13^2}\right)\right] \approx$$

$$\arccos 0,2526 \approx 75,96^0.$$

Calculando o valor mínimo de f:

$$f\left(\frac{a}{2}\right) =$$

$$\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{4a^2 - b^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{19^2 - 13^2}{4 \cdot 13^2 - 19^2}} \approx 0,78.$$

O valor máximo de f:

$$\mathrm{f}\left(-\frac{\mathrm{a}}{2}\right) \approx \frac{1}{0,78} \approx 1,28.$$

A figura 7 ilustra uma parte do triângulo ABC e indica todas essas medidas.

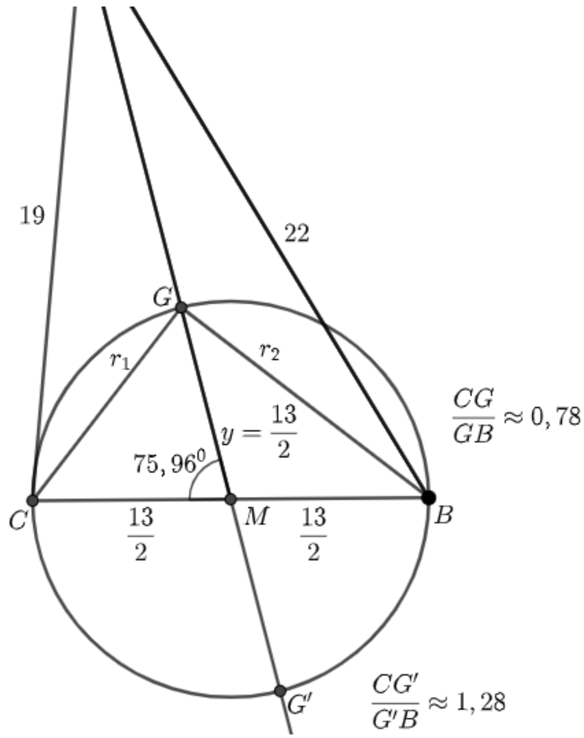

Figura 7: Valores máximo e mínimo de f para um triângulo tal que G é ponto de mínimo.

Outro exemplo seria um triângulo de medidas a = 52, b = 76 e c = 88.

Nesses dois casos, o ponto na mediana que minimiza f é o baricentro do triângulo ABC, de acordo com a volta do teorema.

5. Conclusões

Concluímos portanto que, dados um triângulo ABC, M o ponto médio de BC, P ponto deslizante de AM, $\mathrm{r}_1 = \mathrm{PC}$ e $\mathrm{r}_2 = \mathrm{PB}$, conforme ilustra a figura 8, então o ponto de mínimo da função $\mathrm{f} = \frac{\mathrm{r}_1}{\mathrm{r}_2}$ é $\mathrm{y} = \frac{\mathrm{a}}{2}$ e, nesse ponto, sendo $\alpha = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{C}$,

$$\mathrm{f}\left(\frac{\mathrm{a}}{2}\right) = \sqrt{\frac{-\cos\alpha + 1}{\cos\alpha + 1}}.$$

O valor máximo de f é $\frac{1}{f\left(\frac{a}{2}\right)}$.

Também concluímos que esse ponto de mínimo $y = \frac{a}{2}$ incide no baricentro se e somente se $5a^2 = b^2 + c^2$.

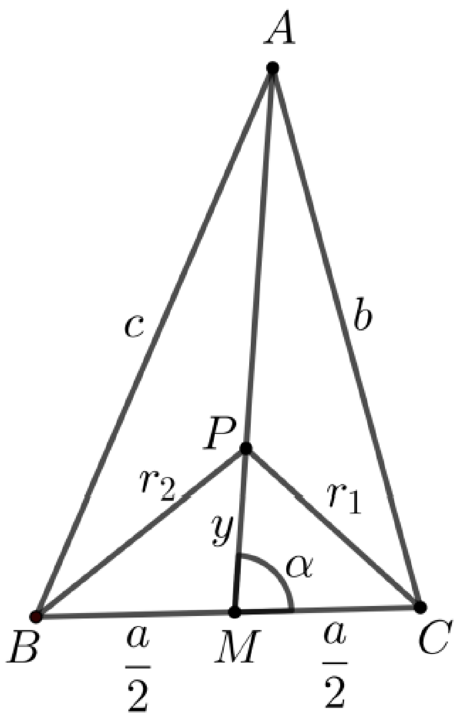

Figura 8: O baricentro $P = G$ minimiza $\frac{r_1}{r_2}$ se e somente se $5a^2 = b^2 + c^2$.

Para um tal triângulo, o valor mínimo de f é $f\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{b^2-a^2}{4a^2-b^2}}$ e o máximo o seu inverso multiplicativo.

Como uma observação final, se P_0 é o ponto na mediana AM que minimiza f, então P_0 não pode minimizar $r_1 = PC$ com P na mediana AM. De fato, se P_0 minimiza PC e também minimiza $\frac{PC}{PB}$, então, pelo lema 1, $C\widehat{P_0}B = C\widehat{P_0}M = 90^0$, o que é absurdo.

Referências

[1] Bialostocki, A. e Bialostocki, D., "The incenter and an excenter as solutions to an extremal problem", *Forum Geom.*, 11 (2011) 9–12.

[2] Bialostocki, A. e Ely, R., "Points on a line that maximize e minimize the ratio of the distances to two given lines", *Forum Geometricorum*, 15, 177-178, 2015.

[3] Hajja, M., "Extremal properties of the incentre e the excentres of a triangle", *The Mathematical Gazette*, 2012, Vol. 96, No. 536 (July 2012), pp. 315-317.

[4] Hajja, M., "One more note on the extremal properties of the incentre e the excentres of a triangle", *The Mathematical Gazette*, Vol. 101, No. 551 (July 2017), pp. 308-310.

Ruthyelen Cristina Machado de Freitas
Secretaria de Educação do Distrito Federal
<ruthyelencf@gmail.com>

Rogério César dos Santos
Universidade de Brasília
<rogerc@unb.br>

Fabio Couzzi Velasco
Aluno do Mestrado Profmat DF
<fabiocouzzi@yahoo.com.br>

Recebido: 21/08/2023
Publicado: 04/03/2024