PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.12, n.1, 2024
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2024/pmo126

Maximização Angular (revisitação ao problema de Regiomontanus)

Antonio Cardoso do Amaral   Sandoel Vieira

Resumo

Este trabalho apresenta uma solução elementar para o problema de Regiomontanus, que consiste em encontrar a distância entre um observador e uma parede que tem um quadro (pintura) pendurado, de modo que o ângulo de visão seja máximo. A solução apresentada no artigo utiliza apenas conceitos básicos de geometria, em particular, a semelhança de triângulos. Além disso, o trabalho compara a solução elementar proposta com soluções mais sofisticadas que utilizam cálculo e otimização. O artigo apresenta uma solução simples e eficiente para um problema clássico de otimização em geometria. Para encerrar, trazemos uma reflexão acerca das abordagens de problemas na sala de aula de Matemática, sob a ótica do conceito de problematização, no escopo do que definimos como uma abordagem problematizada.

Palavras-chave: Otimização; Regiomontanus; Geometria Elementar; Problematização.

Abstract

This paper presents an elementary solution to the Regiomontanus problem, which consists of finding the distance between an observer and a wall with a hanging frame (painting) in such a way that the viewing angle is maximized. The solution presented in the article uses only basic concepts of geometry, particularly the similarity of triangles. Furthermore, the paper compares the proposed elementary solution with more sophisticated ones that involve calculus and optimization. The article offers a simple and efficient solution to a classical optimization problem in geometry. Finally, we provide a reflection on problem-solving approaches in the mathematics classroom, from the perspective of the concept of problematization, within the scope of what we define as a problematized approach.

Keywords: Optimization; Regiomontanus; Elementary geometry

1. Introdução

O termo Regiomontanus vem da expressão "Montanha do Rei", como era conhecida a antiga cidade de Kõnigsberg (na antiga Prússia), hoje Kalinigrado, uma região exclave da Rússia, localizada na costa do Mar Báltico entre a Polônia e a Lituânia.

Foi nessa região montanhosa da antiga Prússia onde viveu, no século XV, o matemático e astrônomo Johann Müller von Königsberg (1436-1476). Certamente por isso, Johannes Müller passou a ser conhecido pela alcunha de Regiomontanus.

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Regiomontanus [4] foi um dos matemáticos mais importantes do século XV, e pode ter sido o primeiro matemático a problematizar questões sobre máximos e mínimos. Um problema muito conhecido e atribuído a Regiomontanus trata da maximização de um ângulo segundo ver-se uma pintura pendurada em uma parede. Na página da *Wikipedia*, [6], traduzido para a língua portuguesa, encontra-se uma versão:

> *Uma pintura está pendurada em uma parede. Dadas as alturas da parte superior e inferior da pintura acima do nível dos olhos do espectador, qual distância da parede o espectador deve ficar para maximizar o ângulo subtendido pela pintura e cujo vértice está aos olhos do espectador?*
>
> (Wikipedia, 2023)

O problema sugere intuitivamente que o maior ângulo de visão não estará muito longe nem tão próximo da parede.

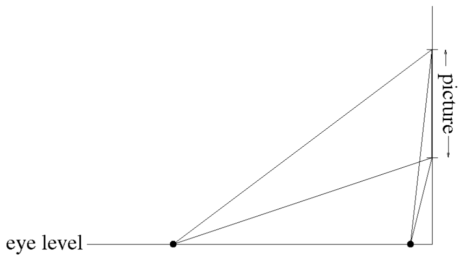

Figura 1: Representação Geométrica. Fonte: *Wikipedia* [6]

O problema de maximização do ângulo (de Regiomontanus) não é muito desconhecido, normalmente é utilizado como situação-problema em livros de Cálculo no estudo sobre Otimização. Em [5], exatamente na página 303, há uma interessante variação do problema:

71. Um observador permanece em um ponto P, distante uma unidade de uma pista. Dois corredores iniciam no ponto S da figura e correm ao longo da pista. Um corredor corre três vezes mais rápido que o outro. Encontre o valor máximo do ângulo θ de visão do observador entre os corredores. [*Dica*: Maximize tg θ.]

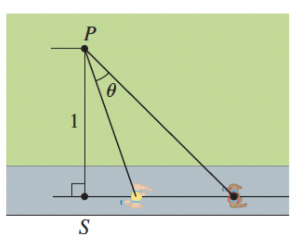

Figura 2: Variação do Problema de Regiomontanus. Fonte: Stewart [2017, p. 303]

O problema de maximização de um ângulo, frente a um anteparo fixado, pode se apresentar em diferentes aplicações da matemática, mas não precisa que a situação-problema tenha sua resolução restrita à matéria do ensino superior.

O interesse em olhar para essa questão bem particular foi motivado por uma lista de problemas apresentada na segunda versão do Programa de Aperfeiçoamento de Professores Olímpicos (Prolímpico) — Projeto organizado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Impa). O Prolímpico é um programa que "visa oferecer treinamento gratuito para professores de matemática de todo o Brasil, abordando assuntos relativos às olimpíadas de matemática do ensino básico" [3]. Em função da pandemia da Covid-19 suas atividades ocorreram de forma remota entre os dias 23 de fevereiro e 04 de março de 2021.

A ideia de escrever este texto partiu da tentativa de resolver o último problema da primeira lista do nível B. Essa lista de problemas é organizada para professores do Ensino Fundamental (anos finais) e Ensino Médio. Logo, um problema cuja resolução esperada privilegia, eventualmente, o uso dos recursos elementares de Geometria Plana.

2. O Problema apresentado no Prolímpico

O quinto problema da primeira lista de atividades causou estranhamento entre os participantes, pois a maneira mais trivial de abordá-lo sugeria o uso da trigonometria em sua resolução. No entanto, tradicionalmente, a trigonometria não faz parte das "ferramentas" comumente utilizadas pelos estudantes olímpicos. Isso levou à busca por uma solução que exigisse uma dose de engenhosidade mais ou menos incomum.

A seguir a versão apresentada na lista.

> *Em uma parede há uma grande pintura. A borda inferior da pintura está a uma distância* **b** *do chão, e a borda superior está a uma distância* **a** *do chão. Um observador, do chão, quer maximizar o ângulo com o qual consegue ver a pintura. Em outras palavras, se* P *é um ponto no chão e* A *e* B *são os limites da pintura, quer-se maximizar o ângulo* $\widehat{\mathrm{APB}}$*. A qual distância da parede deve ficar o observador?* (Prolímpico, 2021)

O problema é exatamente o de maximização do ângulo de Regiomontanus. Para melhor ilustrar, a figura a seguir expressa o observador em duas posições distintas (P_1 e P_2), e a pintura (AB).

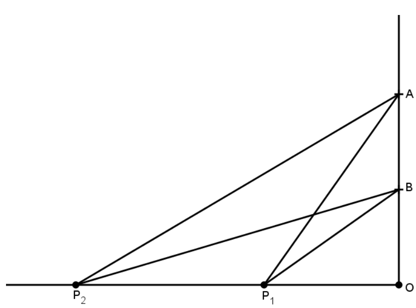

Figura 3: Problema 05 - Prolímpico - Nível B. Fonte: Construção Nossa

Elaboramos diferentes resoluções para o problema: desde a resolução com recurso ao uso de derivadas à solução considerada a mais engenhosa (aquela que recorre apenas ao uso de geometria elementar). Para encerrar apresentaremos uma solução que emerge da manipulação geométrica a partir do *software* Geogebra especialmente da exploração do conceito de Lugar Geométrico.

2.1. Resolução com recurso à trigonometria e uso de derivadas.

Na nossa abordagem, Figura 4, o observador está indicado por P, as alturas dos extremos inferior e superior, B e A, por b e a; e a distância do observador à parede, por x. Desse jeito, se $\widehat{\mathrm{APO}} = \alpha$, $\widehat{\mathrm{BPO}} = \beta$, teremos, para cada valor de x no intervalo $[0, \infty)$, uma variação $\theta(\mathrm{x}) = \alpha - \beta$ no intervalo $[0, \pi/2)$.

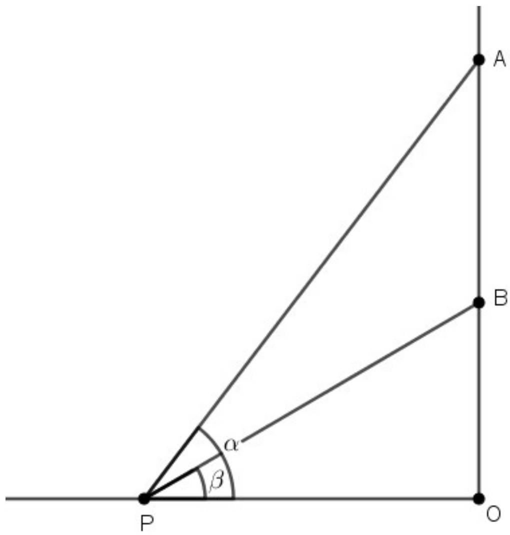

Figura 4: Resolução por derivada. Fonte: Construção Nossa

Pela figura, e pelo uso das relações trigonométricas,

$$\tan\theta(\mathrm{x}) = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{x}} - \dfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{x}}}{1 + \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{x}} \cdot \dfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{x}}} = (\mathrm{a} - \mathrm{b}) \cdot \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2 + \mathrm{ab}}.$$

Ou seja, para $\mathrm{x} \in [0, \infty)$, teremos

$$\tan\theta(\mathrm{x}) = (\mathrm{a} - \mathrm{b}) \cdot \mathrm{f}(\mathrm{x}), \tag{1}$$

onde $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}/(\mathrm{x}^2 + \mathrm{ab})$.

Uma vez que a função $[0,\pi/2) \ni \theta \mapsto \tan\theta$ é crescente e $0 \le \theta(x) < \pi/2$, maximizar $\theta(x)$ equivale a maximizar $\tan\theta(x)$; e como $(a-b)$ é uma constante real, o problema reduz-se a maximizar $f(x)$.

Para otimizar a função $[0,\infty) \ni x \mapsto f(x)$, e para a melhor interpretação das regiões de monotonicidades de f, usaremos o cálculo da derivada de f. Ora,

$$f'(x) = \frac{ab - x^2}{(x^2+ab)^2}\begin{cases} > 0, & \text{se } 0 \le x < \sqrt{ab} \\ = 0, & \text{se } x = \sqrt{ab} \\ < 0, & \text{se } x > \sqrt{ab} \end{cases},$$

obtemos que f é crescente no intervalo $[0,\sqrt{ab}]$ e decrescente no intervalo $[\sqrt{ab},\infty]$, assumindo então o valor de máximo no ponto $x = \sqrt{ab}$ tornando-se a medida x de OP para o ângulo máximo de Regiomontanus, veja a Figura 5. A saber, por (1) obtemos que o ângulo de maximização é dado por $\theta = \arctan\left(\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}\right)$ no intervalo $[0,\pi/2)$.

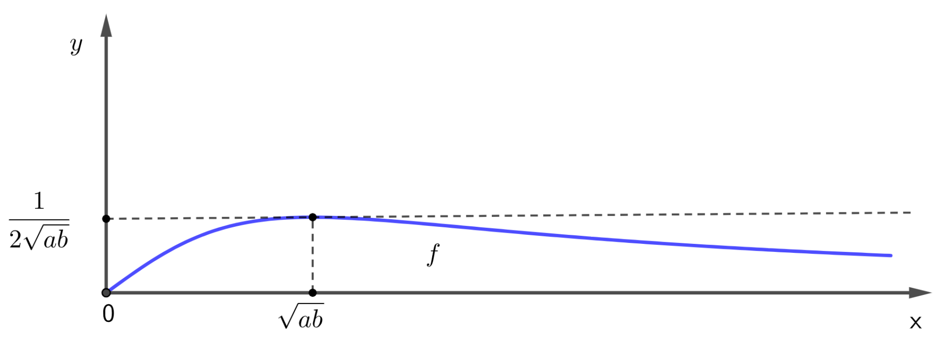

Figura 5: Comportamento da função f. Fonte: Construção Nossa

2.1.1 Com recurso à desigualdade das médias aritmética e geométrica.

Dados x e y reais a desigualdade $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \ge 0$ resulta em $\frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$, ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x = y$. Temos, portanto, uma das identidades mais usadas em matemática para a solução de problemas: a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica com respeito a dois números reais x e y.

Desigualdades são um excelente recurso à resolução de problemas de máximos e mínimos. Por isso, queremos destacar uma solução, já conhecida para o problema de Regiomotanus, que usa a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. Nessa solução seguiremos a mesma linha de raciocínio do início da anterior.

Voltamos à Equação (1): $\tan\theta(x) = (a-b)\cdot f(x)$. Agora, em vez de recorrer ao cálculo de derivadas para o processo de maximização, recorremos ao uso de desigualdades. Para tanto, reescrevemos a função f como

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + ab} = \frac{1}{x + \frac{ab}{x}},$$

onde $x > 0$ é a medida do segmento OP. (É claro que $x = 0$ não é o caso de máxima visualização do ângulo de observação).

Novamente, para que $\tan\theta(x)$ (respectivamente $\theta(x)$) seja máximo, é suficiente que $f(x)$ seja maximizado, e isso ocorre quando o denominador $x + \frac{ab}{x}$ assume o menor valor possível. Para isso, considerando os termos x e $\frac{ab}{x}$, a desigualdade acima diz que:

$$\frac{x + \frac{ab}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{ab}{x}} \Rightarrow x + \frac{ab}{x} \geq 2\sqrt{ab}$$

E o menor valor da expressão $x + \frac{ab}{x}$ ocorre quando $x = \frac{ab}{x}$. Isto é, quando $x = \sqrt{ab}$.

2.2. Resolução por Potência de Pontos.

Apresentaremos agora a resolução que usa conceitos ensinados no Ensino Fundamental — especialmente nos treinamentos olímpicos para o Nível 2 (8° e 9° anos). É uma solução geométrica considerada bastante elegante. E, depois de feita, considerada fácil, claro!

A rigor, alunos olímpicos são treinados para encontrar soluções para problemas difíceis utilizando a menor quantidade possível de conteúdos curriculares. Portanto, eles nos surpreendem com sua capacidade e sagacidade ao serem capazes de enxergar respostas que não são tão simples de identificar.

Com essa abordagem, podemos analisar um problema mais amplo do que aquele que foi inicialmente apresentado:

> *Em uma parede há uma pintura. A borda inferior* B *da pintura está a uma distância* **b** *do chão, e a borda superior* A *está a uma distância* **a** *do chão. Um observador* P*, em uma reta* $L(\alpha)$ *formando um ângulo* $\alpha \in (0, \pi)$ *com a parede, quer maximizar o ângulo* $\widehat{APB}$ *com o qual consegue ver a pintura, veja Figura 6.* (Prolímpico adaptado, 2021)

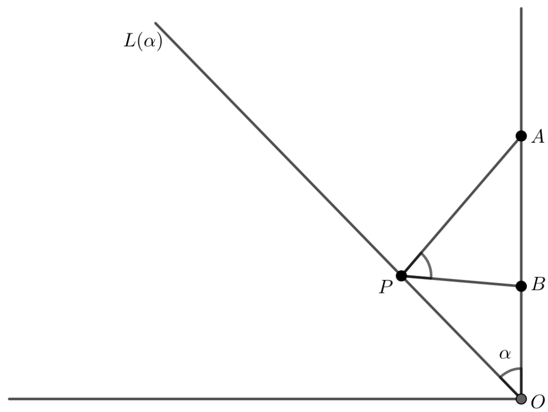

Figura 6: Problema de Regiomontanus adaptado. Fonte: Construção Nossa

A resposta ao problema surge inevitavelmente da construção de um círculo tangente à reta L(α) no ponto P, passando pelos pontos A e B.

Para tal solução, provaremos que o ângulo $\theta = \widehat{\mathrm{APB}}$ de vértice P, ponto de tangência da reta L(α) com o círculo, é o ângulo máximo de visualização do segmento AB. Ora, se P_1 é um ponto à esquerda de P na reta L(α), Figura 7, $\theta = \widehat{\mathrm{ACB}}$ é um ângulo externo do triângulo BCP_1 ($\widehat{\mathrm{ACB}}$ e $\widehat{\mathrm{APB}}$ são ângulos inscritos que "enxergam" o mesmo arco). Logo, pelo Teorema do Ângulo Externo, θ é maior do que $\widehat{\mathrm{AP_1B}}$. A verificação é análoga para o caso de um ponto à direita de P.

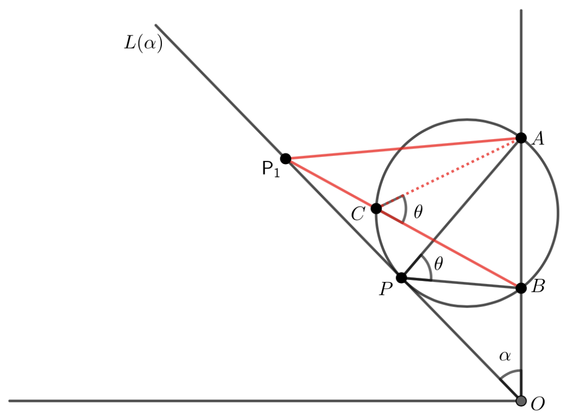

Figura 7: Ângulo Externo. Fonte: Construção Nossa

Com a certeza de que θ é máximo exatamente no ponto P de tangência, precisamos apenas determinar a medida x do segmento OP. Para isso, usaremos a definição de Potência de Ponto de um ponto dado O, Figura 8, em relação a uma circunferência.

Definição 1. Em um mesmo plano, dado um círculo γ de centro C e raio r, e um ponto O fora dele, denotaremos $\mathrm{Pot}_\gamma(\mathrm{O}) = (\mathrm{OC})^2 - \mathrm{r}^2$ como a **Potência de Ponto do ponto** O em relação a γ.

Proposição 1. *Se* t *é uma reta que passa por* O *e corta* γ *em* A *e* B*, então* $\mathrm{Pot}_\gamma(\mathrm{O}) = \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}$.

Demonstração. Os ângulos $\widehat{\mathrm{A'B'A}}$ e $\widehat{\mathrm{A'BA}}$ são congruentes (compreendem o mesmo arco $\widehat{\mathrm{A'A}}$). Logo, teremos $\triangle\mathrm{OB'A} \sim \triangle\mathrm{OBA'}$. Portanto,

$$\frac{\mathrm{OB'}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OA'}} \Rightarrow \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB} = \mathrm{OA'}\cdot\mathrm{OB'} = (\mathrm{OC}-\mathrm{r})\cdot(\mathrm{OC}+\mathrm{r}) = (\mathrm{OC})^2 - \mathrm{r}^2.$$

Concluindo que $\mathrm{Pot}_\gamma(\mathrm{O}) = \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}$. □

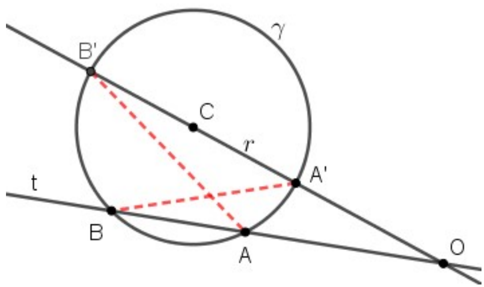

Figura 8: Potência de Pontos. Fonte: Construção Nossa

O que ocorre de fato aqui é que há uma importante invariante. Ora, a Potência de Ponto do ponto O em relação ao círculo γ é indiferente, independentemente da reta secante. Se t é tangente ao círculo, $\mathrm{A} \equiv \mathrm{B}$, $\mathrm{Pot}_\gamma(\mathrm{O}) = (\mathrm{OA})^2 = (\mathrm{OB})^2$.

Voltando ao problema, especialmente na Figura 7, concluímos que $(\mathrm{OP})^2 = \mathrm{OB}\cdot\mathrm{OA}$, ou seja, $\mathrm{x} = \sqrt{\mathrm{ab}}$. Para calcularmos o ângulo de maximização $\widehat{\mathrm{APB}} = \theta(\alpha) \in (0,\pi)$ usaremos duas vezes a Lei dos Cossenos. Inicialmente nos triângulos $\triangle\mathrm{OPB}$ e $\triangle\mathrm{OPA}$, obtendo $(\mathrm{PB})^2 = \mathrm{ab}+\mathrm{b}^2-2\mathrm{b}\sqrt{\mathrm{ab}}\cos\alpha$ e $(\mathrm{PA})^2 = \mathrm{ab}+\mathrm{a}^2-2\mathrm{a}\sqrt{\mathrm{ab}}\cos\alpha$. E, finalmente, no triângulo $\triangle\mathrm{APB}$, em que o ângulo $\theta(\alpha)$ fica determinado como:

$$\cos\theta(\alpha) = \frac{4\mathrm{ab} - 2\sqrt{\mathrm{ab}}(\mathrm{a}+\mathrm{b})\cos\alpha}{2\sqrt{\mathrm{b}(\mathrm{a}+\mathrm{b}) - 2\mathrm{b}\sqrt{\mathrm{ab}}\cos\alpha}\cdot\sqrt{\mathrm{a}(\mathrm{a}+\mathrm{b}) - 2\mathrm{a}\sqrt{\mathrm{ab}}\cos\alpha}}. \tag{2}$$

Para o problema de Regiomontanus inicial, onde o observador P está sobre o chão (eixo horizontal), ou seja, quando a inclinação da reta $\mathrm{L}(\alpha)$ é $\alpha = \pi/2$, temos que o ângulo de visualização máxima do observador é dado por

$$\theta(\pi/2) = \arccos\left(\frac{2\sqrt{\mathrm{ab}}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}\right) \in [0,\pi).$$

Além disso, a partir da expressão (2), podemos inferir o ângulo $\alpha \in (0, \pi)$ que a reta $L(\alpha)$ deve formar com o eixo vertical, de modo que o ângulo de máxima visualização de um observador na reta $L(\alpha)$ seja um ângulo reto, isto é, $\theta(\alpha) = \pi/2$. Vale destacar que o ângulo é dado por:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right) \in (0, \pi/2).$$

3. A solução elementar impulsionada por uma uma proposição

Outra forma de buscar a solução para o problema de Regiomontanus consiste em encontrar inicialmente a medida θ do ângulo máximo de visão em termos de a e b, para depois encontrar a medida x de OP.

Nossa solução começa com a construção do círculo passando por P, O e B — com o *software* GeoGebra. Ao ativar a função "rastro" do ponto Q, que é de intersecção do círculo com o segmento AP, e deslizar P na reta horizontal, emergem questões sobre a trajetória do ponto Q. Neste caso, a sugestão mais razoável é afirmar que o ponto Q tem sua trajetória sobre o semicírculo de diâmetro AB.

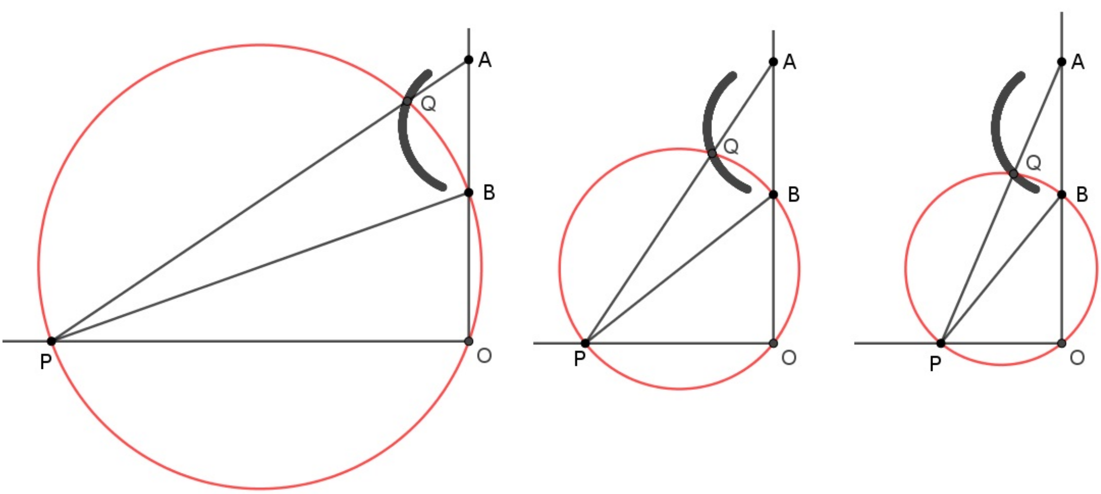

Figura 9: Lugar Geométrico do ponto Q. Fonte: Construção Nossa

Antes de prosseguir, cabe destacar a importância de questionar, conjecturar, indagar e, sobretudo, problematizar. Do ponto de vista do ensino, esse último termo engloba todos os processos que criam possibilidades para a construção de conhecimento, sem ignorar qualquer participação, erros ou a ausência de saberes especializados.

Há estudos que apontam a formação do professor que ensina matemática para os requisitos de um ensino que privilegia uma abordagem problematizada em detrimento àquela que segue um circuito fechado de etapas preestabelecidas, colocando o estudante como espectador e, sobretudo, reprodutor de conteúdos.

> *Por matemática problematizada, entendemos uma concepção de possibilidades matemáticas, situadas em diversos contextos e práticas históricos e sociais de produção e de mobilização de saberes e de formas de estar no mundo. Uma abordagem de matemática de forma problematizada privilegia a produção de sentidos e de afetos, em lugar da exposição de fatos, procedimentos e informações.*
>
> (GIRALDO, 2019)

A solução apresentada nesta seção oferece-se como uma possibilidade de abordagem capaz de criar condições para conjecturar, testar e pesquisar proposições auxiliares que sejam úteis para obter a resposta desejada. Portanto, é relevante para uma abordagem na sala de aula de matemática.

Para dar continuidade à resolução do problema de Regiomontanus, utilizando a geometria dinâmica como recurso, provaremos a conjectura percebida, de modo que uma simples proporção, originada da semelhança entre dois triângulos, forneça a solução desejada (Figura 10).

Já que PB é diâmetro do círculo (pois $\widehat{\text{POB}}$ é reto), ou seja, $\widehat{\text{PQB}}$ é reto, a verificação da afirmação de que o ponto Q tem sua trajetória sobre o semicírculo de diâmetro AB é verdadeira, porque o triângulo AQB é retângulo em Q.

Dessa construção, surge o ângulo θ de maximização de Regiomontanus, como mostrado na Figura 10. Ora, $\widehat{\text{QPB}}$ e $\widehat{\text{QOB}}$ são ângulos inscritos que compreendem o mesmo arco ($\widehat{\text{BQ}}$), logo, são congruentes. Como o círculo de diâmetro AB é fixo, o ângulo θ é máximo exatamente quando a reta que contém OQ é tangente ao círculo, ou seja, no momento em que o triângulo $\triangle$MOQ é retângulo (em Q).

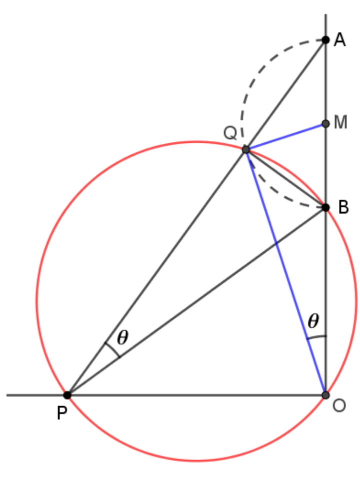

Figura 10: Maior Ângulo de Visão. Fonte: Construção Nossa

Observação: Se, de alguma maneira, o problema envolver o cálculo de θ em termos de a e b, o triângulo retângulo $\triangle$OQM fornece essa resposta, uma vez que as medidas de dois de seus lados são conhecidas.

Sendo θ o ângulo máximo de Regiomontanus, para calcularmos a medida x de OP, mostraremos inicialmente que os triângulos retângulos $\triangle$APO e $\triangle$PBO são semelhantes. De fato, como

$$\widehat{BQO} + \widehat{BQM} = \widehat{OQM} = 90^\circ = \widehat{AQB} = \widehat{AQM} + \widehat{BQM},$$

temos $\widehat{BQO} = \widehat{AQM} = \widehat{MAQ}$. E, portanto, $\widehat{BPO} = \widehat{OAP}$ (observe que $\widehat{BQO}$ e $\widehat{BPO}$ são ângulos inscritos que "enxergam" o mesmo arco). Logo,

$$\frac{OA}{OP} = \frac{OP}{OB} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = \sqrt{ab}$$

4. Considerações Finais

O problema da maximização do ângulo de Regiomontanus, cuja abordagem foi escolhida para este trabalho, apresenta-se de tal forma que os objetos matemáticos aqui revisitados são importantes tanto do ponto de vista de suas funções quanto pelo potencial das possibilidades de uso e recursos matemáticos na resolução do problema. Embora não possamos afirmar com certeza o papel central do matemático Johannes Müller, que viveu no século XV, na resolução do problema do ângulo máximo de visão frente a um anteparo fixado, nem saibamos quem o resolveu pela primeira vez, temos certeza de que todo o conhecimento apresentado aqui para solucionar o problema foi construído levando em consideração contextos históricos e sociais. Portanto, foi um trabalho coletivo.

Essa compreensão da construção do conhecimento não pode ser dissociada da prática do professor na sala de aula, ou seja, criar oportunidades para discutir como os assuntos são abordados na sala de aula e tomar decisões coletivas como parte do papel do professor. Davis e Renert [1], *apud* Giraldo [2], estabelecem uma visão mais ampla do papel do docente:

> *Professores não são agentes periféricos que têm como função transmitir passivamente uma matemática estabelecida. Ao contrário, são participantes vitais na produção de possibilidades matemáticas.*
>
> (DAVIS e RENERT, 2009)

Essa visão enfatiza o alinhamento do trabalho do professor com a capacidade de tomar decisões que lhe é própria, ou que deve ser, como parte do reconhecimento profissional e do dever de reivindicação. Além disso, de acordo com Giraldo [2], uma abordagem não problematizada, que segue um ritual de etapas predefinidas, se distancia significativamente da verdadeira produção científica, que, rigorosamente, envolve incertezas e erros durante sua elaboração.

Esperamos sinceramente ter contribuído para a reflexão sobre as abordagens em sala de aula de diversos conteúdos de ensino. Escolhemos um problema clássico de otimização que se apresenta com potencial didático na aula de Matemática. As várias possibilidades de resolução, apoiadas em conceitos de diferentes áreas, dependendo da escolha para a solução, demonstram como problematizar, no sentido de desnaturalizar, e sair do padrão tradicional de abordagens, assemelhando-se mais aos problemas que surgiram ao longo do tempo e que puderam ser traduzidos em novos conhecimentos.

Referências

[1] Davis, Brent; Renert, M. *Mathematics for teaching as shared, dynamics participation*. For the Learning of Mathematics, Fredericton. v. 29, n, 3, p. 37-43, 2009.

[2] Giraldo, V. *Que matemática para a formação de professores? Por uma matemática problematizada*. *In*: XIII Encontro Nacional de Educação Matemática (XIII ENEM) v. 1, p. 1-12. Cuiabá, SBEM, 2019.

[3] Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Impa) *Programa de Aperfeiçoamento de Professores Olímpicos (Prolímpico)*. Rio de Janeiro, RJ: Impa, 2021.

[4] Mello, J. L. P. *Trigonometria e Um Antigo Problema de Otimização*. RPM, n.52, 2006.

[5] Stewart, J. *Cálculo*.Tradução de EZ2Translate. 7ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[6] Wikipedia. *Regiomontanus' angle maximization problem*. *In*: Wikipedia: the free encyclopedia. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Regiomontanus%27_angle_maximization_problem>. Acesso em: 09 de abril de 2023.

Antonio Cardoso do Amaral
Centro Estadual de Tempo Integral Augustinho Brandão
Cocal dos Alves (PI)
<acadoamaral@gmail.com>

Sandoel Vieira
Universidade Federal do Piauí-UFPI
Teresina-PI
<sandoel.vieira@ufpi.edu.br>

Recebido: 24/09/2023
Publicado: 20/03/2024