PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.12, n.1, 2024
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2024/pmo128

Algumas Propriedades dos Ternos Quase Pitagóricos

Jessé Garcia de Faria   Martinho da Costa Araujo

Resumo

Neste trabalho apresentamos o conjunto $\mathbb{T}_m$, formado por ternos (x, y, z), onde x, y e z são números inteiros que satisfazem a equação $x^2 + my^2 = z^2$, com $z > 0$ e m um inteiro positivo livre de quadrado. Os ternos $(x, y, z) \in \mathbb{T}_m$ são chamados ternos quase pitagóricos. Temos como objetivo, determinar algumas propriedades dos elementos pertencentes a $\mathbb{T}_m$. Para isso, definimos uma relação de equivalência $\sim$ sobre $\mathbb{T}_m$ e tomamos suas classes de equivalências, para formar um novo conjunto $\mathbb{T}_{[m]}$, conhecido como conjunto quociente de $\mathbb{T}_m$ por $\sim$, ou seja, $\mathbb{T}_{[m]} = \mathbb{T}_m/\sim$. Em $\mathbb{T}_{[m]}$, consideramos as classes de equivalências $[(a, b, c)]$ tais que a e b sejam primos entre si. E também definimos uma operação sobre $\mathbb{T}_{[m]}$. Mostramos que $\mathbb{T}_{[m]}$, munido dessa operação, é um grupo abeliano. Por fim, identificamos cada elemento de $\mathbb{T}_{[m]}$ por um número complexo da forma $w = \frac{x}{z} + i\frac{y\sqrt{m}}{z}$ sobre circunferência unitária com centro na origem no plano complexo.

Palavras-chave: Grupo abeliano; números complexos; terno quase pitagórico; classes de equivalências.

Abstract

In this work, we present the set $\mathbb{T}_m$, consisting of triples (x, y, z), where x, y, and z are integers that satisfy the equation $x^2 + my^2 = z^2$, with $z > 0$, and m is a square-free positive integer. The triples $(x, y, z) \in \mathbb{T}_m$ are called almost pythagorean triples. Our goal is to determine some properties of the elements belonging to $\mathbb{T}m$. To do so, we define an equivalence relation $\sim$ on $\mathbb{T}m$ and take its equivalence classes to form a new set $\mathbb{T}[m]$, known as the quotient set of $\mathbb{T}m$ by $\sim$, that is, $\mathbb{T}[m] = \mathbb{T}m/\sim$. In $\mathbb{T}[m]$, we consider the equivalence classes $[(a, b, c)]$ such that a and b are coprime. And we also define an operation on $\mathbb{T}[m]$. Show that $\mathbb{T}[m]$, equipped with this operation, is an abelian group. Finally, we represent each element of $\mathbb{T}[m]$ as a complex number in the form $w = \frac{x}{z} + i\frac{y\sqrt{m}}{z}$ on the unit circle centered at the origin in the complex plane.

Keywords: Abelian group; complex numbers; Almost Pythagorean Triple; equivalence classes.

1. Introdução

Neste trabalho estudaremos o conjunto solução da equação $x^2+my^2 = z^2$ com m um inteiro positivo livre de quadrados. Tal equação é obtida a partir de uma pequena modificação na equação de Pitágoras para triângulo retângulos ($x^2 + y^2 = z^2$). Uma tripla de inteiros (x, y, z) que satisfaz a equação $x^2 + my^2 = z^2$, com m um inteiro positivo livre de quadrados, é chamada de terno quase pitagórico (veja a observação 1). Embora sejam chamados de terno quase pitagórico um terno (x, y, z), com x, y e z inteiros, tais que $x^2 + my^2 = z^2$, não encontramos evidências de que Pitágoras tenha estudado esse tipo de equação. A justificativa para essa denominação é o fato de tal equação assemelhar-se à equação do Teorema de Pitágoras. Além disso, em nossas pesquisas, não encontramos referências bibliográficas sobre o assunto, a não ser [2] e grande parte do teor deste trabalho segue de maneira específica o que foi feito no artigo [1], o que justifica a terminologia e a notação que adotamos neste texto. Outro fato que vale destacar é que algumas das propriedades que identificamos foram enunciadas e provadas sem evidências de já terem sido estudadas anteriormente. O objetivo deste trabalho é estudar o conjunto solução da equação $x^2 + my^2 = z^2$ com x, y, z inteiros, com $z > 0$ e m livre de quadrados, apresentando uma expressão que representa alguns elementos deste conjunto solução e também algumas de suas propriedades. Cabe dizer que não há prejuízos neste estudo em admitir a condição $z > 0$ acima, conforme será justificado na próxima seção.

2. Definição e Algumas Propriedades

Definição 1. Um número inteiro livre de quadrados é um inteiro que não é divisível por nenhum número ao quadrado diferente de 1.

Definição 2. Sejam $x, y, z \in \mathbb{Z}$. O terno (x, y, z) é chamado terno quase pitagórico quando satisfaz a equação

$$x^2 + my^2 = z^2 \tag{1}$$

com m um inteiro positivo fixo livre de quadrados.

Observação 1. Note que esta equação assemelha-se à equação de Pitágoras associada a triângulos retângulos, o que difere é apenas o coeficiente natural m livre de quadrados. Adotamos essa condição sobre m, caso contrário, em $m = k^2 n$, com $k, n \in \mathbb{Z}$ e n livre de quadrados, basta escrever m usando o teorema fundamental da aritmética e agrupando os termos de potência par. Dessa forma, obtemos

$$x^2 + my^2 = z^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + nk^2y^2 = z^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + n(k^2y^2) = z^2.$$

Esta última equação é uma equação quase pitagórica com n livre de quadrados.

Exemplo 1. O terno $(1, 2, 3)$, satisfaz a equação $x^2 + 2y^2 = z^2$. Portanto é um terno quase pitagórico, bem como os ternos $(2, 4, 6)$ e $(3, 6, 9)$ também o são.

Proposição 1. *Seja* (x, y, z) *um terno quase pitagórico.*

1. Se $x = 0$*, então* $y = z = 0$.

2. Se $z = 0$*, então* $x = y = 0$.

Demonstração. Seja (x, y, z) um terno quase pitagórico.

1. De fato, se $x = 0$, então

$$x^2 + my^2 = z^2 \;\Rightarrow\; my^2 = z^2 \;\Rightarrow\; my^2 - z^2 = 0 \;\Rightarrow\; m\left(y^2 - \frac{z^2}{m}\right) = 0.$$

Como m é um inteiro positivo livre de quadrados (m > 1), temos

$$m\left(y^2 - \frac{z^2}{m}\right) = 0 \;\Rightarrow\; y^2 - \frac{z^2}{m} = 0 \;\Rightarrow\; \left(y + \frac{z}{\sqrt{m}}\right)\cdot\left(y - \frac{z}{\sqrt{m}}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} y - \dfrac{z}{\sqrt{m}} = 0 \\ y + \dfrac{z}{\sqrt{m}} = 0 \end{cases}.$$

Somando as duas equações do sistema acima, obtemos $y = 0$, e subtraindo uma equação pela outra, obtemos $z = 0$.

2. Se $z = 0$ então, $x^2 + my^2 = z^2 \;\Rightarrow\; x^2 + my^2 = 0$. Mas como $m \in \mathbb{N}$ é livre de quadrados ($m > 1$), temos $x^2 + my^2 \neq 0$, a não ser que $x = y = 0$.

□

No exemplo a seguir atribuímos alguns valores para z, a fim de analisar o comportamento da equação $x^2 + my^2 = z^2$.

Exemplo 2. Para $z = 0$, a equação (1) reduz-se a $x^2 + my^2 = 0$, que pela proposição (1) só admite a solução $(0, 0)$.

Para $z = c > 0$, onde c é uma constante, temos que a equação (1) torna-se

$$x^2 + my^2 = c^2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2}{c^2} + m\frac{y^2}{c^2} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{\frac{c^2}{m}} = 1,$$

que é a equação de uma elipse de eixo maior 2c e eixo menor $\dfrac{2c}{\sqrt{m}}$.

O exemplo acima permite perceber que todas essas equações referem-se a equações de elipses centradas na origem do plano cartesiano, e os ternos quase pitagóricos com $z < 0$ estão associados a pontos de uma elipse que é formada pela mesma equação determinada no caso em que é $z > 0$. Já quando $z = 0$, a proposição (1) diz-nos que única solução para a equação (1) é o terno $(0, 0, 0)$.

Daqui por diante, vamos considerar o conjunto $\mathbb{T}_m$ abaixo

$$\mathbb{T}_m = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3;\;\; x^2 + my^2 = z^2 \text{ e } z > 0\}$$

como o conjunto dos ternos quase pitagóricos.

A seguir apresentamos uma proposição que garante a existência de uma infinidade de ternos quase pitagóricos.

Proposição 2. *Se* (x_0, y_0, z_0) *é um terno quase pitagórico, então* (ax_0, ay_0, az_0) *também o é, para todo* $a \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. De fato, se (x_0, y_0, z_0) é um terno quase pitagórico, então pela definição 1 temos $x_0^2 + my_0^2 = z_0^2$.

Logo, para qualquer inteiro a, temos

$$(ax_0)^2 + m\cdot(ay_0)^2 = a^2(x_0^2 + m\cdot y_0^2) = a^2z_0^2 = (az_0)^2.$$

Portanto (ax_0, ay_0, az_0) é um terno quase pitagórico, para todo $a \in \mathbb{Z}$. □

Desse modo se conseguirmos encontrar um terno quase pitagórico, então podemos, através deste, gerar infinitos outros ternos que satisfazem a equação (1).

Proposição 3. *Seja* (x, y, z) *um terno quase pitagórico. Se* $d = \text{mdc}(x, y)$ *então* $\left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d}\right)$ *é um terno quase pitagórico.*

Demonstração. De fato, se (x, y, z) é um terno quase pitagórico, então $x^2 + my^2 = z^2$.

Agora supondo $d = \text{mdc}(x, y)$, temos que

$$d \mid x \;\Rightarrow\; d^2 \mid x^2$$

e também que

$$d \mid y \;\Rightarrow\; d^2 \mid my^2.$$

Logo $d^2 \mid (x^2 + my^2) \;\Rightarrow\; d^2 \mid z^2 \;\Rightarrow\; d \mid z.$

Isto é, existem $x', y', z' \in \mathbb{Z}$ tais que

$$x = x'd, \quad y = y'd, \quad z = z'd \quad \text{e} \quad \text{mdc}(x', y') = 1.$$

Substituindo as igualdades acima em $x^2 + my^2 = z^2$, obtemos

$$\begin{aligned} x^2 + my^2 = z^2 \quad &\Leftrightarrow \quad x'^2d^2 + my'^2d^2 = z'^2d^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x'^2 + my'^2 = z'^2. \end{aligned}$$

Como $x' = \frac{x}{d}$, $y' = \frac{y}{d}$, $z' = \frac{z}{d}$, concluímos que $\left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d}\right)$ é um terno quase pitagórico, onde mdc(x',y')=1. □

Esta proposição motiva-nos a introduzir a seguinte definição.

Definição 3. Sejam $x, y, z \in \mathbb{Z}$ satisfazendo $x^2 + my^2 = z^2$. Quando $\text{mdc}(x, y) = 1$, o terno (x, y, z) é denominado terno quase pitagórico primitivo.

Com isso podemos pensar na possibilidade de estudar o conjunto de todos os ternos quase pitagóricos, utilizando apenas os ternos quase pitagóricos primitivos, pois pelas proposições anteriores podemos gerar qualquer terno quase pitagórico, a partir de um terno quase pitagórico primitivo.

Exemplo 3. No Exemplo 1 temos que $(1, 2, 3)$ é um terno quase pitagórico primitivo para a equação $x^2 + 2y^2 = z^2$, e tal terno gera os outros ternos quase pitagóricos:

$$(2, 4, 6) = (2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3) \;\text{ e }\; (3, 6, 9) = (3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3).$$

Pela Proposição 2, concluímos que $(t, 2t, 3t)$ é um terno quase pitagórico, para todo $t \in \mathbb{Z}$.

A seguir, vamos determinar uma expressão que caracteriza alguns ternos quase pitagóricos. Para isso faremos a seguinte observação.

Se $z \neq 0$, então

$$x^2 + my^2 = z^2 \Rightarrow \left(\frac{x}{z}\right)^2 + m\left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1 \Rightarrow u^2 + mv^2 = 1.$$

Onde $u = \dfrac{x}{z}$ e $v = \dfrac{y}{z}$.

Desse modo, encontrar ternos quase pitagóricos é equivalente a encontrar soluções racionais da equação

$$u^2 + mv^2 = 1,$$

que representa uma elipse com o centro na origem do plano cartesiano.

Teorema 1. *Dados* a *e* b *números reais não simultaneamente nulos e* $m > 0$ *um número real, o par ordenado*

$$(u, v) = \left(\frac{a^2 - mb^2}{a^2 + mb^2} \; , \; \frac{2ab}{a^2 + mb^2} \right)$$

descreve todos os pontos da elipse de equação $u^2 + mv^2 = 1$.

Demonstração. Inicialmente, note que $(1, 0)$ é solução da equação $u^2 + mv^2 = 1$, para todo $m \in \mathbb{R}$ e também, que $(1, 0)$ é da forma escrita no enunciado acima; para isso basta fazer $b = 0$.

Agora observe que os pontos pertencentes à reta r que passa pelos pontos $(1, 0)$ e (a, b) qualquer, são do tipo

$$(1, 0) + t(a, b) \;\; = \;\; (1 + ta, tb).$$

Se $t \neq 0$, então a interseção da reta r com a elipse em questão possui dois pontos, um deles é $(1, 0)$ e o segundo é um ponto $P(1 + ta, tb)$ tal que $(1 + ta)^2 + m(tb)^2 = 1$, como na Figura 1.

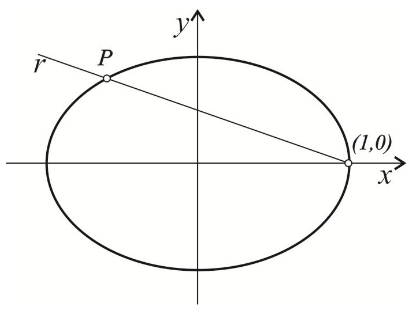

Figura 1: Ponto sobre uma elipse $u^2 + mv^2 = 1$

Assim,

$$\begin{aligned} (1 + ta)^2 + m(tb)^2 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 + 2ta + t^2a^2 + mt^2b^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2ta + t^2a^2 + mt^2b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad t(2a + ta^2 + mtb^2) = 0. \end{aligned}$$

Logo $t = 0$ ou $2a + ta^2 + mtb^2 = 0$.

Dessa última expressão obtemos

$$\begin{aligned} 2a + ta^2 + mtb^2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad t(a^2 + mb^2) = -2a \\ &\Leftrightarrow \quad t = \frac{-2a}{a^2 + mb^2}. \end{aligned}$$

Substituindo $t = \dfrac{-2a}{a^2+mb^2}$ em $P(1+ta, tb)$, obtemos

$$\begin{aligned} P(1+ta, tb) &= P\left(1-\frac{2a^2}{a^2+mb^2}, -\frac{2ab}{a^2+mb^2}\right) \\ &= P\left(\frac{-a^2+mb^2}{a^2+mb^2}, \frac{-2ab}{a^2+mb^2}\right). \end{aligned}$$

Como esses pontos são simétricos em relação ao eixo-x e ao eixo-y, podemos considerar os pontos representado pelo par ordenado

$$\left(\frac{a^2-mb^2}{a^2+mb^2}, \frac{2ab}{a^2+mb^2}\right), \tag{2}$$

tais que

$$\left(\frac{a^2-mb^2}{a^2+mb^2}\right)^2 + m\left(\frac{2ab}{a^2+mb^2}\right)^2 = \frac{(a^2+mb^2)^2}{(a^2+mb^2)^2} = 1.$$

Portanto, a expressão (2) representa os pontos pertencentes à elipse de equação $u^2 + mv^2 = 1$. □

Observação 2. Tomando $a, b \in \mathbb{Z}$ não simultaneamente nulos e $m > 0$ um inteiro, temos que $(a^2 - mb^2)$, $(2ab)$ são inteiros, e $(a^2 + mb^2)$ um inteiro positivo, logo as coordenas dos pontos representados por (2) são racionais, ou seja,

$$\left(\frac{a^2-mb^2}{a^2+mb^2}, \frac{2ab}{a^2+mb^2}\right) \in \mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}.$$

Teorema 2. *Se* $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$, *então o terno* $(a^2 - mb^2\ ,\ 2ab\ ,\ a^2 + mb^2)$ *é um terno quase pitagórico, para todo* $m \in \mathbb{N}$ *livre de quadrados.*

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} (a^2-mb^2)^2 + m(2ab)^2 &= a^4 - 2ma^2b^2 + m^2b^4 + 4ma^2b^2 \\ &= (a^2)^2 + 2ma^2b^2 + (mb^2)^2 \\ &= (a^2+mb^2)^2 \end{aligned}$$

O que implica que $(a^2 - mb^2\ ,\ 2ab\ ,\ a^2 + mb^2)$ é um terno quase pitagórico. □

A expressão enunciada no teorema anterior sugere que, se $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$, então os ternos do tipo

$$(a^2 - mb^2\ ,\ 2ab\ ,\ a^2 + mb^2), \tag{3}$$

são soluções de uma equação do tipo $x^2 + my^2 = z^2$. Mas recíproca deste teorema não é verdadeira, pois podemos encontrar diversos ternos quase pitagóricos que não podem ser descritos pela expressão acima com $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$.

Veja que o terno $(1, 2, 3)$ é solução da equação $x^2+2y^2 = z^2$, mas este terno não pode ser representado pela tripla dada em (3), pois não encontramos valores inteiros para a, b, c que satisfazem o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 - 2b^2 = 1 \\ a^2 + 2b^2 = 3 \end{array} \right. .$$

A saber $a = \pm\sqrt{2}$ e $b = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ são as soluções para este sistema.

3. Classe de Ternos Quase Pitagóricos

As proposições demonstradas na seção anterior permitem-nos pensar em particionar o conjunto $\mathbb{T}_{\mathrm{m}}$ em um conjunto de classes, onde cada classe é gerada por um terno quase pitagórico primitivo. Para isso, definimos a seguinte relação.

Definição 4. Dizemos que $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{T}_{\mathrm{m}}$ estão relacionados pela relação binária $\sim$ sobre $\mathbb{T}_{\mathrm{m}}$ e escrevemos $(x, y, z) \sim (a, b, c)$ quando existirem $r, s \in \mathbb{Z}^*$ tais que $r(x, y, z) = s(a, b, c)$.

Proposição 4. *A Relação $\sim$ definida sobre $\mathbb{T}_{\mathrm{m}}$ é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Sejam $(a, b, c),\ (d, e, f),\ (u, v, w) \in \mathbb{T}_{\mathrm{m}}$, temos que

1. ($\sim$ é reflexiva). Com efeito,
$$(a, b, c) = 1 \cdot (a, b, c) \ \Rightarrow\ (a, b, c) \sim (a, b, c).$$

2. ($\sim$ é simétrica). De fato, se $(a, b, c) \sim (d, e, f)$, então, pela definição existem $r, s \in \mathbb{Z}^*$ tais que
$$r(a, b, c) = s(d, e, f)$$
e como a relação de igualdade é uma relação simétrica temos que $s(d, e, f) = r(a, b, c)$.
Logo $(d, e, f) \sim (a, b, c)$.

3. ($\sim$ é transitiva).
Se $(a, b, c) \sim (d, e, f)$ e $(d, e, f) \sim (u, v, w)$ então pela definição da relação $\sim$, existem $p, q, r, s \in \mathbb{Z}^*$ tais que
$$p(a, b, c) = q(d, e, f) \ \text{ e } \ r(d, e, f) = s(u, v, w).$$
Multiplicando membro a membro a primeira igualdade por r e a segunda por q, obtemos
$$pr(a, b, c) = qr(d, e, f) \ \text{ e } \ qr(d, e, f) = qs(u, v, w).$$
Logo $pr(a, b, c) = qs(u, v, w)$, o que significa que
$$(a, b, c) \sim (u, v, w).$$

Desse modo concluímos que a relação $\sim$ é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{T}_{\mathrm{m}}$. □

Uma vez que a relação $\sim$ é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{T}_{\mathrm{m}}$, faz sentido considerarmos o conjunto quociente de $\mathbb{T}_{\mathrm{m}}$ pela relação $\sim$. Denotaremos esse conjunto quociente por $\mathbb{T}_{[\mathrm{m}]}$ e cada elemento de $\mathbb{T}_{[\mathrm{m}]}$ será denominado classe de ternos quase pitagóricos.

Dado $(a, b, c) \in \mathbb{T}_{\mathrm{m}}$, a classe de ternos quase pitagóricos determinada por (a, b, c) consiste no conjunto
$$[(a, b, c)] = \{(x, y, z) \in \mathbb{T}_{\mathrm{m}} : (x, y, z) \sim (a, b, c)\}.$$

Dizemos que cada elemento (a, b, c) é um representante da classe $[(a, b, c)]$. É evidente que cada classe $[(a, b, c)]$ possui uma infinidade de representantes, porém pelas proposições 2 e 3 podemos escolher um terno quase pitagórico primitivo dessa classe para a sua representação.

Proposição 5. *Para cada classe*

$$[(a,b,c)] = \{(x,y,z) \in \mathbb{T}_m;\ \ (x,y,z) \sim (a,b,c)\}$$

existe apenas um único terno quase pitagórico primitivo.

Demonstração. Seja (a,b,c) um terno quase pitagórico primitivo, que por definição $\mathrm{mdc}(a,b) = 1$.

Note inicialmente que os ternos quase pitagóricos primitivos com $b = 0$ são $(1,0,1)$ e $(-1,0,1)$ apenas e pertencem a classes diferentes, além disso não é difícil ver que são os únicos primitivos de suas classes.

Agora, se $b \neq 0$, então $a \neq 0$ também, pois $a^2 + mb^2 = z^2$ e $\mathrm{mdc}(a,b) = 1$.

Logo, se $(d,e,f) \in [(a,b,c)]$ é um terno quase pitagórico primitivo, então pela definição 4 existem $r,s \in \mathbb{Z}^*$ tais que $(rd,re,rf) = (sa,sb,sc)$, isto é,

$$\begin{cases} rd = sa \\ re = sb \\ rf = sc \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} rdb = sab \\ rea = sba \\ rf = sc \end{cases}.$$

Subtraindo membro a membro a segunda equação da primeira (última chave), temos $rdb - rea = 0$, o que implica $db = ea$. Assim $d \mid ea$, e como $\mathrm{mdc}(d,e) = 1$ temos $d \mid a$, do mesmo modo obtemos $a \mid bd$ e como $\mathrm{mdc}(a,b) = 1$ afirmamos que $a \mid d$. Neste caso temos $d \mid a$ e $a \mid d$ e pelas propriedades da divisibilidade concluímos que $d = \pm a$. Analogamente se obtém $e = \pm b$.

Logo, se $a^2 + mb^2 = d^2 + me^2$, então $c^2 = f^2$, e como estamos considerando apenas os ternos com a terceira componente positiva, concluímos que $c = f$.

Portanto o terno (d,e,f) pode ser um dos ternos $(-a,-b,c)$, $(-a,b,c)$, $(a,-b,c)$ ou (a,b,c). Mas os três primeiros ternos não pertencem à classe de $[(a,b,c)]$ e como $(d,e,f) \in [(a,b,c)]$, concluímos que $(d,e,f) = (a,b,c)$ como queríamos. □

Proposição 6. *Seja* $[(a,b,c)] \in \mathbb{T}_{[m]}$, *com* a *e* b *primos entre si. Se* $(x,y,z) \in [(a,b,c)]$ *então* $(x,y,z) = t(a,b,c)$, *para algum* $t \in \mathbb{Z}^*$.

Demonstração. De fato, sejam $(x,y,z) \in [(a,b,c)]$ com $\mathrm{mdc}(a,b) = 1$, temos pela definição da relação $\sim$ que existem $r,s \in \mathbb{Z}^*$ tais que

$$r(x,y,z) = s(a,b,c).$$

Seja $d = \mathrm{mdc}(r,s)$, logo existe $t,u \in \mathbb{Z}^*$ tais que $r = du$ e $s = dt$.

Note que $\mathrm{mdc}(u,t) = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} r(x,y,z) = s(a,b,c) \quad &\Rightarrow \quad du(x,y,z) = dt(a,b,c) \\ &\Rightarrow \quad u(x,y,z) = t(a,b,c) \\ &\Rightarrow \quad (ux,uy,uz) = (ta,tb,tc). \end{aligned}$$

Em consequência disso temos $ux = ta$ e $uy = tb$. Desse modo $u \mid ta$, mas como u e t são primos entre si, temos $u \mid a$. Analogamente obtemos que $u \mid b$. Concluindo que $u = 1$, pois a e b são primos entre si.

Portanto, se $u(x,y,z) = t(a,b,c)$, então $(x,y,z) = t(a,b,c)$, para algum $t \in \mathbb{Z}^*$. □

Assim, se (a, b, c) é um terno quase pitagórico primitivo, então podemos representar sua classe por

$$[(a,b,c)] = \{(x,y,z) \in \mathbb{T}_m; (x,y,z) = (ta,tb,tc), \forall t \in \mathbb{Z}^*\}.$$

3.1. Operação em $\mathbb{T}_m$

Lema 1. *Se* (x, y, z) *e* (a, b, c) *são ternos quase pitagóricos, então*

$$(zc)^2 = (xa - myb)^2 + m(xb + ya)^2.$$

Demonstração. Observe inicialmente que, se (x, y, z) e (a, b, c) são ternos quase pitagóricos, então

$$x^2 + my^2 = z^2 \quad \text{e} \quad a^2 + mb^2 = c^2.$$

Multiplicando essas duas igualdades membro a membro, temos

$$\begin{aligned} (zc)^2 = z^2 \cdot c^2 &= (x^2 + my^2) \cdot (a^2 + mb^2) \\ &= x^2a^2 + mx^2b^2 + my^2a^2 + m^2y^2b^2. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $(2xamyb)$, adequadamente, na última expressão obtemos

$$x^2a^2 - 2xamyb + m^2y^2b^2 + mx^2b^2 + 2xamyb + my^2a^2.$$

Fatorando esta última expressão temos $(xa - myb)^2 + m(xb + ya)^2 = (zc)^2$. □

Tal resultado mostra-nos que o produto de dois inteiros da forma $x^2 + my^2$ é também dessa forma. Podemos então definir uma operação sobre sobre $\mathbb{T}_{[m]}$, que denotaremos por $\star$ da seguinte forma.

Definição 5. Dadas $[(x, y, z)]$ e $[(a, b, c)]$ duas classes do conjunto $\mathbb{T}_{[m]}$, definimos a operação $\star$ da seguinte maneira

$$[(x,y,z)] \star [(a,b,c)] := [(xa - myb, xb + ya, zc)].$$

Mostraremos agora que essa operação está bem definida no conjunto $\mathbb{T}_{[m]}$, ou seja, a operação

$$[(x,y,z)] \star [(a,b,c)]$$

independe dos representantes das classes, mais precisamente temos a seguinte

Proposição 7. *Sejam* (x, y, z), (a, b, c), (x', y', z') *e* (a', b', c') *são ternos quase pitagóricos tais que* $\mathrm{mdc}(x, y) = \mathrm{mdc}(a, b) = 1$. *Se,*

$$[(x,y,z)] = [(x',y',z')] \quad \text{e} \quad [(a,b,c)] = [(a',b',c')],$$

então

$$[(x,y,z)] \star [(a,b,c)] = [(x',y',z')] \star [(a',b',c')].$$

Demonstração. Sejam (x, y, z), (a, b, c), (x', y', z') e (a', b', c') ternos quase pitagóricos como nas hipóteses do enunciado. Então existem $r, s \in \mathbb{Z}^*$ tais que

$(x', y', z') = (rx, ry, rz)$ e $(a', b', c') = (sa, sb, sc)$, assim

$$\begin{aligned}[(x', y', z')] \star [(a', b', c')] &= [(rx, ry, rz)] \star [(sa, sb, sc)]\\ &= [(rxsa - mrysb, rxsb + rysa, rzsc)]\\ &= [(rs(xa - myb), rs(xb + ya), rs(zc))]\\ &= [(xa - myb, xb + ya, zc)]\\ &= [(x, y, z)] \star [(a, b, c)].\end{aligned}$$

□

Esse resultado garante que a operação $\star$ está bem definida no conjunto $\mathbb{T}_{[m]}$ e encerraremos esta seção demonstrando que $(\mathbb{T}_{[m]}, \star)$ é um grupo abeliano.

Teorema 3. $(\mathbb{T}_{[m]}, \star)$ *é um Grupo Abeliano, isto é, a operação* $\star$ *é associativa, comutativa, existe um elemento neutro para a operação* $\star$ *em* $\mathbb{T}_{[m]}$*, e cada elemento de* $\mathbb{T}_{[m]}$ *possui um simétrico em relação a operação* $\star$*.*

Demonstração. Sejam então $[(x, y, z)]$, $[(a, b, c)]$ e $[(p, q, r)]$ classes de ternos pertencente a $\mathbb{T}_{[m]}$.

i) A operação $\star$ é associativa. De fato,

$$\begin{aligned}\{[(x, y, z)] \star [(a, b, c)]\} \star [(p, q, r)] &= [(xa - myb, xb - ya, zc)] \star [(p, q, r)]\\ &= [((xa - myb)p - m(xb + ya)q, (xa - myb)q + (xb + ya)p, zcr)]\\ &= [(xap - mybp - mxbq - myaq, xaq - mybq + xbp + yap, zcr)]\\ &= [(x(ap - mpq) - my(bp + aq), x(aq + bp) + y(ap - mbq), zcr)]\\ &= [(x, y, z)] \star [(ap - mpq, bp + aq, cr)]\\ &= [(x, y, z)] \star \{[(a, b, c)] \star [(p, q, r)]\}.\end{aligned}$$

ii) A operação $\star$ é comutativa. Com efeito,

$$\begin{aligned}[(x, y, z)] \star [(a, b, c)] &= [(xa - myb, xb - ya, zc)]\\ &= [(ax - mby, bx - ay, cz)]\\ &= [(a, b, c)] \star [(x, y, z)].\end{aligned}$$

iii) A existência do elemento neutro: Existe em $\mathbb{T}_{[m]}$ um elemento $[(x, y, z)]$ tal que para todo $[(a, b, c)]$ em $\mathbb{T}_{[m]}$ temos

$$[(a, b, c)] \star [(x, y, z)] = [(a, b, c)] \Leftrightarrow [(ax - mby, ay + bx, cz)] = [(a, b, c)].$$

A partir da última equação acima, obtemos o sistema

$$\begin{cases} ax - mby = a\\ bx + ay = b\\ cz = c\end{cases}.$$

Como $c > 0$, da última equação segue que $z = 1$.

Agora usando a regra de Cramer para resolver o sistema

$$\begin{cases} ax - mby = a \\ bx + ay = b \end{cases}$$

temos,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -mb \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + mb^2 = c^2.$$

E como $c > 0$, o sistema é possível e determinado. Assim,

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a & -mb \\ b & a \end{vmatrix} = c^2 \qquad \text{e} \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0.$$

Portanto,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{c^2}{c^2} = 1 \qquad \text{e} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{c^2} = 0.$$

Logo, o elemento neutro é a classe $[(x, y, z)] = [(1, 0, 1)]$.

iv) Existência de simétricos: Para cada $[(a, b, c)] \in \mathbb{T}_{[m]}$ existe $[(x, y, z)] \in \mathbb{T}_{[m]}$ tal que

$$[(a, b, c)] \star [(x, y, z)] = [(1, 0, 1)] \Leftrightarrow [(ax - mby, ay + bx, cz)] = [(1, 0, 1)].$$

A partir da última equação acima, obtemos o sistema

$$\begin{cases} ax - mby = 1 \\ bx + ay = 0 \\ cz = 1 \end{cases}.$$

Como $c > 0$, da última equação segue que $f = \dfrac{1}{z}$.

Agora usando a regra de Cramer para resolver o sistema

$$\begin{cases} ax - mby = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

temos,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -mb \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + mb^2 = c^2.$$

E como $c > 0$, o sistema é possível e determinado.

Logo,

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -mb \\ 0 & a \end{vmatrix} = a \qquad \text{e} \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b.$$

Assim,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{a}{c^2} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-b}{c^2}.$$

Portanto,

$$[\left(\frac{a}{c^2}, \frac{-b}{c^2}, \frac{1}{c}\right)] = [\frac{1}{c^2}[(a, -b, c)] \in [(a, -b, c)].$$

Desse modo, $[(a, -b, c)]$ é o simétrico que procuramos. □

4. Ternos Quase Pitagóricos e os Números Complexos

Nesta seção apresentaremos uma relação entre um elemento de $\mathbb{T}_m$ e um número complexo, mais especificamente um número complexo pertencente à circunferência unitária centrada na origem do plano complexo. Tal relação permite-nos visualizar geometricamente algumas propriedades de uma classe $[(a, b, c)] \in \mathbb{T}_{[m]}$.

Para isso, é necessário definir uma função cujo domínio é $\mathbb{C}$, e que toma valores em $\mathbb{R}^+$, a chamada Função Norma. Também apresentaremos algumas de suas propriedades.

Definição 6 (Função Norma)**.** A função $\mathcal{N}$ definida por

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{N} \ : \ \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ a+bi & \longmapsto & a^2+b^2 \end{array}$$

é chamada de Função Norma em $\mathbb{C}$.

A proposição seguinte contém propriedades importantes da Função Norma, que utilizaremos no transcorrer deste texto.

Proposição 8. *Seja $\mathcal{N}$ a Função Norma em $\mathbb{C}$. Então,*

(i) $\mathcal{N}(\alpha) \geq 0, \ \forall \ \alpha \in \mathbb{C}$;

(ii) $\mathcal{N}(\alpha) = 0$, *se, e somente se,* $\alpha = 0$;

(iii) $\mathcal{N}(\alpha) = \alpha\bar{\alpha}$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{C}$, *onde* $\bar{\alpha}$ *denota o conjugado de* α;

(iv) $\mathcal{N}(\alpha\beta) = \mathcal{N}(\alpha)\mathcal{N}(\beta), \ \forall \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$; *isto é, a Função Norma preserva a multiplicação.*

Demonstração. Para que este texto não fique extenso, e o leitor não se canse com demonstrações que não são o objetivo central deste trabalho, provaremos aqui apenas a afirmação (iv), pois é a propriedade que será de mais importância neste trabalho. As demais propriedades podem ser demonstradas sem muito esforço pelo leitor, ou então consultar [3] e [4].

(iv) Dados dois números complexos $\alpha = a + bi$ e $\beta = c + di$ quaisquer, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\alpha\beta) &= \mathcal{N}\big((a+bi)(c+di)\big) \\ &= \mathcal{N}\big((ac-bd)+(bc+ad)i\big) \\ &= (ac-bd)^2 + (bc+ad)^2 \\ &= a^2c^2 - 2acbd + b^2d^2 + b^2c^2 + 2bcad + a^2d^2 \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2 \\ &= a^2(c^2+d^2) + b^2(c^2+d^2) \\ &= (a^2+b^2)(c^2+d^2) \\ &= \mathcal{N}(\alpha) \cdot \mathcal{N}(\beta) \end{aligned}$$

□

Utilizaremos a função norma como uma importante ferramenta para associar um terno quase pitagórico a um número complexo, pois tomando $(x, y, z) \in \mathbb{T}_m$, temos

$$z^2 = x^2 + my^2 \;=\; (x + iy\sqrt{m})(x - iy\sqrt{m}) \;=\; \mathcal{N}(x + iy\sqrt{m}).$$

Assim podemos associar cada terno quase pitagórico (x, y, z) a um número complexo pertencente ao conjunto

$$\mathbb{Z}[i\sqrt{m}] = \{x + iy\sqrt{m}/ \;\; x, y \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

O leitor mais interessado pode verificar que $\mathbb{Z}[i\sqrt{m}]$ é um subanel do anel $\mathbb{C}$, munido das operações de adição e multiplicação usuais de números complexos.

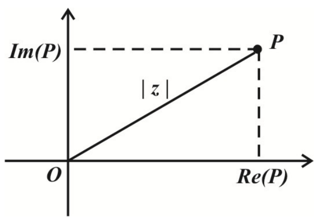

Figura 2: Representação no plano complexo

Na figura 2 temos a representação geométrica de um ponto $P = x + iy\sqrt{m}$, onde $Re(P) = x$, $Im(P) = y\sqrt{m}$ e

$$|z| = \sqrt{\mathcal{N}(x + iy\sqrt{m})} = \sqrt{x^2 + my^2}.$$

Exemplo 4. De acordo com o exemplo 1, o terno $(1, 2, 3)$ é uma solução da equação $x^2 + 2y^2 = z^2$, logo podemos associá-lo ao número complexo $1 + i2\sqrt{2}$. Desse mesmo modo associamos $(2, 4, 6)$ e $(3, 6, 9)$ a

$$2 + i4\sqrt{2} = 2(1 + i2\sqrt{2}) \quad \text{e} \quad 3 + i6\sqrt{2} = 3(1 + i2\sqrt{2}),$$

respectivamente.

Generalizando este exemplo, identificamos que os elementos de uma classe $[(a, b, c)] \in \mathbb{T}_{[m]}$ estão dispostos geometricamente sobre a reta que passa pelo segmento $\overline{OP}$ no plano complexo, onde O é a origem do plano complexo e $P = a + ib\sqrt{m}$.

Consideremos agora a circunferência $S_1 = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1\}$, centrada no ponto $O = 0 + i0\sqrt{m}$. Afirmar que S_1 é um grupo multiplicativo segue de que S_1 é um subgrupo de $\mathbb{C}^*$ e do item iv) da Proposição 8, visto que, dados $u, v \in S_1$ temos

1. $\mathcal{N}(1) = 1^2 = 1 \in S_1$.

2. $\mathcal{N}(uv) = \mathcal{N}(u)\mathcal{N}(v) = 1.1 = 1$, logo $uv \in S_1$.

3. $\mathcal{N}\left(u^{-1}u\right) = \mathcal{N}\left(u^{-1}\right)\mathcal{N}(u) = \mathcal{N}(1) = 1,$ logo $\mathcal{N}\left(u^{-1}\right) = 1,$ então $u^{-1} \in S_1$.

Observamos que os números complexos $x + iy\sqrt{m}$ referentes aos ternos quase pitagóricos (x, y, z) estão no exterior de S_1, com exceção do terno $(1, 0, 1)$, que pertence a S_1. Logo, se x e y são diferentes de zero, então $P = x + iy\sqrt{m}$ pode ser associado a um ponto W sobre a circunferência unitária S_1 no plano complexo, onde $W = \overline{OP} \cap S_1$ é representado pelo número complexo $W = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$, sendo θ o ângulo com vértice em O, formado pelo eixo OX e o segmento $\overline{OP}$, tal que $0 < \theta \leq 2\pi$, como na figura a seguir.

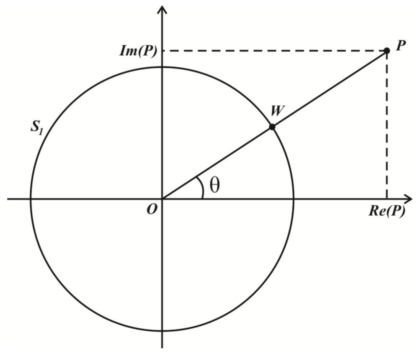

Figura 3: Representação de um terno quase pitagórico na circunferência unitária S_1

Como W é um número complexo representado por um ponto de S_1, temos $|W| = 1$. Logo, se $P = x + iy\sqrt{m}$ é um número complexo associado pelo terno quase pitagórico (x, y, z), então P é múltiplo de W, isto é, $P = x + iy\sqrt{m} = W \cdot k$, para algum $k \in \mathbb{Z}^+$, pois P e W pertencem à mesma classe. Aplicando a função norma em P e utilizando o fato de que esta função preserva a multiplicação, obtemos

$$\begin{aligned} z^2 = x^2 + my^2 = \mathcal{N}(P) &= \mathcal{N}(W \cdot k) \\ &= \mathcal{N}(W) \cdot \mathcal{N}(k) = 1 \cdot k^2 = k^2. \end{aligned}$$

Implicando assim que $|k| = |z|$. E como $z > 0$, obtemos $k = z$.

Note que, se não tivéssemos a condição $z > 0$, então $W_1 = -\frac{x}{z} - i\frac{y\sqrt{m}}{z}$ e $W_2 = \frac{x}{z} + i\frac{y\sqrt{m}}{z}$ seriam os dois pontos de interseção entre a reta que passa por $\overline{OP}$ e a circunferência S_1. Mas como $z > 0$, temos um único número complexo pertencente a S_1 que representa uma classe de ternos quase pitagóricos. Portanto usaremos $W = e^{i\theta} = \frac{x}{z} + i\frac{y\sqrt{m}}{z}$ como número complexo associado ao terno quase pitagórico (x, y, z), onde θ é o angulo formado entre o eixo OX e o segmento $\overline{OP}$ no sentido anti-horário.

Observe agora que, se $(x, y, z) \in [(a, b, c)]$, onde (a, b, c) é o terno quase pitagórico primitivo desta classe, então $(x, y, z) = (ta, tb, tc)$, para algum $t \in \mathbb{Z}^+$. Pelo feito acima, associamos o terno (x, y, z) ao seguinte número complexo em S_1.

$$W = \frac{x}{z} + i\frac{y\sqrt{m}}{z} = \frac{ta}{tc} + i\frac{tb\sqrt{m}}{tc} = \frac{a}{c} + i\frac{b\sqrt{m}}{c}.$$

Em outras palavras, podemos associar todos os ternos da classe ao número complexo em $W \in S_1$, associado ao terno quase pitagórico primitivo representante da classe.

Ao enunciar o próximo resultado (que é o resultado principal desta seção), admitimos que S_1 é um subgrupo multiplicativo de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. E identificamos a relação entre uma classe de ternos quase pitagóricos com um número complexo de S_1, definindo uma função $\phi : \mathbb{T}_{[m]} \longrightarrow S_1$. Mostraremos que esta função é injetora e que preserva as operações definidas em $\mathbb{T}_{[m]}$ e S_1, ou seja, a função ϕ é um homomorfismo de grupo.

Teorema 4. *Seja S_1 o conjunto dos números complexos que formam a circunferência unitária centrada na origem do plano complexo. Então a função $\phi : \mathbb{T}_{[m]} \longrightarrow S_1$, definida por*

$$\phi\Big([(x,y,z)]\Big) = e^{i\theta} = \frac{x}{z} + i\frac{y\sqrt{m}}{z}$$

é um homomorfismo de grupo injetivo.

Demonstração. Sejam $[(a,b,c)]$ e $[(x,y,z)]$ classes de ternos pertencentes a $\mathbb{T}_{[m]}$ de modo que $\mathrm{mdc}(x,y) = 1$ e $\mathrm{mdc}(a,b) = 1$. Temos que

$$\phi\Big([(a,b,c)]\Big) = e^{i\alpha} = \frac{a}{c} + i\frac{b\sqrt{m}}{c} \qquad \text{e} \qquad \phi\Big([(x,y,z)]\Big) = e^{i\beta} = \frac{x}{z} + i\frac{y\sqrt{m}}{z}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\phi\Big([(x,y,z)] \star [(a,b,c)]\Big) &= \phi[(xa - myb, xb + ya, zc)] \\
&= \frac{xa - myb}{zc} + i\frac{(xb + ya)\sqrt{m}}{zc} \\
&= \frac{xa - myb + ixb\sqrt{m} + iya\sqrt{m}}{zc} \\
&= \frac{x(a + ib\sqrt{m}) + iy\sqrt{m}(ib\sqrt{m} + a)}{zc} \\
&= \frac{(x + iy\sqrt{m})(a + ib\sqrt{m})}{zc} \\
&= \frac{(x + iy\sqrt{m})}{z} \cdot \frac{(a + ib\sqrt{m})}{c} \\
&= \phi\Big([(x,y,z)]\Big) \cdot \phi\Big([(a,b,c)]\Big).
\end{aligned}$$

Logo, a função ϕ é um homomorfismo. Além disso, se $\phi\Big([(x,y,z)]\Big) = \phi\Big([(a,b,c)]\Big)$, então

$$\frac{x}{z} + i\frac{y\sqrt{m}}{z} = \frac{a}{c} + i\frac{b\sqrt{m}}{c}.$$

Pela igualdade de números complexos temos

$$\frac{x}{z} = \frac{a}{c} \qquad \text{e} \qquad \frac{y\sqrt{m}}{z} = \frac{b\sqrt{m}}{c}.$$

Logo, $xc = za$ e $yc = zb$.

Isolando z na primeira igualdade e substituindo na segunda obtemos $ya = xb$. Agora, como $\mathrm{mdc}(x,y) = 1$, existem $r, s \in \mathbb{Z}$, tais que $1 = xr + ys$. Daí obtemos

$$a = a(xr + ys) = (ax)r + (ay)s = (ax)r + (xb)s,$$

implicando que

$$a = x(ar + bs). \tag{4}$$

Do mesmo modo

$$c = c(xr + ys) = (cx)r + (cy)s = (za)r + (zb)s.$$

Assim

$$c = z(ar + bs). \tag{5}$$

Da última igualdade e do fato de que $yc = zb$, segue que

$$yc = zb \;\Rightarrow\; yz(ar + bs) = zb \;\Rightarrow\; y(ar + bs) = b. \tag{6}$$

Portanto

$$(ar + bs) \mid a \quad e \quad (ar + bs) \mid b.$$

Mas como $\text{mdc}(a, b) = 1$, chegamos à conclusão de que $ar + bs = 1$. Tendo em vista as igualdades (4), (5) e (6) acima, isso implica que $a = x$, $c = z$, $y = b$, isto é

$$(x, y, z) = (a, b, c).$$

Logo ϕ também é injetiva. □

Portanto, efetuar a operação $[(x, y, z)] \star [(a, b, c)]$ em $\mathbb{T}_{[m]}$ é equivalente a multiplicar os seus respectivos elementos associados em S_1 e assim podemos ter uma interpretação geométrica dessa operação, pois se

$$\phi\Big([(x, y, z)]\Big) = \frac{x}{z} + i\frac{y\sqrt{m}}{z} = e^{i\alpha} \quad e \quad \phi\Big([(a, b, c)]\Big) = \frac{a}{c} + i\frac{b\sqrt{m}}{c} = e^{i\beta},$$

onde α e β são os seus respectivos argumentos, então

$$\phi\Big([(x, y, z)] \star [(a, b, c)]\Big) = \phi\Big([(x, y, z)]\Big) \cdot \phi\Big([(a, b, c)]\Big) = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}.$$

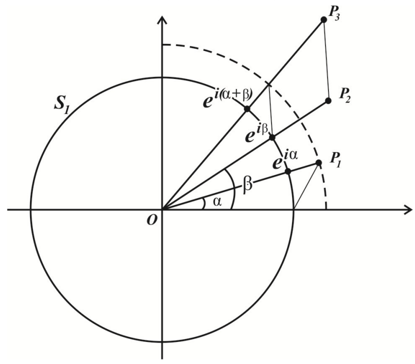

Figura 4: Produto de números complexos

Mostramos que $(\mathbb{T}_{[m]}, \star)$ é um grupo abeliano. Consideramos a possibilidade de associar um terno quase pitagórico a um número complexo do conjunto $\mathbb{Z}[i\sqrt{m}]$. Essa associação foi possível após visualizar uma forma de escrever a equação $x^2 + my^2 = z^2$ como produto de dois números complexos, a saber $z^2 = (x + iy\sqrt{m})(x - iy\sqrt{m})$. Essa forma determina a norma do número complexo $x + iy\sqrt{m}$. Com isso obtemos outra maneira de representar cada classe $[(a, b, c)]$ de ternos quase pitagóricos por um número complexo, através do homomorfismo injetivo ϕ, apresentado no teorema 4.

5. Conclusões

O estudo dos ternos quase pitagóricos é interessante por algumas razões, sendo uma delas proveniente da importância da relevância histórica dos ternos pitagóricos, orieundos do famoso Teorema de Pitágoras, amplamente utilizado na matemática e com significativas contribuições para educação básica, na resolução de problemas e compreensão de alguns princípios matemáticos. Notadamente, os ternos quase pitagóricos ampliam ainda mais a nossa compreensão dos conceitos relacionados ao Teorema de Pitágoras. Nesse sentido a investigação desses ternos direciona-nos a um entendimento mais profundo dos números inteiros. Esse estudo, que é um pré-requisito para o estudo da álgebra e da teoria dos números, pode incentivar os alunos da educação básica a explorarem as propriedades algébricas e geométricas, questionando de forma investigativa alguns problemas matemáticos já conhecidos em sua formação no ensino básico, bem como prepará-los para estudos mais avançados em níveis superiores.

Referências

[1] Araujo, Martinho C. and Nascimento, Thais S. *Propriedades dos Ternos Pitagóricos*. V Bienal de Matemática. SBM. Rio de Janeiro. 2010.

[2] *Almost Pythagorean Triples*. Mathematics Magazine, Vol.60, nº4 pp 234-236, 1987.

[3] Domingues, Hygino H. and Iezzi, Gelson. *Álgebra Moderna*. 4th edição. Atual Editora. São Paulo. 2003.

[4] Garcia, Arnaldo and Lequain, Yves. *Elementos de Álgebra*. Projeto Euclides. 5th edição. Instituto de Matemática Pura e Aplicada- Impa. Rio de Janeiro. 1988.

Jessé Garcia de Faria
Instituto Federal do Mato Grosso
<jesse.faria@ifmt.edu.br>

Martinho da Costa Araujo
Universidade Federal do Mato Grosso
<martinhoufmt@gmail.com>

Recebido: 20/10/2023
Publicado: 12/04/2024