PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.12, n.1, 2024
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2024/pmo129

A análise matemática do jogo da velha: conceitos, estratégias e aplicações

Lucas Machado Fernandes [1]

Resumo

Este artigo apresenta uma formulação matemática para o jogo da velha, utilizando conceitos e propriedades das matrizes. Serão apresentados resultados qualitativos relacionados à previsibilidade do jogo, obtidos a partir da análise da tomada de decisão inicial.

Palavras-chave: Jogo da Velha; Teoria Matricial; Previsibilidade.

Abstract

This article presents a mathematical formulation for Tic-Tac-Toe, using concepts and properties of matrices. Qualitative results related to the predictability of the game will be presented, obtained from the analysis of the initial decision making.

Keywords: Tic-Tac-Toe; Matrix Theory; Predictability.

1. Introdução

O jogo da velha, também conhecido como "jogo do galo", é um dos jogos mais antigos e populares da história. Jogado em um tabuleiro de nove casas dispostas 3×3, o objetivo do jogo é alinhar três símbolos iguais ($\mathcal{X}$ ou $\mathcal{O}$) em uma linha horizontal, vertical ou diagonal. Embora pareça simples, esse jogo tem uma rica história e teoria matemática que remonta a mais de 3.000 anos atrás. As evidências mostram que o jogo era jogado pelos romanos e egípcios, e há referências a ele em vários textos antigos, como o Livro dos Mortos egípcio e os escritos de Ovídio, um poeta romano do século I a.C.

Ao longo dos anos, o jogo da velha ganhou muitas variações e adaptações, tornando-se um tema popular em diversas áreas, como a matemática, a inteligência artificial e a teoria dos jogos. Na matemática, o jogo da velha é usado para ensinar conceitos como estratégia, combinações e permutações (Berlekamp, Conway e Guy, [1]). Na inteligência artificial, o jogo da velha é frequentemente usado como um problema de teste para algoritmos de aprendizado de máquina e agentes autônomos (Knuth, [2]). Na teoria dos jogos, o jogo da velha é um exemplo clássico de um jogo de soma zero, em que o ganho de um jogador é igual à perda do outro jogador (Osborne e Rubinstein, [4]; Morgenstern e Von Neumann, [3]).

[1]Discente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPB e parcialmente apoiado pela fundação estadual de pesquisa da Paraíba (Fapesq-PB) #1159/2021-07, Brasil.

Este artigo será dividido em duas partes. Na primeira parte, apresentaremos uma axiomatização das regras básicas do jogo e uma descrição formal de uma partida utilizando um modelo matricial.

Na segunda parte, abordaremos o processo de simetrização e o axioma do bloqueio. Em seguida, apresentaremos os resultados relacionados à previsibilidade dos cantos e bordas, bem como a imprevisibilidade do centro.

2. Preliminares

Nesta seção, serão apresentadas as regras básicas do jogo da velha e uma descrição de uma partida. Na primeira subseção, serão abordados os princípios fundamentais do jogo, como a disposição do tabuleiro, os símbolos utilizados e o objetivo do jogo. Já na segunda subseção, será feita uma descrição detalhada de uma partida, desde a escolha dos símbolos até sua conclusão, com exemplos práticos de jogadas.

2.1. Regras Básicas

O jogo da velha é um passatempo secular bastante conhecido, com regras amplamente difundidas. No entanto, é importante apresentar os princípios fundamentais que regem as regras básicas para o funcionamento do mesmo.

Axioma 1. *O ambiente do jogo da velha é representado por uma matriz quadrada de ordem* 3. *Durante o jogo, as nove entradas da matriz são preenchidas exclusivamente com os símbolos* $\mathcal{X}$ *ou* $\mathcal{O}$.

Axioma 2. *Durante o jogo da velha, quando é a vez de um participante jogar, ele deve escolher uma das entradas da matriz e marcá-la com o seu símbolo* ($\mathcal{X}$ *ou* $\mathcal{O}$). *Este processo de escolha e marcação de uma casa vazia é chamado de jogada.*

Axioma 3. *Os participantes alternam suas jogadas, começando pelo jogador que escolheu o símbolo* $\mathcal{X}$. *Em resumo, as jogadas de ordem ímpar possuem marcação* $\mathcal{X}$, *enquanto as de ordem par são marcadas com* $\mathcal{O}$.

Axioma 4. *O objetivo de cada jogador é formar uma linha, uma coluna ou uma diagonal desta matriz somente com o seu símbolo. O participante que conseguir fazer isso primeiro vence.*

Axioma 5. *Se todas as entradas da matriz estiverem preenchidas e nenhum jogador tiver conseguido formar uma linha, uma coluna ou uma diagonal somente com o seu símbolo, o jogo termina empatado.*

A seguir, apresenta-se um exemplo prático de uma partida que segue os cinco axiomas anteriormente descritos:

Exemplo 1. A representação a seguir

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X} & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{X} & - & - \\ - & \mathcal{O} & - \\ - & - & - \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{X} & - & - \\ - & \mathcal{O} & - \\ - & - & \mathcal{X} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{X} & - & - \\ - & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ - & - & \mathcal{X} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{X} & - & - \\ \mathcal{X} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ - & - & \mathcal{X} \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{X} & - & - \\ \mathcal{X} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & - & \mathcal{X} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{X} & - & \mathcal{X} \\ \mathcal{X} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & - & \mathcal{X} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{X} & \mathcal{O} & \mathcal{X} \\ \mathcal{X} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & - & \mathcal{X} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{X} & \mathcal{O} & \mathcal{X} \\ \mathcal{X} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{X} & \mathcal{X} \end{pmatrix}$$

indica nove jogadas de uma partida de jogo da velha.

2.2. Descrição sobre uma partida

Notacionalmente, para descrever os movimentos de uma partida como propostos no axioma 3, adicionamos um índice acima do símbolo correspondente a cada rodada completa composta por uma jogada de $\mathcal{X}$ seguida por $\mathcal{O}$. Dessa forma, as representações

$$\mathcal{X}^1,\ \mathcal{O}^1,\ \mathcal{X}^2,\ \mathcal{O}^2, \mathcal{X}^3,\ \mathcal{O}^3,\ \mathcal{X}^4,\ \mathcal{O}^4 \text{ e } \mathcal{X}^5$$

indicam a ordem em que as jogadas foram realizadas, permitindo que sejam facilmente identificadas e acompanhadas ao longo da partida. Para que essa otimização fique mais clara, as jogadas do **Exemplo 1** seriam resumidas pela matriz:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & \mathcal{O}^4 & \mathcal{X}^4 \\ \mathcal{X}^3 & \mathcal{O}^1 & \mathcal{O}^2 \\ \mathcal{O}^3 & \mathcal{X}^5 & \mathcal{X}^2 \end{pmatrix}.$$

3. Resultados

Para dar início à nossa discussão, é importante estabelecermos algumas definições básicas que recorreremos ao longo deste texto. Tais conceitos serão fundamentais para a compreensão de resultados que iremos descrever posteriormente.

Definição 1. Seja $(\mathcal{A}_{\mathrm{ij}})_{3\times 3}$ uma matriz qualquer. Para nossos propósitos, denominamos as entradas a_{ij} da seguinte forma:

1. As posições $\mathcal{A}_{11}$, $\mathcal{A}_{13}$, $\mathcal{A}_{31}$ e $\mathcal{A}_{33}$ são chamadas de *cantos*;
2. As posições $\mathcal{A}_{12}$, $\mathcal{A}_{21}$, $\mathcal{A}_{23}$ e $\mathcal{A}_{32}$ são chamadas de *bordas*;
3. A posição $\mathcal{A}_{22}$ é chamada de *centro*.

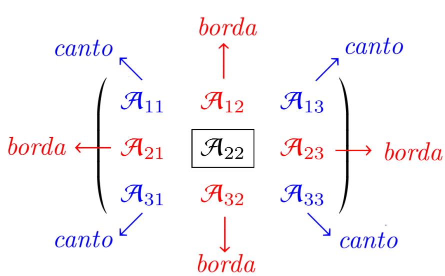

Figura 1: Representação dos cantos, bordas e centro.

Podemos imaginar dois eixos imaginários que se interceptam no centro $\mathcal{A}_{22}$, e assim adicionar as nomenclaturas inferior, superior, esquerda e direita aos conceitos de bordas e cantos. Por exemplo, podemos dizer que $\mathcal{A}_{11}$ é o canto superior esquerdo, enquanto $\mathcal{A}_{23}$ é a borda direita. Essas denominações serão importantes para a nossa discussão, permitindo-nos fazer referência precisa às diferentes posições da matriz.

Definição 2. Uma situação em que é impossível para um jogador impedir que seu oponente complete uma linha, coluna ou diagonal com seus símbolos é chamada *armadilha*.

Em outras palavras, quando um jogador encontra-se em uma armadilha, não há mais movimentos que possa fazer para evitar a vitória do adversário. Vejamos um exemplo:

Exemplo 2. A situação descrita abaixo

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & \mathcal{X}^3 \\ - & \mathcal{X}^2 & \mathcal{O}^1 \\ - & - & \mathcal{O}^2 \end{pmatrix}$$

é uma armadilha, pois independentemente do posicionamento de $\mathcal{O}^3$, o jogador com o símbolo $\mathcal{X}$ completará uma linha ou coluna.

Nas próximas subseções, descreveremos os resultados que ocorrem ao iniciar o jogo a partir dos cantos. É importante ressaltar que, salvo em casos de simetria, podemos supor sem perda de generalidade que o símbolo $\mathcal{X}^1$ estará no canto superior esquerdo da matriz (ver a figura ao lado). As funções de simetrização $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ são responsáveis por esse comportamento e podem ser definidas como segue:

1. $\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{13} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} & \mathcal{A}_{23} \\ \mathcal{A}_{31} & \mathcal{A}_{32} & \mathcal{A}_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{S}_1} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{13} & \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{11} \\ \mathcal{A}_{23} & \mathcal{A}_{22} & \mathcal{A}_{21} \\ \mathcal{A}_{33} & \mathcal{A}_{32} & \mathcal{A}_{31} \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{13} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} & \mathcal{A}_{23} \\ \mathcal{A}_{31} & \mathcal{A}_{32} & \mathcal{A}_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{S}_2} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{31} & \mathcal{A}_{32} & \mathcal{A}_{33} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} & \mathcal{A}_{23} \\ \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{13} \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix} \arrow[r, "\mathcal{S}_1"] & \begin{pmatrix} - & - & \mathcal{X}^1 \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix} \arrow[d, "\mathcal{S}_2"] \\ \begin{pmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ \mathcal{X}^1 & - & - \end{pmatrix} \arrow[u, "\mathcal{S}_2^{-1}"] & \begin{pmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & \mathcal{X}^1 \end{pmatrix} \arrow[l, "\mathcal{S}_1^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Figura 2: Simetrização.

Para garantir uma compreensão clara e consistente das discussões que se seguem, é de extrema importância destacar que, a partir deste ponto, sempre partiremos do seguinte pressuposto:

Axioma 6 (Axioma do Bloqueio)**.** *Se o oponente tiver dois elementos na mesma linha, coluna ou diagonal, é necessário colocar o terceiro elemento para bloqueá-lo.*

Este axioma é fundamental para garantir o equilíbrio de Nash (ver [5]) durante a partida. Ele estabelece uma estratégia básica para bloquear, sempre que possível, a obtenção da vitória do oponente.

3.1. Previsibilidade dos cantos e bordas

A seguir, apresentaremos um resultado que demonstra uma estratégia eficaz para garantir a vitória no jogo da velha, levando em consideração as duas primeiras jogadas da partida.

Teorema 1. *Se $\mathcal{X}^1$ está posicionado no canto superior esquerdo e $\mathcal{O}^1$ ocupa qualquer outra posição da matriz, exceto o centro, então é sempre possível que o jogador com o símbolo $\mathcal{X}$ vença utilizando uma armadilha.*

Demonstração. Com efeito, supondo válido o axioma do bloqueio, basta notar que em cada uma das situações a seguir

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & \mathcal{O}^1 & - \\ \mathcal{O}^2 & - & - \\ \mathcal{X}^2 & - & \mathcal{X}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & \mathcal{O}^1 \\ - & \mathcal{O}^2 & - \\ \mathcal{X}^3 & - & \mathcal{X}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & \mathcal{O}^2 & \mathcal{X}^2 \\ \mathcal{O}^1 & - & - \\ - & - & \mathcal{X}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & \mathcal{X}^3 \\ - & \mathcal{X}^2 & \mathcal{O}^1 \\ - & - & \mathcal{O}^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & \mathcal{X}^3 \\ - & \mathcal{O}^2 & - \\ \mathcal{O}^1 & - & \mathcal{X}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & \mathcal{X}^3 \\ \mathcal{O}^2 & - & - \\ \mathcal{X}^2 & \mathcal{O}^1 & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & \mathcal{O}^2 & \mathcal{X}^2 \\ - & - & - \\ \mathcal{X}^3 & - & \mathcal{O}^1 \end{pmatrix}$$

garantem-nos que sempre é possível que o participante com o símbolo $\mathcal{X}$ vença utilizando uma armadilha, desde que $\mathcal{X}^1$ esteja posicionado no canto superior esquerdo e $\mathcal{O}^1$ não ocupe o centro. □

Em resumo, levando em conta o axioma do bloqueio, o teorema indica que se o jogador iniciar a partida posicionando o símbolo $\mathcal{X}$ em qualquer um dos cantos da matriz e o oponente não ocupar o centro, então a vitória do participante que iniciou o jogo da velha depende exclusivamente de seguir um dos padrões destacados na prova, fazendo as devidas simetrizações, se necessário, do caso superior esquerdo.

3.2. Imprevisibilidade do centro

Nesta subseção, estamos interessados em analisar os casos em que $\mathcal{X}^1$ está posicionado no canto superior esquerdo e $\mathcal{O}^1$ ocupa o centro. A ideia básica é permutar $\mathcal{X}^2$ nas entradas restantes da matriz e analisar os casos:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & \mathcal{X}^2 & - \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ - & - & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & \mathcal{X}^2 \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ - & - & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & - \\ \mathcal{X}^2 & \mathcal{O}^1 & - \\ - & - & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & - \\ - & \mathcal{O}^1 & \mathcal{X}^2 \\ - & - & - \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & - \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ \mathcal{X}^2 & - & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & - \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ - & \mathcal{X}^2 & - \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & - \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ - & - & \mathcal{X}^2 \end{pmatrix}.$$

Para dar início à discussão, vamos apresentar a seguinte definição:

Definição 3. Sejam A, B e C entradas de uma matriz qualquer. Dizemos que $\Delta(ABC)$ é a *triangulação* desta matriz quando B está na mesma linha (coluna) de A e na mesma coluna (linha) de C, e nenhum outro elemento da matriz pode estar entre A e B, nem entre B e C.

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ M & N & O & P \end{pmatrix}$$

Figura 3: Exemplos de Triangulações

Compreender o conceito anterior torna-se fundamental para a compreensão de dois dos casos mencionados no início desta subseção. Esses casos, por sua vez, podem ser descritos a partir do seguinte teorema:

Teorema 2 (Teorema da Triangulação). *Se $\mathcal{X}^1$ está posicionado no canto superior esquerdo, $\mathcal{O}^1$ ocupa o centro e $\Delta\left(\mathcal{X}^1\mathcal{X}^2\mathcal{O}^1\right)$ é uma triangulação, então a partida terminará empatada.*

Demonstração. Uma vez que $\mathcal{X}^1$ está posicionado no canto superior esquerdo, $\mathcal{O}^1$ ocupa o centro e $\Delta\left(\mathcal{X}^1\mathcal{X}^2\mathcal{O}^1\right)$ é uma triangulação, temos os casos:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & - \\ \mathcal{X}^2 & \mathcal{O}^1 & - \\ - & - & - \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & \mathcal{X}^2 & - \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ - & - & - \end{pmatrix}.$$

Portanto, de acordo com o axioma do bloqueio, podemos afirmar que

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & \mathcal{O}^3 & \mathcal{X}^3 \\ \mathcal{X}^2 & \mathcal{O}^1 & - \\ \mathcal{O}^2 & \mathcal{X}^4 & - \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & \mathcal{X}^2 & \mathcal{O}^2 \\ \mathcal{O}^3 & \mathcal{O}^1 & \mathcal{X}^4 \\ \mathcal{X}^3 & - & - \end{pmatrix},$$

ou seja, a partida terminará empatada. □

Antes de prosseguirmos para o próximo teorema, é necessário demonstrar um lema técnico e apresentar uma nova definição.

Lema 1. *O resultado em uma partida de jogo da velha é invariante pela transposta da matriz associada.*

Demonstração. Seja M uma matriz qualquer. Pela definição de matriz transposta, valem as seguintes propriedades:

1. Linha de M $\rightarrow$ Coluna de $\mathrm{M^t}$;
2. Coluna de M $\rightarrow$ Linha de $\mathrm{M^t}$;
3. Diagonal Principal de M $\rightarrow$ Diagonal Principal de $\mathrm{M^t}$;
4. Diagonal Secundária de M $\rightarrow$ Diagonal Secundária de $\mathrm{M^t}$,

onde a seta $\rightarrow$ representa a expressão "leva em" e $\mathrm{M^t}$ é a matriz transposta de M. Dessa forma, com base nos resultados obtidos em 1-4, podemos concluir imediatamente que é impossível que a vitória de um jogador (ou empate) em uma partida resulte em um empate (ou vitória de um jogador) no jogo da velha associado a matriz transposta. Resta agora analisar os seguintes casos:

1º caso: Suponha que um participante com o símbolo $\mathcal{X}$ vença em apenas 5 jogadas com relação à matriz M associada ao jogo da velha. É importante ressaltar que é impossível que $\mathcal{O}$ vença com a matriz transposta $\mathrm{M^t}$, pois essa matriz terá apenas duas posições marcadas com tal símbolo, o que mostra que não é possível obter uma vitória nessa configuração.

2º caso: Suponha que um participante com o símbolo $\mathcal{O}$ vença em 6 jogadas (ou 8 jogadas) em relação a uma matriz M associada ao jogo da velha, enquanto $\mathcal{X}$ vença em apenas 5 jogadas (ou

5 ou 7 jogadas) com a matriz transposta M^t associada. No entanto, como $M = (M^t)^t$, segundo as propriedades 1-4 acima, $\mathcal{X}$ deveria vencer em 5 jogadas (ou 5 ou 7 jogadas) com relação a M, o que é claramente absurdo.

3º caso: Suponha que um participante com o símbolo $\mathcal{X}$ vença em 7 jogadas (ou 9 jogadas) em relação a uma matriz M associada ao jogo da velha, enquanto $\mathcal{O}$ vença em apenas 6 jogadas (ou 6 ou 8 jogadas) com a matriz transposta M^t associada. No entanto, como $M = (M^t)^t$, segundo as propriedades 1-4 acima, $\mathcal{O}$ deveria vencer em 6 jogadas (ou 6 ou 8 jogadas) com relação a M, o que é impossível. □

Para esclarecer o comportamento de dois outros casos citados anteriormente, é necessário apresentar o teorema do segmento. No entanto, antes disso, é importante definir o que é um segmento em uma matriz.

Definição 4. Dado um conjunto de três entradas A, B e C de uma matriz qualquer, dizemos que $\overline{ABC}$ é um *segmento* da mesma, desde que, todas as entradas estiverem alinhadas na mesma linha ou na mesma coluna, sem que haja qualquer outra entrada entre elas. Em particular, também dizemos que A e C são os extremos do segmento $\overline{ABC}$.

$$\begin{pmatrix} \color{blue}{A} & \color{blue}{B} & \color{blue}{C} & D \\ E & F & G & \color{red}{H} \\ I & J & K & \color{red}{L} \\ M & N & O & \color{red}{P} \end{pmatrix}$$

Figura 4: Exemplos de segmentos.

Com essa definição em mente, podemos agora enunciar o resultado:

Teorema 3 (Teorema do Segmento)**.** *Se $\mathcal{X}^1$ está posicionado no canto superior esquerdo e $\mathcal{O}^1$ ocupa o centro, então toda partida que possui um segmento $\overline{\mathcal{X}^1\mathcal{O}^2\mathcal{X}^2}$ termina em empate.*

Demonstração. Supondo que $\mathcal{X}^1$ está posicionado no canto superior esquerdo, $\mathcal{O}^1$ ocupa o centro e $\overline{\mathcal{X}^1\mathcal{O}^2\mathcal{X}^2}$ é um segmento, temos os casos:

$$\begin{pmatrix} \color{blue}{\mathcal{X}^1} & \color{blue}{\mathcal{O}^2} & \color{blue}{\mathcal{X}^2} \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ - & - & - \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \color{blue}{\mathcal{X}^1} & - & - \\ \color{blue}{\mathcal{O}^2} & \mathcal{O}^1 & - \\ \color{blue}{\mathcal{X}^2} & - & - \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, como as matrizes anteriores são transpostas uma da outra, resta fazer a análise de apenas uma delas pelo **Lema 1**. Sendo assim, usando o axioma do bloqueio e permutando $\color{red}{\mathcal{O}^3}$ nas entradas restantes da matriz a esquerda, temos

$$\begin{pmatrix} \color{blue}{\mathcal{X}^1} & \color{blue}{\mathcal{O}^2} & \color{blue}{\mathcal{X}^2} \\ \color{red}{\mathcal{O}^3} & \mathcal{O}^1 & \mathcal{X}^4 \\ \mathcal{X}^5 & \mathcal{X}^3 & \mathcal{O}^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \color{blue}{\mathcal{X}^1} & \color{blue}{\mathcal{O}^2} & \color{blue}{\mathcal{X}^2} \\ \mathcal{X}^4 & \mathcal{O}^1 & \color{red}{\mathcal{O}^3} \\ \mathcal{O}^4 & \mathcal{X}^3 & \mathcal{X}^5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \color{blue}{\mathcal{X}^1} & \color{blue}{\mathcal{O}^2} & \color{blue}{\mathcal{X}^2} \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ \color{red}{\mathcal{O}^3} & \mathcal{X}^3 & - \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \color{blue}{\mathcal{X}^1} & \color{blue}{\mathcal{O}^2} & \color{blue}{\mathcal{X}^2} \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ - & \mathcal{X}^3 & \color{red}{\mathcal{O}^3} \end{pmatrix}.$$

Uma vez que as duas matrizes abaixo

$$\begin{pmatrix} \color{blue}{\mathcal{X}^1} & \color{blue}{\mathcal{O}^2} & \color{blue}{\mathcal{X}^2} \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ \color{red}{\mathcal{O}^3} & \mathcal{X}^3 & - \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \color{blue}{\mathcal{X}^1} & \color{blue}{\mathcal{O}^2} & \color{blue}{\mathcal{X}^2} \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ - & \mathcal{X}^3 & \color{red}{\mathcal{O}^3} \end{pmatrix}$$

resultam em empate devido ao axioma do bloqueio, independentemente da permutação das posições $\mathcal{X}^4$, $\mathcal{O}^4$ e $\mathcal{X}^5$, podemos concluir o resultado desejado. $\square$

Ao contrário dos casos anteriores, observe que a disposição

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & - \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ - & - & \mathcal{X}^2 \end{pmatrix}$$

pode resultar na vitória do jogador que escolheu o símbolo $\mathcal{X}$. No entanto, o desfecho final depende exclusivamente do movimento $\mathcal{O}^2$ escolhido pelo oponente.

Teorema 4 (Teorema da Diagonal)**.** *Se $\mathcal{X}^1$ está posicionado no canto superior esquerdo, $\mathcal{O}^1$ ocupa o centro e $\mathcal{X}^2$ é localizado no canto inferior direito, então o jogador com o símbolo $\mathcal{X}$ tem uma probabilidade de 1/3 de vencer a partida.*

Demonstração. Supondo que $\mathcal{X}^1$ está posicionado no canto superior esquerdo, $\mathcal{O}^1$ ocupa o centro e $\mathcal{X}^2$ é localizado no canto inferior direito, podemos permutar $\mathcal{O}^2$ como segue:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & \mathcal{O}^2 & - \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ - & - & \mathcal{X}^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & \mathcal{O}^2 \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ - & - & \mathcal{X}^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & - \\ \mathcal{O}^2 & \mathcal{O}^1 & - \\ - & - & \mathcal{X}^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & - \\ - & \mathcal{O}^1 & \mathcal{O}^2 \\ - & - & \mathcal{X}^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & - \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ \mathcal{O}^2 & - & \mathcal{X}^2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & - \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ - & \mathcal{O}^2 & \mathcal{X}^2 \end{pmatrix}.$$

Pelo axioma do bloqueio, temos que as partidas

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & \mathcal{O}^2 & \mathcal{X}^4 \\ \mathcal{X}^5 & \mathcal{O}^1 & \mathcal{O}^4 \\ \mathcal{O}^3 & \mathcal{X}^3 & \mathcal{X}^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & \mathcal{X}^3 & \mathcal{O}^3 \\ \mathcal{O}^4 & \mathcal{O}^1 & \mathcal{X}^5 \\ \mathcal{X}^4 & \mathcal{O}^2 & \mathcal{X}^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & \mathcal{X}^5 & \mathcal{O}^3 \\ \mathcal{O}^2 & \mathcal{O}^1 & \mathcal{X}^3 \\ \mathcal{X}^4 & \mathcal{O}^4 & \mathcal{X}^2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & \mathcal{O}^4 & \mathcal{X}^4 \\ \mathcal{X}^3 & \mathcal{O}^1 & \mathcal{O}^2 \\ \mathcal{O}^3 & \mathcal{X}^5 & \mathcal{X}^2 \end{pmatrix}$$

terminam empatadas. Por outro lado, ao aplicarmos novamente o axioma do bloqueio, podemos concluir que jogos

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & \mathcal{O}^2 \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ \mathcal{X}^3 & - & \mathcal{X}^2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & \mathcal{X}^3 \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ \mathcal{O}^2 & - & \mathcal{X}^2 \end{pmatrix}$$

terminam com o jogador do símbolo $\mathcal{X}$ vitorioso devido à formação de armadilhas, concluindo o resultado. $\square$

Apresentamos agora a última definição desta seção, que será relevante para a formulação do último resultado que apresentaremos.

Definição 5. Sejam A, B e C elementos de uma matriz. Dizemos que $\mathcal{B}(\mathrm{ABC})$ é um bumerangue desde que exista um elemento D nesta matriz que atenda às seguintes condições:

1. D é extremo de um segmento que contém B e C;

2. $\Delta(\mathrm{ADB})$ ou $\Delta(\mathrm{ADC})$ é uma triangulação.

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ M & N & O & P \end{pmatrix}$$

Figura 5: Exemplos de bumerangues.

Apesar de sua simplicidade, o jogo da velha tem uma rica teoria matemática, que inclui várias estratégias e propriedades interessantes. Uma dessas propriedades, que chamaremos como Teorema do Bumerangue, relaciona certas configurações de jogadas à probabilidade de terminar o jogo empatado ou com um vencedor.

Teorema 5 (Teorema do Bumerangue)**.** *Considere um jogo da velha em que o símbolo $\mathcal{X}^1$ ocupa o canto superior esquerdo e $\mathcal{O}^1$ ocupa o centro, formando um padrão de bumerangue $\mathcal{B}(\mathcal{X}^1\mathcal{O}^1\mathcal{X}^2)$. Se permutarmos o símbolo $\mathcal{O}^2$ nas outras posições restantes, então as seguintes propriedades valem:*

1. *Em $1/2$ das possibilidades, o jogo termina empatado, independentemente dos movimentos subsequentes;*
2. *Em $1/3$ das possibilidades, o jogo pode terminar com um vencedor ou empatado;*
3. *Em $1/6$ das possibilidades, o jogo termina com um vencedor.*

Demonstração. Uma vez que o símbolo $\mathcal{X}^1$ ocupa o canto superior esquerdo e $\mathcal{O}^1$ ocupa o centro tal que $\mathcal{B}(\mathcal{X}^1\mathcal{O}^1\mathcal{X}^2)$ é um bumerangue, sabemos que os casos retratados são:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & - \\ - & \mathcal{O}^1 & \mathcal{X}^2 \\ - & - & - \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & - \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ - & \mathcal{X}^2 & - \end{pmatrix}.$$

Pelo **Lema 1**, sabemos que basta fazer a análise de apenas um deles. Vejamos:

1. Tome em consideração as situações a seguir

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & - \\ - & \mathcal{O}^1 & \mathcal{O}^2 \\ - & \mathcal{X}^2 & - \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & - \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ \mathcal{O}^2 & \mathcal{X}^2 & - \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & - \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ - & \mathcal{X}^2 & \mathcal{O}^2 \end{pmatrix}.$$

Note que os dois primeiros casos são imediatos pelo axioma do bloqueio, como sucede-se:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & \mathcal{X}^4 \\ \mathcal{X}^3 & \mathcal{O}^1 & \mathcal{O}^2 \\ \mathcal{O}^3 & \mathcal{X}^2 & - \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & \mathcal{O}^3 & \mathcal{X}^3 \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ \mathcal{O}^2 & \mathcal{X}^2 & - \end{pmatrix}.$$

Para concluir esta propriedade, iremos permutar $\mathcal{X}^3$ nas entradas de

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & - \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ - & \mathcal{X}^2 & \mathcal{O}^2 \end{pmatrix}.$$

Usando novamente o axioma do bloqueio, a prova é imediata quando $\mathcal{X}^3$ está localizada nas bordas superior e esquerda e também nos cantos inferior esquerdo e superior direito. Portanto, resta analisar o caso da borda direita. Para isso, permutando $\mathcal{O}^3$ nas entradas restantes, temos

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & \mathcal{O}^3 & - \\ - & \mathcal{O}^1 & \mathcal{X}^3 \\ - & \mathcal{X}^2 & \mathcal{O}^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & \mathcal{X}^5 & \mathcal{O}^3 \\ \mathcal{O}^4 & \mathcal{O}^1 & \mathcal{X}^3 \\ \mathcal{X}^4 & \mathcal{X}^2 & \mathcal{O}^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & - \\ \mathcal{O}^3 & \mathcal{O}^1 & \mathcal{X}^3 \\ - & \mathcal{X}^2 & \mathcal{O}^2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & \mathcal{O}^4 & \mathcal{X}^4 \\ \mathcal{X}^5 & \mathcal{O}^1 & \mathcal{X}^3 \\ \mathcal{O}^3 & \mathcal{X}^2 & \mathcal{O}^2 \end{pmatrix},$$

o que termina a prova.

2. Considere os casos a seguir

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & - \\ \mathcal{O}^2 & \mathcal{O}^1 & - \\ - & \mathcal{X}^2 & - \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & \mathcal{O}^2 & - \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ - & \mathcal{X}^2 & - \end{pmatrix}.$$

e tome as respectivas configurações:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & \mathcal{X}^4 \\ \mathcal{O}^2 & \mathcal{O}^1 & \mathcal{X}^3 \\ \mathcal{O}^3 & \mathcal{X}^2 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & \mathcal{X}^5 & \mathcal{O}^3 \\ \mathcal{O}^2 & \mathcal{O}^1 & \mathcal{X}^3 \\ \mathcal{X}^4 & \mathcal{X}^2 & \mathcal{O}^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & \mathcal{O}^2 & - \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ \mathcal{X}^3 & \mathcal{X}^2 & - \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & \mathcal{O}^2 & \mathcal{X}^4 \\ \mathcal{X}^5 & \mathcal{O}^1 & \mathcal{O}^4 \\ \mathcal{O}^3 & \mathcal{X}^2 & \mathcal{X}^3 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, com base na definição de armadilha e no axioma do bloqueio, podemos concluir esta propriedade.

3. Agora, suponha que $\mathcal{O}^2$ ocupa o canto superior direito, isto é,

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & \mathcal{O}^2 \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ - & \mathcal{X}^2 & - \end{pmatrix}.$$

Com base no axioma do bloqueio, podemos concluir que a próxima jogada de $\mathcal{X}$ deve ser no canto inferior esquerdo da matriz, o que bloqueia a possibilidade de vitória de $\mathcal{O}$ pela formação de uma armadilha. Portanto, com a última propriedade estabelecida, chegamos ao resultado final desejado. □

4. Considerações finais

Com base na análise matemática do jogo da velha e dos estudos de caso realizados, podemos concluir que o uso de conceitos e propriedades das matrizes pode ser uma ferramenta poderosa para aprimorar a estratégia do jogo. Em geral, através da axiomatização das regras básicas do jogo por meio do modelo matricial, pudemos entender melhor a dinâmica do jogo e suas possibilidades.

Além disso, a análise da previsibilidade dos cantos e bordas, bem como da imprevisibilidade do centro, permitiu-nos compreender melhor as vantagens de cada posição no tabuleiro. Os teoremas da triangulação, do segmento e do bumerangue mostraram-se úteis para aprimorar a estratégia do jogo e garantir a vitória.

Em suma, a aplicação da matemática no jogo da velha pode oferecer uma compreensão mais profunda do jogo e proporcionar um maior nível de habilidade e estratégia para seus jogadores. Esperamos que este artigo possa contribuir para uma melhor compreensão do jogo e estimular novas pesquisas no campo da teoria dos jogos.

Referências

[1] Berlekamp, E. R., Conway, J. H. e Guy, R. K. *Winning ways for your mathematical plays*. Academic press, v. 2, 1982.

[2] Knuth, D. E. *The computer as a master mind*. Journal of recreational mathematics, 7(1), 1-6, 1975.

[3] Morgenstern, O. e Von Neumann, J. *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press, 1944.

[4] Osborne, M. J. e Rubinstein, A. *A course in game theory*. MIT press, 1994.

[5] Pindyck, R. S. e Rubinfeld, D. L. *Microeconomia*. 7a ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

Lucas Machado Fernandes
Universidade Federal da Paraíba
<lucasmachadofernandes2@gmail.com>

Recebido: 14/06/2023
Publicado: 16/04/2024