



Estudando funções e algoritmos por meio de origamis

Alice Kozakevicius¹ 

Maite Kulesza² 

Resumo

Neste trabalho as dobraduras feitas em papel obtidas pela técnica japonesa de origami são consideradas como ponto inicial para definir e apresentar exemplos concretos de funções e suas compostas. Conceitos básicos como domínio, contradomínio e imagem de uma função são ilustrados via material concreto. A partir das dobraduras em origami, são explorados conceitos e definições como função injetora, função sobrejetora e função inversível. Além disso, observa-se que os origamis são exemplos naturais para composição de funções e para a obtenção da inversa dessas funções compostas. A contribuição da abordagem do conceito de função via origami aparece também na apresentação intuitiva e lúdica da definição de algoritmo, rotinas e sub rotinas.

Palavras-chave: origami; função composta; função inversível; algoritmo sequencial.

Abstract

In this work, the paper folds obtained by the Japanese origami technique are considered as a starting point to define and present concrete examples of functions and their composites. Basic concepts like domain, range, direct and inverse image of a function are illustrated via concrete material. From the folds made via origami, concepts and definitions such as injective function, surjective function and invertible function are explored. In addition, origamis are natural examples for composition of functions and for obtaining the inverse of these composite functions. The contribution of the approach to the concept of function via origami is in the intuitive and playful presentation of the definition of algorithm, routines and subroutines.

Keywords: origami; composite function; invertible function, sequential algorithm

1. Introdução

O estudo de funções é um dos pontos centrais no Ensino de Matemática e é abordado desde o início da formalização e sistematização dos conteúdos, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio [11]. Uma parte relevante na abordagem sobre funções é a construção de exemplos nas mais variadas áreas de aplicação, assim como em situações do cotidiano [23].

Quanto ao ensino de algoritmos e lógica de programação nas escolas brasileiras, nas últimas três décadas muito tem sido pensado e feito para o desenvolvimento de metodologias de ensino adequadas para esses e outros tópicos referentes à computação [10]. Segundo [10], as primeiras experiências

¹Parcialmente apoiado por UFSM

²Parcialmente apoiado pela UFRPE

educacionais com a linguagem LOGO remetem aos anos 90, seguidas pelas interfaces amigáveis e o desenvolvimento de ferramentas computacionais visando o perfil do usuário no início dos anos 2000, até uma ampla inserção da disciplina de programação em escolas de Ensino Fundamental e Médio após 2015. A busca por abordagens lúdicas para a apresentação de conceitos da área de computação tem sido frequente tanto em disciplinas de programação de cursos superiores [26], quanto em escolas de Ensino Médio e Fundamental [2], [24].

Neste sentido, o primeiro objetivo deste texto é propor uma apresentação dos conceitos e definições fundamentais envolvendo funções a partir de exemplos concretos, construídos de forma lúdica por meio de origamis. Em especial, os conceitos de domínio e imagem de uma função tornam-se palpáveis pela percepção da transformação da folha plana no início do processo e o origami obtido como resultado de todas as dobras realizadas. Como segundo objetivo, consideram-se os origamis como exemplos-chave para a definição do conceito de algoritmo. Novamente, a natureza sequencial das dobras feitas em papel ilustra de forma imediata o conceito de algoritmos sequenciais, nos quais o resultado em um passo intermediário é utilizado para a obtenção de um novo resultado no passo seguinte, até a obtenção do resultado final que caracteriza o passo final do algoritmo.

Origami (do japonês: *ori*, “dobrar”e, *kami*, “papel”) é a tradicional e secular arte japonesa de dobrar o papel, criando representações de determinados seres ou objetos com as dobras geométricas de um pedaço de papel. Há registros de que o origami tradicional japonês tenha sido praticado desde o Período Edo (1603-1868). Originalmente, não havia convenções ou restrições quanto à forma ou dimensões do papel utilizado, sendo permitido até mesmo o corte do papel durante a criação do objeto. No entanto, a partir da década de 1950, houve uma divisão entre a abordagem tradicional e uma abordagem criativa e sistematizada, proposta por Akira Yoshizawa [21], o que deu início a uma formalização e axiomatização das ações envolvidas nas dobras.

Além disso, a percepção de regras e propriedades matemáticas envolvidas nas construções via origami não é algo recente. Um trabalho relevante nesta linha data de 1893, quando T. Sundara Rao publicou *Geometric Exercises in Paper Folding*, no qual ele utilizava dobraduras em papel para ilustrar demonstrações de construções geométricas, originalmente desenvolvidas pelo uso de régua e compasso. A utilização de origamis para a verificação de propriedades geométricas e resultados matemáticos remete a estudos iniciais do século 19. Já em 1936, Margharita P. Beloch mostrou que certos tipos de dobraduras permitiam a resolução de uma equação cúbica qualquer por meio de origamis [15].

No entanto, foi apenas na década de 1980 que Humiaki Huzita constatou que todas as dobraduras feitas no papel poderiam ser formuladas apenas com um conjunto de 6 operações básicas, dando origem à formulação axiomática para origamis, denominados Axiomas de Huzita. Em 2021, um sétimo axioma foi adicionado por Koshiro Hatori [16], reformulando a denominação para Axiomas de Huzita-Hatori. Essa axiomatização abriu as portas para uma formulação algébrica e lógica das dobraduras em termos de operações matemáticas, ou seja, funções. Mais especificamente, funções polinomiais [12].

Para aqueles que fazem origami é natural o surgimento de perguntas que, em última análise, são de natureza matemática [15]. Existe um procedimento mais simples para dobrar uma determinada figura? De que parte do papel quadrado original formam-se as asas de um inseto obtido via dobraduras? Qual o tamanho de papel para se fazer uma cadeira que se encaixe a uma mesa que também foi feita de origami? É possível fazer um besouro de origami com seis pernas e duas antenas a partir de uma única folha de papel quadrada? Existe um procedimento preciso para dobrar um papel em cinco tiras iguais?

Questões como essas impulsionaram (e seguem impulsionando) o desenvolvimento de uma abordagem computacional para os problemas de dobraduras em papel. No início da década de 1990, o trabalho seminal de Robert Lang [7] revolucionou a maneira que o processo de idealização das dobraduras vinha sendo realizado até então. Lang propôs técnicas computacionais para se projetar objetos ricos em detalhes, de tal modo que esses pudessem ser construídos via origami, ou seja, dobraduras a partir de uma única folha de papel, seguindo apenas os 6 axiomas de Huzita. Além disso, questões ainda mais sofisticadas foram propostas por Lang em relação a dobraduras e suas propriedades computacionais. Ele desenvolveu um programa de computador que pode projetar toda a sequência de dobras necessárias para se construir uma figura “qualquer” via origami. Isso fez com que Robert Lang conseguisse criar animais de origami que eram considerados impossíveis anteriormente [18].

Recentemente, a teoria matemática envolvendo origamis tem sido aplicada para produzir uma incrível variedade de aplicações práticas. As novas tecnologias que estão sendo desenvolvidas incluem projetos de produtos de papel que não envolvem adesivos, melhores formas de dobrar mapas, desdobrar telescópios espaciais e velas solares, sistemas de *software* que testam a segurança de embalagens de *airbag* para fabricantes de automóveis e sistemas de inteligência artificial auto-organizados [21].

Este trabalho introdutório tem como objetivo utilizar origamis simples e seus diagramas na apresentação de conceitos sobre funções, de tal maneira que as dobraduras possam servir de fonte de inspiração para a compreensão e classificação de funções e operações com funções, como composição e inversão. Além disso, exploram-se conceitos iniciais de programação, como algoritmos sequenciais, formulados via rotinas e subrotinas.

2. Um pouco da história do Origami

O Origami é conhecido mundialmente como uma arte japonesa e, de fato, foi no Japão que essa técnica foi desenvolvida e, através de sua cultura e tradições, difundida e consagrada como expressão artística e religiosa. No entanto, de acordo com vários levantamentos históricos [14], sabe-se hoje que o origami desenvolveu-se paralelamente em muitas partes do mundo, e que a origem das dobraduras confunde-se com a própria história do papel [8].

O papel foi inventado na China por volta de 105 d.C e durante muito tempo seu uso ficou restrito a essa região. Foram monges budistas que levaram o papel para o Japão, onde, inicialmente, como papel era um artigo muito caro, ficou restrito a uma pequena parte da aristocracia samurai. No século 14, seguiram-se os primeiros registros de origami, com dobraduras utilizadas como oferendas aos deuses e colocadas em altares ou ainda como envelopes de presente nos nascimentos, casamentos e mortes.

Por outro lado, o papel, juntamente com as especiarias, foi levado pelos mouros para o Ocidente, e, chegando na Espanha, foi também dobrado virando uma arte conhecida como papiroflexia [14]. Dessa forma, o origami foi se espalhando pelo mundo ao longo dos séculos como uma cultura oral, muitas vezes associada a brincadeiras e jogos infantis ou como uma ferramenta pedagógica. Um dos pioneiros em utilizar dobraduras para estimular a aprendizagem foi Friedrich Froebel, na Alemanha, no século XIX [6]. Ele, além de ter criado o conceito de jardim de infância (*kindergarten*), utilizou as dobraduras como método para ajudar na compreensão de elementos da geometria e ensino por meio de jogos.

Na América Latina, a porta de entrada do origami foi através da imigração espanhola [13]. No Brasil, ainda que se imagine que o origami tenha chegado por meio da imigração japonesa, prova-

velmente as primeiras dobraduras foram trazidas pela imigração espanhola, via regiões de fronteira com a Argentina [17]. Além disso, várias outras técnicas de dobraduras de papel foram trazidas por imigrantes alemães e italianos no século XIX.

Assim, muitas das brincadeiras com papel que permanecem vivas ainda hoje são heranças culturais esculpidas e forjadas em séculos de interação. Quem nunca pegou um papel, um guardanapo e fez dobras neles? Quem nunca dobrou um chapéu ou um barquinho? Ou jogou “Céu e Inferno” [1]? Esse jogo que é uma dobradura de papel com faces marcadas com números, cores e figuras é utilizado aqui no Brasil para fazer uma adivinhação, mas, no Japão, além de ser o brinquedo *pakupaku* [5], esse origami é também usado como um porta-doces. Na verdade, é surpreendente pensar que a mesma dobradura tenha talvez outro significado ou aplicação dependendo do local, ou mesmo que tenha sido inventada em momentos completamente diferentes da história ou em locais diferentes, por indivíduos que nunca interagiram entre si. E esse é mais um ponto em comum do origami com a matemática que se desenvolve independentemente em lugares diferentes, estabelecendo os mesmos resultados.

No entanto, até o início dos anos 50, faltava ao origami uma linguagem mais padronizada e que pudesse fazer com que seus modelos chegassem a todos. Foi Akira Yoshizawa quem sistematizou uma simbologia e procedimentos para o origami que permitiram que os modelos fossem diagramados e colocados em livros [9]. Também foi ele quem criou o *wet folding*, uma técnica na qual dobramos um papel umedecido, o que permitiu fazer dobras mais arredondadas e orgânicas as quais deram mais realismo aos origamis de animais e pássaros. As borboletas de Yoshizawa, por exemplo, são as dobraduras mais icônicas do mestre com dobras aparentemente simples e que traduzem a essência do origami. Os diagramas com as instruções para a confecção de origamis foram apenas sistematizados em 1954 por Yoshizawa, e publicados em 1955 em seu livro *Atarashi Origami Geijutsu* (New Art of Origami) [14]. Dessa forma, cada dobra e movimento feito com a folha de papel foram representados simbolicamente, possibilitando que cada passo na construção do origami fosse representado de forma padronizada. A padronização e sistematização propostas por Yoshizawa deu origem à atual abordagem do origami, que usa como ponto de partida uma folha quadrada de papel e considera apenas um pequeno número de dobras e movimentos diferentes, que, no entanto, podem ser combinados de diversas maneiras, para formar objetos com diferentes níveis de complexidade. Esta abordagem atual do origami exclui construções nas quais o papel seja cortado ou colado.

3. Origami: Regras e Simbologia

O origami como se conhece hoje em dia está sistematizado por meio de regras e simbologias bem estabelecidas ao longo dos últimos 60 anos. As regras (condições iniciais) para que se possa classificar uma sequência de dobras no papel como sendo, de fato, um origami são:

- Toma-se inicialmente uma folha de papel quadrada;
- As dobras e movimentos realizados não rasgam a folha;
- Não são realizados recortes, nem colagens na folha de papel.

Os diferentes tipos de dobras e movimentos feitos com o papel durante a execução de um origami são geralmente representados em diagramas seguindo uma simbologia já padronizada e consagrada internacionalmente, que utiliza diferentes tipos de setas, marcações para diferentes tipos de linhas,

entre outros. Na Figura 1 são ilustradas algumas das dobras mais usuais, assim como a simbologia que as representa. Os diagramas a serem considerados nas próximas sessões terão seus passos descritos sucintamente, e algumas dobras indicadas por esta simbologia. No entanto, este texto introdutório não tem como objetivo aprofundar-se em construções sofisticadas. Para os leitores interessados em origamis com diferentes graus de dificuldade, recomendam-se [21, 14, 18].

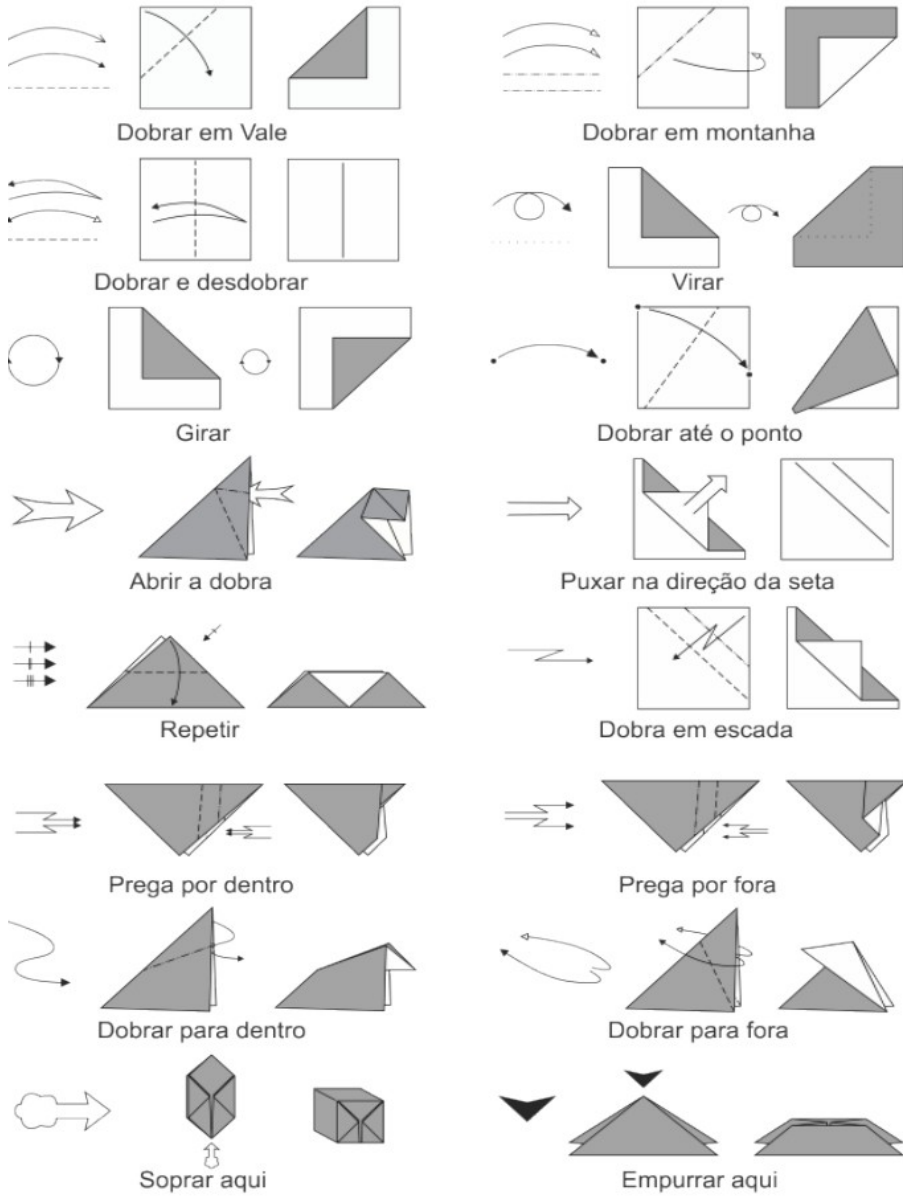


Figura 1: Simbologia de dobras mais frequentes. Fonte [27].

No topo da Figura 1, na coluna da esquerda está uma representação para a dobra em vale. Na coluna da direita, a dobra em montanha. Ambas diferem apenas pelo lado com que o papel é dobrado, independentemente do ângulo e comprimento da parte dobrada. Na dobra em vale a porção dobrada do papel fica para o lado de quem o dobra. Na dobra do tipo montanha, a parte dobrada fica para o lado de trás do papel. Cada ação feita é representada no diagrama por um tipo diferente de símbolo, que pode ser uma seta, um arranjo de setas, linhas tracejadas etc, como ilustrado na Figura 1. A seguir, apresenta-se um exemplo de diagrama disponível *on-line* [3] para a obtenção da face de um gato, no qual as setas consideradas na descrição das dobras seguem a simbologia apresentada na Figura 1.

3.1. Face do gato: uma primeira experiência com origami

Como primeiro exemplo de origami, apresenta-se, na Figura 2, o diagrama para construção da face de um gato, disponível no site [3]. Após o término das dobras, são desenhados olhos, nariz, boca e bigodes para se ter a sensação de que o origami criado trata-se da face de um gato.

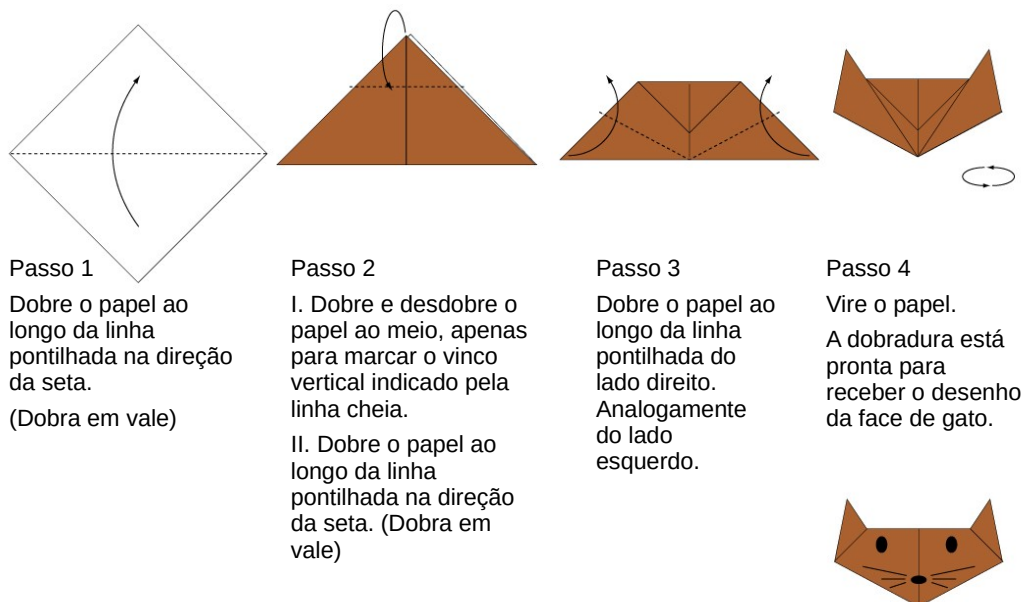


Figura 2: Diagrama simplificado para obtenção da face de um gato, disponível *on-line* [3]. Os olhos e demais elementos da face são desenhados após o término do origami.

O diagrama da Figura 2, disponível *on line* em [3], descreve 4 passos e apenas utiliza representações simplificadas de algumas setas da simbologia dada na Figura 1. Pelo fato de cada um dos passos 2 e 3 envolverem duas ações distintas no papel, o diagrama pode ser descrito mais detalhadamente em 6 etapas referentes às dobras e aos movimentos no papel, além da etapa complementar para se desenhar a face do gato no origami obtido. Desta feita, a partir da folha de papel quadrada, os passos indicados pelo diagrama da Figura 2 são descritos a seguir:

- (Passo 1) Dobre o papel para frente (dobra em vale), na diagonal, formando um triângulo;

- (Passo 2) A partir do triângulo obtido, dobre o papel para frente, unindo as duas pontas da base do triângulo, e desdobre. Assim o papel fica com um vinco na altura do triângulo, ilustrado por uma linha contínua na ilustração do passo 2;
- (Passo 2) Dobre em vale a ponta do papel (na direção de quem dobra) ao longo da linha pontilhada paralela à base do triângulo do passo 2. Essa dobra forma um outro triângulo pequeno de cabeça para baixo, como mostra a ilustração no passo 3 ;
- (Passo 3) Dobre em vale a ponta direita da base do triângulo maior, conforme a linha pontilhada na etapa 3 do diagrama. Repita a etapa anterior para a ponta esquerda do triângulo, formando assim as orelhas do gato;
- (Passo 4) Gire o papel para que o seu verso fique agora para frente.
- Finalmente, desenhe a face do gato.

Cabe observar que, em cada etapa, o papel modificado por uma ação será o ponto de partida para a ação da próxima etapa. É precisamente esta característica que faz com que as dobraduras sejam um exemplo natural para se definir função e composição de funções, como apresentado nas próximas seções.

4. Função: definições e exemplos via dobras

4.1. Definição de função

Nesta seção, apresenta-se inicialmente a definição usual de função encontrada na maioria dos textos de matemática.

Definição 1. Uma **função** f é uma regra que relaciona cada elemento x do conjunto A com um único elemento $f(x)$ do conjunto C .

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow C \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned} \tag{1}$$

O conjunto A é dito **domínio**, o conjunto C é dito **contradomínio** e cada elemento $f(x)$ contido em C é dito imagem de x pela função f . Quando se diz que cada elemento x de A é associado a um único elemento $f(x)$, fica implícito que todo elemento do domínio possui uma imagem.

O conjunto C pode conter também outros elementos que não sejam imagem de nenhum valor x do domínio. Neste caso, define-se $B = \text{Im}(f)$, chamado de **conjunto imagem** da função f , ou **imagem** de f , que contém apenas os elementos $f(x)$ que são os valores imagem dos elementos do domínio. Portanto, o conjunto imagem é sempre um subconjunto (próprio ou não) do contradomínio da função, $B \subseteq C$. Dessa forma, o conjunto B pode ser escrito como

$$B = \text{Im}(f) = \{b \in C : \text{existe algum elemento } a \in A, \text{ tal que } f(a) = b\}.$$

A Definição 1 contém um grau de abstração e formalização inicialmente de difícil compreensão para os alunos, o que torna a apresentação de exemplos de fundamental importância para auxiliar no processo de compreensão e assimilação dos conceitos envolvidos [28].

4.2. Exemplos via dobras

Inicialmente, as dobras ilustradas na Figura 1 são consideradas como exemplos de funções, uma vez que intuitivamente uma função pode ser vista não apenas como uma regra de associação entre valores numéricos, mas também como uma ação, um movimento ou uma transformação executada a partir de um elemento inicial ($x \in A$) e que produz algum resultado (elemento modificado $f(x) \in B$).

Nesta seção, o elemento x a ser considerado no domínio A deixa de ser um valor numérico, como usualmente, e passa a ser um material concreto, uma folha quadrada de papel. Além disso, não se apresenta uma definição matemática para função f , que neste exemplo será uma regra de associação entre os elementos do domínio (folhas de papel) e contradomínio. Desse modo, considera-se apenas a descrição da dobra que irá modificar o papel como sendo a função f . O objetivo, portanto, é deixar explícito que o resultado obtido pela ação que modifica a folha quadrada de papel é a imagem dessa ação, portanto imagem de uma função.

Uma distinção entre imagem e contradomínio no contexto de origami seria interpretar o contradomínio C como sendo o conjunto de todas as possíveis dobraduras a serem obtidas a partir de uma folha de papel. No entanto, o conjunto imagem contém apenas o resultado concreto da dobra realizada.

4.2.1 Exemplo 1: cada dobra como uma função

Considera-se A o conjunto que contém uma folha quadrada de papel (elemento x):

$$A = \{ \text{folha de papel quadrada} \}.$$

Dentre todas as possibilidades de dobras e movimentos apresentadas na Figura 1, são escolhidas quatro ações distintas, denotadas por f_1 , f_2 , f_3 e f_4 . Cada uma delas é executada separadamente a partir de uma folha quadrada de papel (elemento do conjunto A).

- f_1 = dobre o papel para frente - dobrar em vale,
- f_2 = dobre o papel para trás - dobrar em montanha,
- f_3 = dobre o papel para frente e desdobre - vinco,
- f_4 = vire o papel - frente/verso ou verso/frente,

Cada uma dessas dobras produz um resultado diferente como imagem de uma função, o que fica evidente pela transformação realizada na folha de papel ($x \in A$). Assim, definem-se os conjuntos B_1 , B_2 , B_3 e B_4 contidos na folha de papel modificada pela respectiva ação.

- B_1 = {folha quadrada com uma dobra em vale},
- B_2 = {folha quadrada com uma dobra em montanha},
- B_3 = {folha quadrada com um vinco},
- B_4 = {folha quadrada com verso para cima ou frente pra cima, dependendo de f_4 }

Dessa forma, denota-se $f_1 : A \rightarrow B_1$ como sendo a ação que modifica a folha quadrada (x) em A , transformando-a no elemento em B_1 ($B_1 = \{f_1(x)\}$). De forma análoga, denotam-se as demais ações: $f_2 : A \rightarrow B_2$, $f_3 : A \rightarrow B_3$ e $f_4 : A \rightarrow B_4$, nas quais a folha quadrada (que é o elemento do conjunto A) é modificada pela ação correspondente. O resultado produzido é a imagem do elemento pela aplicação. Assim, os conjuntos B_1 , B_2 , B_3 e B_4 são os respectivos conjuntos imagem de cada uma das funções.

Todas as dobras da Figura 1 podem ser vistas como uma função f e, portanto, podem ser escritas conforme a notação dada pela Definição 1: $f : A \rightarrow B$, sendo $A = \{x\}$ o domínio da função f . $E B = \{f(x)\}$, o conjunto imagem de f . Neste exemplo, pode-se dizer ainda que cada um dos conjuntos imagem B é igual ao contradomínio C , pois nada foi informado ao contrário.

Domínio da função com um ou mais elementos

Caso o conjunto A contenha mais do que um elemento, por exemplo, $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ contendo 3 folhas quadradas de cores diferentes ($\#A = 3$), então $f : A \rightarrow B$, significa que a ação f será aplicada a cada um dos elementos de A e assim $B = \{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\}$ será o conjunto com os respectivos resultados. Dessa forma o número de elementos dos conjuntos A e B será igual ($\#A = \#B = 3$).

Caso as três folhas quadradas iniciais sejam de mesma dimensão e mesma cor, ou seja, $x_1 = x_2 = x_3 = x$, essas poderiam ser interpretadas como sendo um único elemento abstrato x e a formulação inicial dada para o conjunto imagem como sendo apenas $B = \{f(x)\}$ segue válida.

Os exemplos a seguir propõem a interpretação (percepção) do diagrama de origami da face de um gato (2) também como sendo uma função, ou como sendo a composição das diversas ações sucessivas do diagrama até que o origami da face do gato seja obtido. O objetivo, então, é identificar e expressar essas ações com a notação e o formalismo dados pela Definição 1. Para isso, são considerados dois cenários: (a) origami como sendo uma única função; e (b) origami como sendo uma sequência de funções aplicadas sequencialmente até a construção completa da face do gato, Figura 2.

4.2.2 Exemplo 2: origami como uma função

Uma possibilidade de se expressar o origami da Figura 2 como sendo uma função f é considerar a ação que associa a folha de papel inicial (denotada por x) com a folha de papel após realizadas todas as dobras do diagrama, ou seja, o origami completo da face do gato (denotada por $f(x)$), obtido como um "passe de mágica" por esta transformação f . Essa ação, ou transformação, satisfaz a Definição 1, uma vez que, para cada folha de papel ($x \in A$), apenas um origami com face de gato ($f(x) \in B$) é obtido por meio das dobras indicadas no diagrama.

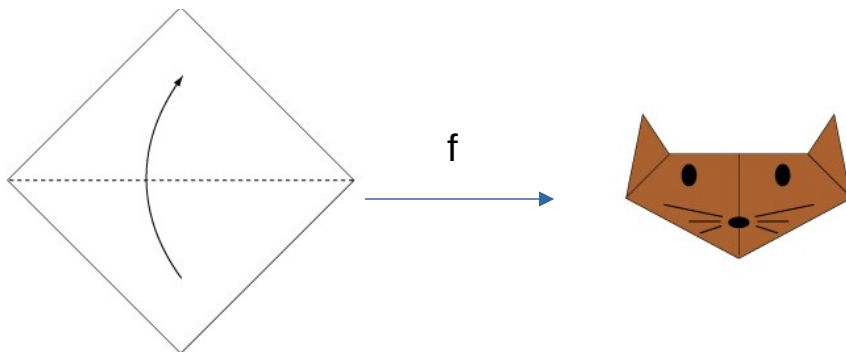


Figura 3: Origami como uma função f que leva o elemento x do domínio A (folha quadrada) no elemento $f(x)$ do conjunto imagem B (face do gato).

Não há como ser produzido outro tipo de origami a partir do mesmo diagrama, e tão pouco é possível que a mesma folha gere uma quantidade maior do que um origami. Assim, trata-se o origami como sendo uma função f que transforma x (folha quadrada) em sua imagem $f(x)$ (a face de gato). E, neste caso, o domínio A pode ser considerado como sendo formado apenas por uma folha quadrada de papel x , e o conjunto imagem de f contendo apenas o origami com a face de gato $f(x)$. De acordo com a Definição 1, pode-se escrever a função como segue:

$$\begin{aligned}
 f: \quad A &\longrightarrow C \\
 x &\longmapsto f(x).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Novamente, o contradomínio C pode ser considerado como sendo qualquer conjunto que contenha o conjunto imagem de f , independentemente de quantos elementos sejam considerados no domínio A . Assim, assume-se neste exemplo que o contradomínio C seja igual ao conjunto imagem de f , $B = \text{Im}(f)$. Na Figura 3, tal situação é ilustrada, para o exemplo quando o domínio A contém apenas 1 elemento. Mesmo que o contradomínio seja um conjunto com mais elementos, como observado anteriormente, sempre $B \subseteq C$.

4.2.3 Exemplo 3 - o origami como composta de funções

Como visto no Exemplo 1, cada dobra ilustrada na Figura 1 pode ser considerada como uma ação sobre a folha de papel quadrada, e, portanto, uma função, cujo domínio é denotado pelo conjunto A . A questão interessante e relevante aqui é que as dobras seguem uma seqüência para se formar um origami. Ou seja, cada nova dobra será realizada no papel que já foi dobrado ou marcado pelas dobras ou vincos anteriores.

Há, então, uma dependência entre passos consecutivos. Cada etapa anterior é o ponto de partida para o passo seguinte. Ou seja, a imagem obtida pela dobra anterior será o elemento inicial para a dobra seguinte. Matematicamente, esse processo é denominado composição de funções. No caso em que são compostas duas funções, a definição é a seguinte:

Definição 2. Sejam $f : D \rightarrow E$ e $g : E \rightarrow T$. A composição de duas funções, ou, a **composta** da função g com a função f é uma nova função $h : D \rightarrow T$, tal que $h(x) = g(f(x))$, para todo $x \in D$, sendo que o conjunto imagem da função f deve estar contido no domínio da função g , $\text{Im}(f) \subseteq E$.

Cabe observar que:

- A função composta h também é denominada $g \circ f$ e sua imagem é dada por: $h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$, para cada x em D ;
- Na definição (2), o conjunto imagem de f deve ser igual ou estar contido no domínio da função g , $\text{Im}(f) \subseteq E$, para que a função composta $g \circ f$ esteja bem definida, ou seja, para que o valor imagem $g(f(x))$ exista, para cada elemento $x \in D$;
- Pode-se fazer a composição de mais do que duas funções, desde que se mantenha a restrição imposta pela Definição 2 entre conjunto imagem e domínio para cada duas funções consecutivas no processo de composição;
- A composição de funções depende da ordem com que as ações são realizadas. Assim, em geral, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \neq (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

A Figura 4 a seguir apresenta um exemplo via dobraduras para ilustrar um caso no qual a ordem com que duas funções são compostas altera o resultado obtido, $f \circ g \neq g \circ f$. Neste exemplo a função f é a ação de dobrar o papel ao meio no sentido vertical.

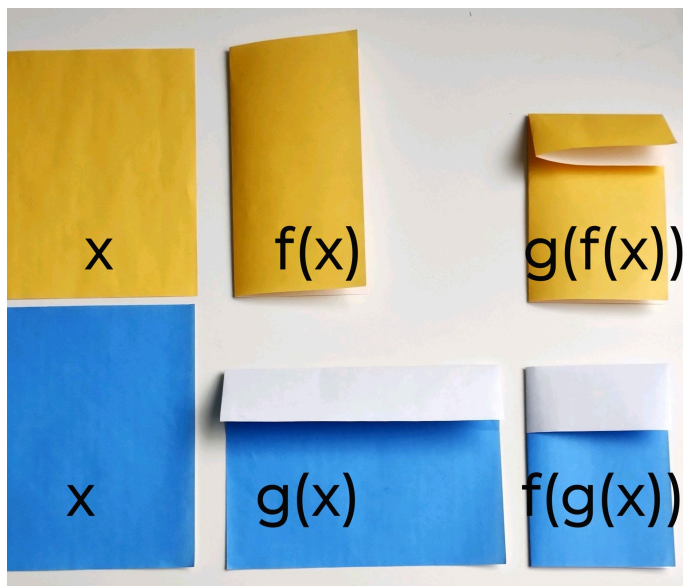


Figura 4: Exemplo $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \neq (g \circ f)(x) = g(f(x))$. A função f é a ação de se dobrar ao meio a folha de papel no sentido vertical. A função g é a ação de se dobrar em uma quarta parte do papel no sentido horizontal.

A função g é a ação de dobrar o papel no sentido horizontal de tal forma que uma quarta parte da folha fique apontando na direção de quem fez a dobra.

A folha com a legenda $g \circ f$ é obtida quando primeiro se dobrar a folha ao meio verticalmente (ação de f) seguido pela dobra horizontal de uma quarta parte do papel, de tal forma que a parte dobrada fique para o lado de quem fez a dobra (ação de g). Já a aplicação da ação g primeiro, seguida pela ação f (de dobrar ao meio) produz um outro origami, $f \circ g$.

Nesse sentido, um origami pode ser interpretado com uma composição de muitas funções, tantas quantas forem as dobras ou movimentos necessários para se formar o objeto final. No caso do origami da face do gato, diagrama da Figura (2), denotam-se cada um dos passos do diagrama por uma função f_1, f_2, f_3 e f_4 . Assim, a composição dessas funções é a maneira natural de se expressar que o resultado de uma função em um passo intermediário será modificado no passo seguinte pela ação de uma nova função. E assim sucessivamente, até que o origami seja finalizado.

Na Figura (5), os passos desse processo de composição de diversas funções são ilustrados. O elemento inicial x é uma folha quadrada. Após a primeira dobra, obtém-se como resultado $f_1(x)$, que é o triângulo maior. A função f_2 representa as duas ações descritas no passo 2. Assim, o elemento $f_2(f_1(x))$ é o papel que teve um vinco marcado na posição da altura além da sua ponta dobrada para baixo, transformando o triângulo em um trapézio. A função f_3 é a responsável pela modificação do trapézio para o que será a cabeça do gato, $f_3(f_2(f_1(x)))$. A função f_4 apenas vira o papel, de tal modo que a face do gato possa ser desenhada, gerando o resultado final $f_4(f_3(f_2(f_1(x))))$. Assim a função f do "passe de mágica" do Exemplo 2 é igual à função composta $f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$. E para cada folha quadrada $x \in A$, tem-se $f(x) = f_4(f_3(f_2(f_1(x))))$ o origami da face de gato.

O origami da face do gato dado como uma função composta é escrito como segue:

$$f: A \longrightarrow C$$

$$x \longmapsto f(x) = f_4(f_3(f_2(f_1(x)))) \tag{3}$$

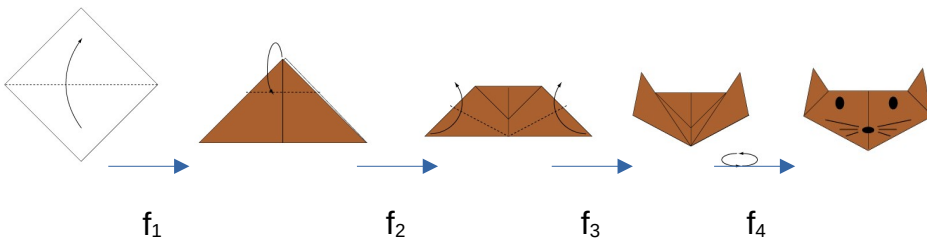


Figura 5: Origami como a função composta $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$

5. Função Inversa: definições e exemplos via dobras

Uma questão relevante é saber se uma determinada ação, função, pode ou não ser revertida ou desfeita, ou seja, se a função é inversível. Essa pergunta no contexto de um origami pode ser formulada como: É possível desdobrar um origami de tal forma que se obtenha novamente a folha quadrada original?

Intuitivamente a resposta para esta questão é sim, pois as dobras feitas ao longo do processo de construção do origami são todas reversíveis, como ilustra a Figura 1. Além disso, conforme a classificação assumida inicialmente para um origami, não se pode nem colar, nem cortar a folha

quadrada de papel em nenhum dos passos da sequência de dobras. Ou seja, pode-se dobrar e desdobrar o papel a qualquer momento, sem destruí-lo, recuperando-se a folha no estado anterior à dobra. Conseqüentemente, é possível seguir este processo inverso até que se obtenha a folha quadrada originalmente considerada.

No entanto, uma resposta mais precisa para esta questão depende não apenas de como a função é definida, mas também da definição e propriedades do contradomínio e da imagem da função. As duas propriedades fundamentais a serem verificadas para que se possa determinar se uma função é ou não inversível são:

1. Quaisquer dois elementos diferentes no domínio são associados a elementos diferentes do contradomínio, ou seja, possuem imagens diferentes;
Analogamente:
Quaisquer elementos do conjunto imagem que forem iguais estão obrigatoriamente associados a elementos iguais do domínio.
2. Todos os elementos do contradomínio C estão no conjunto B imagem da função. Ou seja, $C = B = \text{Im}(f)$.

Matematicamente as propriedades acima são definidas da seguinte maneira:

Definição 3. Uma função $f : A \rightarrow C$ é **injetora** (ou **injetiva**) quando $x \neq y \in A \Rightarrow f(x) \neq f(y) \in C$. Ou equivalentemente, quando $f(x) = f(y) \in B = \text{Im}(f) \Rightarrow x = y$.

Definição 4. Uma função $f : A \rightarrow C$ é dita **sobrejetora** (ou **sobrejetiva**) quando $C = \text{Im}(f)$. Ou seja, dado qualquer elemento $b \in C$, sempre **existe pelo menos um elemento** $x \in A$, tal que $f(x) = b$.

Assim, uma função pode ainda ser classificada como segue:

Definição 5. Uma função $f : A \rightarrow C$ é dita **bijetora** (ou **bijetiva**) se for simultaneamente injetora e sobrejetora.

E com isso, uma função inversível é definida como a seguir:

Definição 6. Uma função $f : A \rightarrow C$ é dita **inversível** se, e somente se, ela for bijetora. Com isso, existe a função inversa de f , denotada por $f^{-1} : C \rightarrow A$, tal que $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$, para cada elemento $y \in C$.

A seguir, verificam-se em quais condições os exemplos da seção anterior são funções inversíveis.

5.1. Origami como uma função inversível

A propriedade 1, descrita na Definição 3, referente à função ser injetora é naturalmente satisfeita por um origami quando visto como função, pois duas folhas quadradas quaisquer vistas como dois elementos distintos do domínio, produzem dois origamis e que por sua vez também serão elementos diferentes da imagem.

Já a propriedade referente à função ser ou não sobrejetora, dada pela Definição 4, é verdadeira para a função origami dos exemplos anteriores, se o contradomínio for considerado igual ao conjunto imagem. A seguir, essas situações são ilustradas com mais detalhes.

5.1.1 Inversa do exemplo 2

No Exemplo 2 (4.2.2), a função f associa a folha quadrada ao origami como em um "passe de mágica". Dessa forma, pode-se considerar que a sua função inversa f^{-1} associa, também como em um "passe de mágica", cada origami da face de gato à sua folha de papel originalmente quadrada.

Cabe observar que agora o domínio da função inversa f^{-1} passa a ser o conjunto C que é o contradomínio da função f . Como a função f modelada no Exemplo 2 é também sobrejetora, seu contradomínio e sua imagem são conjuntos iguais, $C = B = \text{Im}(f)$. Assim, cada elemento y do conjunto C passa a ser o elemento de partida que é associado a algum elemento do conjunto A . E é a função inversa f^{-1} que faz exatamente essa associação entre $y = f(x) \in C$ e $x \in A$: $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1} \circ f(x) = x$. Ou seja, $f^{-1} \circ f$ é a função identidade I , tal que $I(x) = x$, seja qual for o valor de x .

$$\begin{aligned}
 f^{-1}: C &\longrightarrow A \\
 y &\longmapsto f^{-1}(y) = x.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

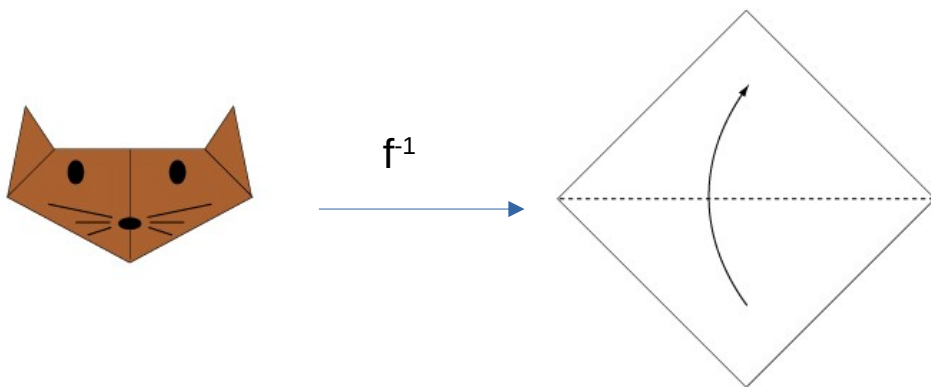


Figura 6: Inversa da função origami, Cenário 1. Associação entre origami da face de gato com sua respectiva folha quadrada original.

Quando o domínio de uma função injetora $f : A \rightarrow C$ contiver mais do que um elemento, isso implica que o conjunto imagem da função também conterà mais do que um elemento. Na verdade, o número de elementos tanto no conjunto imagem quanto no domínio será igual, $\#\text{Im}(f) = \#A$, como na situação apresentada no final da Seção 4.2.1. Neste texto introdutório não se explora esta questão de cardinalidade [30], mas intuitivamente este é um resultado natural para um conjuntos com um número finito de elementos.

Assim, na construção de vários origamis com material concreto, a propriedade de ser injetora é algo intrínscico, e a propriedade de ser sobrejetora obtém-se quando o contradomínio for igual ao conjunto imagem, $C = B = \text{Im}(f)$. Com isso, preserva-se a associação tanto direta quanto inversa entre cada uma das diferentes folhas de papel e os diferentes origamis obtidos após as dobras. Ou seja, a formulação da função inversa ilustrada na Figura 6 também segue válida quando $\#C = \#A > 1$ e $C = B = \text{Im}(f)$.

5.1.2 Exemplo de uma formulação não inversível

Caso o contradomínio de uma função injetiva $f : A \rightarrow C$ contenha mais elementos do que no seu conjunto imagem, a função não será sobrejetiva e, por consequência, também não será inversível. Essa é a situação ilustrada na Figura 7 a seguir, quando $\text{Im}(f) \subset C$ e $C \neq \text{Im}(f)$.

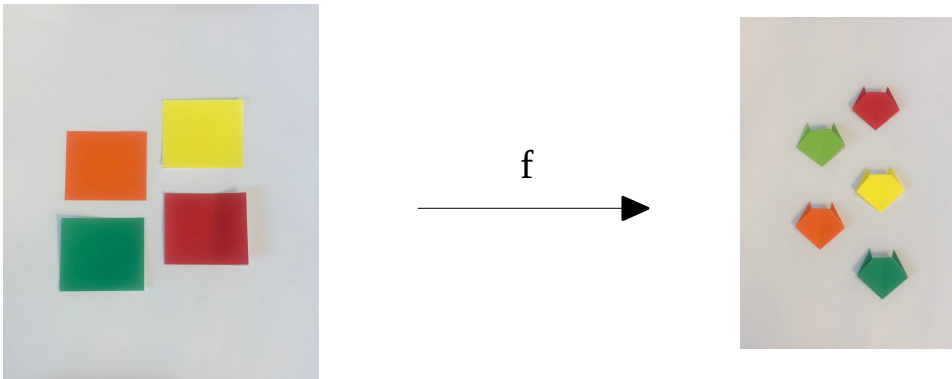


Figura 7: Exemplo de uma função f que é injetora mas não é sobrejetora.

Neste exemplo, a função f associa os elementos do domínio A a elementos no contradomínio C de tal modo que a cor da folha em A seja igual à cor do origami em C . Porém, neste exemplo a função deixa de ser sobrejetora, pois $\#C = 5 > \#\text{Im}(f) = 4 = \#A$. Isso também pode ser concluído pelo fato de não haver nenhuma folha quadrada da cor verde-claro em A . Com isso, o origami da face de gato na cor verde-claro que está no contradomínio C não está no conjunto $B = \text{Im}(f)$ imagem da aplicação f .

Ou seja, neste exemplo a função não é bijetora. E consequentemente, não pode ser inversível. Isso significa que não se pode definir uma função inversa que associe elementos de C aos elementos de A e que satisfaça a definição 1. Essa impossibilidade ocorre porque ao se tentar definir uma operação inversa cujo domínio fosse C , essa operação ficaria mal definida. Quer dizer, existiria um elemento (a face do gato na cor verde-claro) no domínio C sem imagem (pois a folha verde-claro não está contida no conjunto A). E isso não satisfaz a definição de função.

Para que a função deste exemplo possa ser inversível, existem algumas alternativas para se redefinir a função com o objetivo de transformá-la em uma aplicação injetora e sobrejetora: ou a folha quadrada verde-claro é incluída em A (redefinição do domínio de f). Ou se retira o origami de gato na cor verde-claro do conjunto C (redefinição do contradomínio de f para que $C = B = \text{Im}(f)$).

Esta estratégia de se redefinir uma função para deixá-la bijetora (e, portanto, inversível) em pelo menos algum subconjunto do seu domínio original é muito útil e muito utilizada. Um exemplo é o caso das funções trigonométricas e a construção de suas inversas [29].

5.1.3 Inversa de função composta

No Exemplo 3, (4.2.3), a função origami da face do gato $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ é formulada como sendo a composta de quatro funções que descrevem dobras e movimentos no papel, f_k , $k = 1, 2, \dots, 4$. Desta forma, fica intuitivo pensar que para se desdobrar a face de gato por completo até se obter novamente a folha quadrada, cada dobra deve ser desfeita na ordem reversa com que foi executada. A figura 8 ilustra a sequência de funções a serem compostas para a obtenção da folha quadrada como resultado do processo inverso das dobraduras, tendo como início o origami da face de gato.

A Figura (5) ilustra a ordem direta das operações e a Figura (8) ilustra a ordem reversa com que cada dobra deve ser desfeita. Com isso, fica evidenciado que a função inversa $f^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_4^{-1}$ também é uma função composta. Além disso, a Figura (8) ilustra ainda que a composição das inversas de cada ação intermediária é feita na ordem reversa. Portanto, a última dobra feita na face do gato será a primeira a ser desfeita para se iniciar o processo de inversão, e assim sucessivamente, até a obtenção da folha quadrada $x: y = f(x)$ é levado para $f_4^{-1}(y)$, que é levado para $f_3^{-1}(f_4^{-1}(y))$,... até que $f^{-1}(y) = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_4^{-1}(f(x)) = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_4^{-1}(f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(x)) = x$

$$\begin{aligned}
 f^{-1}: \quad C &\longrightarrow A \\
 y &\longmapsto f^{-1}(y) = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_4^{-1}(y) = x.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

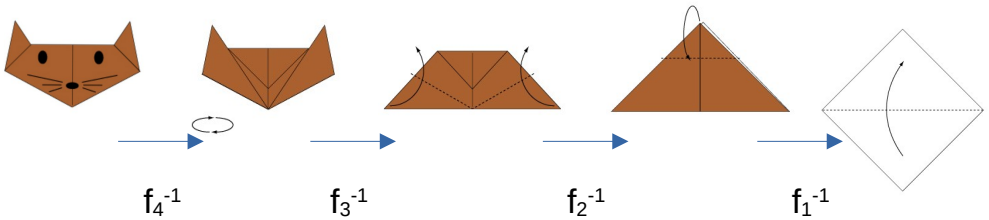


Figura 8: Função inversa: obtenção da folha quadrada partindo do origami da face de gato. Reversão das dobraduras.

Dessa forma, a função vista no Exemplo 3 (4.2.3) é um exemplo natural e intuitivo para se explicitar a relevância da ordem com que cada função inversa f_k^{-1} , $k = 1, 2, \dots, 4$ deve ser considerada para a obtenção de f^{-1} , inversa da função f . Da mesma forma como as dobras feitas ao longo de uma receita de origami servem de exemplo natural para a apresentação do conceito de função relacionado à modelagem de ações e transformações, pode-se explorar estas mesmas receitas do ponto de vista de algoritmos sequenciais, nos quais as instruções (ações) seguem uma ordenação e possuem uma interdependência até que o resultado final seja obtido. Na próxima seção, os Exemplos 2 e 3, 4.2.2 e 4.2.3, são considerados como ponto de partida para se explorar o conceito de algoritmo sequencial.

6. Algoritmo: definição e exemplos via origami

Dentre as várias versões dadas para a definição de algoritmo encontradas na literatura ou em sites especializados em Ciência da Computação, uma delas, conforme [25], é:

Definição 7. Um **algoritmo** é um conjunto de listas de instruções, usado para resolver problemas ou realizar tarefas, com base no entendimento das alternativas disponíveis.

Ou ainda, como apresentado em [22], um algoritmo seria como uma sequência finita de regras, raciocínios ou operações que, aplicada a um número finito de dados, permite solucionar classes semelhantes de problemas. Um algoritmo, portanto, conta com a entrada (*input*) e saída (*output*) de informações mediadas pelas instruções, como ressaltado em [22],

De forma geral, algoritmos são muito mais do que instruções traduzidas em alguma linguagem de programação, eles são especificações para realizar cálculos, processamento de dados, raciocínio automatizado, tomada de decisão, dentre uma infinidade de exemplos, nos quais uma estruturação lógica dos passos de resolução é considerada de forma indispensável.

Segundo [25], “os algoritmos surgiram como auxiliares para se descrever as regras para a elaboração de equações matemáticas, mas atualmente eles são aplicados em quaisquer sequências de ações para se resolver um problema”. Todas as atividades do cotidiano podem, de alguma forma, ser convertidas em um conjunto de ações, que podem ser vistas como passos lógicos e, portanto, instruções, cujo objetivo é a conclusão da atividade proposta.

No clássico exemplo com as receitas culinárias, dado em [25], é natural pensar nos ingredientes como sendo os dados de entrada. O modo de preparo são exatamente as instruções que mediam o processo de execução da receita e que são, portanto, as instruções lógicas do algoritmo. E por fim, há o prato pronto, que é o resultado do algoritmo.

Na verdade, a busca de exemplos e motivações que possam facilitar o ensino de algoritmos e lógica de programação é um tópico pertinente e atual [2]. Uma alternativa recente é a de propor o estudo de tópicos de programação via jogos e ambientes virtuais [20], uma vez que tanto alunos de graduação [26], quanto alunos do Ensino Médio [24] apresentam dificuldades em assimilar todos os conceitos e ferramentas computacionais em um primeiro momento.

Neste sentido, este texto propõe o uso de origamis como uma ferramenta concreta e lúdica para se compreender conceitos relevantes na formulação de algoritmos.

6.1. Algoritmo 1 para o Exemplo 2

O origami da face do gato, com diagrama de instruções dado na Figura 2 e que foi expresso como função no Cenário 4.2.2, encaixa-se na definição de algoritmo. Assim, uma primeira versão do algoritmo para o origami poderia ser formulado com três partes essenciais identificadas (dados de entrada, processo principal, dados de saída), como ilustrado a seguir:

Algoritmo 1: Origami

- *Inputs*: entrada \leftarrow folha quadrada
- *Process (Instruções)*: dobras \leftarrow sequência de ações do diagrama dado na Figura 2, dependendo da entrada.
- *Outputs*: saída \leftarrow face do gato \leftarrow dobras

A folha de papel quadrada é o dado inicial. A sequência finita de dobras são as instruções e ações do processo de resolução. A face do gato obtida no final da execução é o resultado do algoritmo. Nesta primeira formulação não foram detalhadas as etapas que compõem o processo de resolução, denominado “dobras”.

6.2. Algoritmo 2 para o Exemplo 3

A seguir, são descritas as ações que compõem o processo descrito de forma genérica pelo Algoritmo 1. Na verdade, o Algoritmo 2 é o detalhamento do processo do Algoritmo 1, sendo também dividido em subtarefas. Isso muitas vezes é denominado como sendo uma subrotina (ou várias) da rotina principal.

Nesta subrotina, procura-se identificar as diferentes ações e operações contidas nas instruções. Neste exemplo, estas ações são os processos denominados por p1, p2, p3, p4 e p5, de tal forma que os valores de entrada fiquem evidentes, dados pelas variáveis entre parênteses. As setas indicam que o resultado da ação executada será guardado na variável de saída, que são as variáveis do destino da seta.

Outro ponto a ser observado é a dependência entre os dados de saída de cada uma das ações com os dados de entrada das ações seguintes. Essa dependência indica que o origami (e, portanto, o processo que o representa) tem uma natureza sequencial de execução das tarefas.

Algoritmo 2: Sequência das Dobras(entrada)

- *Inputs:* $x \leftarrow$ entrada
- *Process:* **Dobras(x)**
 - **p1:** $a \leftarrow$ dobrar a diagonal(x)
 - **p2:** $b \leftarrow$ marcar a altura do triângulo retângulo(a)
 - **p3:** $c \leftarrow$ dobrar orelhas do gato(b)
 - **p4:** $d \leftarrow$ dobrar cabeça do gato(c)
 - **p5:** $y \leftarrow$ virar a dobradura (d)
- *Outputs:* Dobras(entrada) \leftarrow face do gato \leftarrow y

O Algoritmo 2 é, então, um exemplo do que se define como sendo um Algoritmo Sequencial, pois todas as suas etapas de execução ocorrem uma após a outra, seguindo a ordenação ditada pelas dobras.

Nesta formulação genérica das instruções, os passos intermediários ainda não estão formulados com rigor em termos de fórmulas, nem mesmo focados na sintaxe da linguagem de programação a ser considerada na implementação. No entanto, a natureza sequencial do processo de resolução fica evidenciada nesta formulação.

O algoritmo para a sequência de dobras ainda necessita ser detalhado, de tal modo que para cada etapa intermediária do seu processo (p1, p2, p3, p4 e p5) um novo algoritmo seja construído. Assim é necessário que sejam formuladas várias subrotinas para expressarem cada uma destas novas ações. Este texto inicial propõe-se a formular esta estrutura geral dos algoritmos, sem que aspectos referentes à implementação sejam sugeridos ou discutidos.

7. Conclusões

O conceito “Learning by doing” foi criado pelo educador e filósofo John Dewey, em 1938, e traz a proposta de que a aprendizagem deve ser relevante e prática. Desde então, as ideias de Dewey têm inspirado e motivado pesquisadores, educadores, professores e profissionais de inúmeras áreas de atuação por todo o mundo. Nesse sentido, a proposta pedagógica apresentada neste trabalho está em sintonia com esse conceito, pois a partir da experiência com material concreto elaboram-se e compreendem-se vários conceitos abstratos relacionados com as dobraduras.

Neste texto introdutório foram apresentados exemplos de origamis como forma de motivar a apresentação e definição do conceito de funções e de algoritmos. Aqui, os origamis por sua essência sistemática e sequencial encaixam-se naturalmente nas definições apresentadas e possibilitam que novas questões teóricas sejam motivadas por problemas práticos relacionados às diferentes dobras feitas em papel.

As seqüências de dobras e movimentos que compõem os objetos feitos pela técnica de origami possibilitam, de forma muito intuitiva, a abordagem e a formulação do conceito de função composta e função inversível. Desta forma, uma contribuição deste texto é a apresentação de um exemplo concreto para a formulação da inversa de uma função composta, cujo número de componentes é geralmente maior do que dois. Além disso, o fato de se poder desdobrar o papel na ordem reversa até finalmente a obtenção da folha quadrada original motiva a formulação da inversa de uma função composta como sendo formada pela inversa de cada uma das componentes da composta na ordem contrária.

Outra contribuição deste texto é evidenciar a relação entre origamis e processos sequenciais que podem ser traduzidos por meio de algoritmos. Assim, a seqüência de dobras que compõem um origami está diretamente ligada à seqüência de instruções de um algoritmo sequencial. E consequentemente, diretamente relacionada com os conceitos de rotina e subrotina quando os algoritmos são traduzidos em alguma linguagem de programação.

Agradecimentos

A primeira autora gostaria de agradecer a Mio Nakamura do ateliê Fábrica Japônica, Gotemburgo, Suécia.

A segunda autoria gostaria de agradecer a Eva Duarte do Dobrinhas, Arcoverde, Pernambuco, Brasil.

Referências

- [1] *Come-come*, Construção disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=1_lm0XVL4Y4>. Acesso em: 20 de junho de 2022.
- [2] Costa, J. and Ribeiro Júnior, S. “Aplicação de ferramentas didáticas e lúdicas, associadas ao ensino e aprendizagem de algoritmo e lógica de programação”. *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento*, 2021. Disponível em: <DOI = [10.32749/nucleodoconhecimento.com.br/educacao/logica-de-programacao](https://doi.org/10.32749/nucleodoconhecimento.com.br/educacao/logica-de-programacao)>. Acesso em: 24 de maio de 2022.
- [3] *Diagrama simplificado da face do gato*. Origami Japan. Disponível em: <<https://origamijapan.net/cat-face/>>. Acesso em: 19 dezembro de 2023.

- [4] *Diagrama da face do gato*. Origami club. Disponível em: <<https://en.origami-club.com/easy/animal-face/cat/index.html>>. Acesso em: 20 junho de 2022.
- [5] *Diagrama do Pakupaku*. Origami club. Disponível em: <<https://en.origami-club.com/fun/pakupaku/>> Acesso em: 20 de junho de 2022.
- [6] Duarte, E. *Froebel, Friedrich*. Adedobra, 2020. Disponível em: <<https://adedobra.wordpress.com/2020/05/26/froebel-friedrich/>> Acesso em: 20 de junho de 2022.
- [7] Duarte, E. *Lang, Robert*. Adedobra, 2020. Disponível em: <<https://adedobra.wordpress.com/2020/06/09/lang-robert/>> Acesso em: 20 de junho de 2022.
- [8] Duarte, E. *Origami*. Dobrinhas. Disponível em: <<https://dobrinhas.wordpress.com/origami/>> Acesso em: 20 de junho de 2022.
- [9] Duarte, E. *Yoshizawa, Akira*. Adedobra, 2020. Disponível em: <<https://adedobra.wordpress.com/category/akira-yoshizawa/>> Acesso em: 20 de junho de 2022.
- [10] Ferreira, R. e Duarte, S. “Ensino de programação: trajetória histórico-social e os avanços na cultura digital do Brasil”. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, v. 12, n. 1, p. 386-408, 2019. <DOI= 10.3895/rbect.v12n1.7532>
- [11] Gonçalves, A. C. *Aspectos da história do conceito de funções e suas representações por diagramas, linguagem algébrica e gráficos cartesianos*. Dissertação de Mestrado Profissionalizante, ProfMat, Imecc-USP-São Carlos, 2015. Disponível em <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-01072015-113421/publico/Dissertacao_AlexsandraGoncalves_revisada.pdf>. Acesso em: 20 junho de 2022.
- [12] Hernandes, M. E. *Sistemas polinomiais, mapas e origamis*. 1º Colóquio de Matemática da região Sul, UFSM, Santa Maria, RS, 2010. Disponível em <<https://doczz.com.br/doc/714578/sistemas-polinomiais--mapas-e-origamis>>. Acesso em: 20 junho de 2022.
- [13] *História do Origami - A história de desenvolvimento e difusão de origami*. Origami-Paper.ru. <https://origami-paper.ru/origami/portuguese/istoriya_origami/istoriya_razvitiya_i_rasprostraneniya_origami.html>. Acesso em: 26 de maio de 2022.
- [14] *History of origami*. EMOZ - Educational Museum Origami Zaragoza. <http://www.emoz.es/QR/sala_leng.html>. Acesso em: 20 junho de 2022.
- [15] Hull, T. C. “Solving Cubics with creases: The work of Beloch and Lill”. *The American Mathematical Monthly*, v. 118, n. 4 , p. 307-315, 2011.
- [16] *Huzita-Hatori Axioms*. Wikipedia. <https://en.wikipedia.org/wiki/Huzita%E2%80%93Hatori_axioms>. Acesso em: 20 de junho de 2022.
- [17] Kanegae, M. *Breve Histórico do Origami no Brasil*. <<http://www.kamiarte.com.br/breve-historico2.htm>>. Acesso em: 20 de junho de 2022.
- [18] Lang, R. J. *A computational algorithm for origami design*. SCG '96: Proceedings of the twelfth annual symposium on Computational geometry, p. 98-105, 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/237218.237249>>. Acesso em: 20 junho de 2022.
- [19] Lister, D. *Is the origin of origami chinese or japanese?*. British Origami, 2003. <<https://www.britishorigami.org/cp-lister-list/origins-of-origami/>>. Acesso em: 20 de junho de 2022.
- [20] Nalia, J. V. and Begosso, L. C. *Gamificação de algoritmos*. Intelecto, Fema, Assis, ISSN: 2596-0806, v. 2, 2019.

- [21] O'Carroll, E. *Akira Yoshizawa: Why origami matters*. The Christian Science Monitor, 2012. Disponível em: <<https://www.csmonitor.com/Technology/Horizons/2012/0314/Akira-Yoshizawa-Why-origami-matters>>. Acesso em: 24 de maio de 2022.
- [22] Sousa, P. *Conceito de algoritmo*, <<https://conceito.de/algoritmo>>. Acesso em: 28 de maio de 2022.
- [23] Souza, R. P. *A construção do conceito de função através de atividades baseadas em situações do dia a dia*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, 2016. Disponível em: <<https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/23112016Rebeca-Pereira-de-Souza.pdf>>. Acesso em: 20 junho de 2022.
- [24] Teixeira, A. C.; Martins, J. A. R.; Batistela, F. e Oro, N. T., *Programação de computadores para alunos do ensino fundamental: A Escola de Hackers*. XXI Workshop de Informática na Escola, 2015, <DOI = "10.5753/cbie.wie.2015.112", >. Acesso em: 24 de maio de 2022.
- [25] *Understanding algorithms in Computer Science*. International University of Geneva, 2022, Disponível em: <<https://www.iun.ch/en-en/blog/computer-science/algorithm-computer-science-definition-and-understanding>>. Acesso em: 26 de maio de 2022.
- [26] Vahldick, A. *Uma Experiência Lúdica no Ensino de Programação Orientada a Objetos*. XVIII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 2007.
- [27] Vieira, M. F. *A arte do origami no ensino de geometria: um estudo de caso no PROJÓVEM adolescente*. Trabalho de Conclusão de Curso, Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual da Paraíba, 2012.
- [28] ANDRADE, Jael Miriam; SARAIVA, Manuel Joaquim. *Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de função*. Relime, Ciudad de México, v. 15, n. 2, p. 137-169, jul. 2012. Disponível em: <http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362012000200002&lng=es&nrm=iso>. Acesso em 18 dez. 2023.
- [29] Alves, Diego. *A trigonometria do Ensino Fundamental para o Ensino Médio: Uma proposta didática*. IMPA, TCC, orientação: Imbuzeiro, Roberto. 2017. <https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/TCC_2017_diego_aAlves.pdf>. Acesso em 01 jan. 2024.
- [30] Lima, Elon Lages. *Análise Real - vol. 1 - Funções de uma Variável*, 13ª edição, Impa, 2020. ISBN: 978-65-990528-5-9

Alice Kozakevicius
Universidade Federal de Santa Maria
<alicek@ufsm.br>

Maite Kulesza
Universidade Federal Rural de Pernambuco
<maite.kulesza@ufrpe.br>

Recebido: 20/06/2022
Publicado: 01/04/2024