PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.12, n.1, 2024
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2024/pmo1210

Sequências de Fibonacci Generalizadas e Números Metálicos

Marcio Costa Araújo Filho   Valder Cezar Izato de Araújo [1]

Resumo

Neste trabalho apresentamos a família dos números metálicos conforme definida por Spinadel [10], que possui o número de ouro como membro mais famoso, e também uma classe de sequências que aqui chamamos de sequências de Fibonacci generalizadas. Na verdade, mostramos as principais propriedades das sequências de Fibonacci generalizadas e as utilizamos para mostrar que a razão de termos consecutivos desta sequência é convergente, mais especificamente, converge para um número metálico. Além disso, apresentamos a relação dos números metálicos com alguns conteúdos matemáticos do Ensino Básico.

Palavras-chave: Número de ouro; Números metálicos; Sequência de Fibonacci generalizada.

Abstract

In this work, we present the family of metallic numbers as defined by Spinadel [10], which holds the gold number as the most famous member, and also a class of sequences that we call generalized Fibonacci sequences. In fact, we prove the main properties of generalized Fibonacci sequences and use them to show that the ratio of consecutive terms in this sequence is convergent, more specifically, it converges to a metallic number. Moreover, we present the relationship between metallic numbers and some mathematical contents of Basic Education.

Keywords: Gold number; Metalic numbers; Generalized Fibonacci Sequence.

1. Introdução

Existe um número que é conhecido desde a antiguidade e que aparece em diversos lugares, como, por exemplo, na natureza, nas artes e na arquitetura. Tal número é conhecido na literatura como *número de ouro, razão áurea* ou também como *proporção divina*, uma vez que os objetos que apresentam essa razão são tidos como belos, Ávila [1]. Na arquitetura, por exemplo, essa razão pode ser encontrada tanto no Paternon na Grécia, um templo construído no século V a.C. e oferecido à deusa grega Atena, Figura 1, quanto na pirâmide de Quéops, do Egito – o leitor interessado pode conferir, por exemplo, Lívio [7] e Saraiva [9].

[1]Parcialmente apoiado pelo Programa Institucional de Iniciação Científica da Universidade Federal de Rondônia

Figura 1: Parthenon [13].

Um dos objetos de estudo aqui é a família dos *números metálicos*, a qual possui como membro mais prestigiado o número de ouro. Na verdade, se p e q são números naturais quaisquer, seguindo Spinadel [10], Figura 2, chamam-se números metálicos as raízes positivas da seguinte equação quadrática:

$$x^2 - px - q = 0, \tag{1}$$

ou seja, os números $\sigma_{p,q} = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$, dentre os quais pode-se destacar o número de ouro $\sigma_{1,1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (denotando comumente por ϕ) e o número de prata $\sigma_{1,2} = 1 + \sqrt{2}$ (denotando comumente por σ). Para mais detalhes a respeito dos números de ouro e prata o leitor pode consultar Ávila [1], Oliveira [5], Spinadel [10], entre outros.

Figura 2: Vera de Spinadel [2].

Além disso, assim como a relação entre o número de ouro e a sequência de Fibonacci, os números metálicos possuem uma relação com as, aqui denominadas, *sequências de Fibonacci generalizadas* e definidas da seguinte forma: são as sequências $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em que cada elemento é uma combinação linear, com coeficientes naturais, dos dois antecessores, isto é,

$$g_{n+2} = pg_{n+1} + qg_n$$

com $p, q \in \mathbb{N}$ em que $g_1 = q$ e $g_2 = p$. Um dos objetivos do presente trabalho é apresentar e provar algumas propriedades dessas sequências – alcançamos esse objetivo na Seção 2. Para mais detalhes a respeito da relação do número de ouro e a sequência de Fibonacci, o leitor pode conferir Caneiro *et al.* [3] e Teodoro [12].

A relação entre as sequências de Fibonacci generalizadas e os números metálicos dá-se através da sequência de razões entre termos consecutivos dessa primeira. De fato, consideramos a sequência $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $r_n = \frac{g_{n+1}}{g_n}$, onde g_{n+1} e g_n são termos consecutivos das sequências de Fibonacci generalizada. E será mostrado que para cada par $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ essa sequência terá como limite o número metálico $\sigma_{p,q}$, por exemplo – quando $p = 1$ e $q = 1$ a sequência r_n será a sequência de razões de termos consecutivos da sequência de Fibonacci que converge para o número de ouro. Mostrar esse fato é o principal objetivo do presente trabalho e é alcançado na Seção 3.

Finalizamos esse trabalho com a apresentação na Seção 4 das relações entre os números metálicos e conteúdos matemáticos do Ensino Básico, ou seja, apresentamos a relação desses números com equações quadráticas, gráficos das funções afim e quadrática e com a Geometria Plana.

2. Algumas Propriedades das Sequências de Fibonacci Generalizadas

A presente seção tem como objetivo definir as sequências de Fibonacci generalizadas e provar algumas de suas principais propriedades. Um importante resultado referente a sequências de números reais, que será usado nessa seção, é o que diz que toda sequência monótona e limitada de números reais é convergente – para mais detalhes o leitor pode consultar Lima [6]. Seguindo Spinadel [10], iniciamos essa seção com a definição de uma classe de sequências de números reais que tem a sequência de Fibonacci como um caso particular, e que chamaremos de *sequências de Fibonacci generalizadas (SFG)*.

Definição 1. Diz-se sequência de Fibonacci generalizada as sequências $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em que cada elemento é uma combinação linear, com coeficientes naturais, dos dois antecessores, isto é,

$$g_{n+2} = pg_{n+1} + qg_n$$

com $p, q \in \mathbb{N}$ em que $g_1 = q$ e $g_2 = p$.

Como exemplo, consideremos a SFG com $p = 2$ e $q = 1$, ou seja, $g_{n+2} = 2g_{n+1} + g_n$ e com condições iniciais $g_1 = 1$ e $g_2 = 2$. Listando os termos dessa sequência, obtemos a seguinte sequência de números

$$\left(1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, \dots\right)$$

conhecida por sequência de Pell; para mais detalhes ver [4], [5], [8] e [11]. Em momento oportuno voltaremos a falar dessa sequência. Além disso, ressaltamos que o uso da nomenclatura *sequência de Fibonacci generalizada* é devido ao fato de que para $p = q = 1$ obtêm-se a sequência de Fibonacci.

Dada uma SFG como na Definição 1 a primeira de suas propriedades é a seguinte.

Proposição 1. Para quaisquer naturais $n, m \in \mathbb{N}$, os termos de uma SFG, com $g_1 = q$ e $g_2 = p$, satisfazem a seguinte relação

$$g_{n+m} = g_n g_{m+1} + g_{n-1} g_m.$$

Demonstração. Procederemos por indução em m. Para $m = 1$ temos

$$g_{n+1} = pg_n + qg_{n-1} = g_n g_2 + g_{n-1} g_1,$$

então a igualdade é verdadeira para $m = 1$. Partindo da hipótese de que a igualdade seja válida para todo $m = 2, \dots, k$, isto é, $g_{n+m} = g_n g_{m+1} + g_{n-1} g_m$ seja válida para todo $m = 2, \dots, k$, mostraremos que ela é válida para $m = k + 1$, ou seja,

$$g_{n+(k+1)} = g_n g_{(k+1)+1} + g_{n-1} g_{k+1}.$$

De fato, usando a definição de SFG e a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} g_{n+(k+1)} &= pg_{n+k} + qg_{n+(k-1)} = p(g_n g_{k+1} + g_{n-1} g_k) + q(g_n g_k + g_{n-1} g_{k-1}) \\ &= g_n (pg_{k+1} + qg_k) + g_{n-1} (pg_k + qg_{k-1}) = g_n g_{k+2} + g_{n-1} g_{k+1} \\ &= g_n g_{(k+1)+1} + g_{n-1} g_{k+1}, \end{aligned}$$

que é o que queríamos mostrar. □

A segunda propriedade que mostramos a respeito da SFG é de como se pode escrever cada termo de ordem par e cada termo de ordem ímpar, dada pela proposição abaixo.

Proposição 2. Para todo natural $n \in \mathbb{N}$, os termos de uma SFG satisfazem as seguintes relações

i) $g_{2n-1} = g_n^2 + g_{n-1}^2$;

ii) $g_{2n} = \frac{g_{n+1}^2 - (q-1)g_{n-1}g_{n+1} - qg_{n-1}^2}{p}$.

Demonstração. Usando a Proposição 1, temos que

$$g_{2n-1} = g_{n+(n-1)} = g_n g_n + g_{n-1} g_{n-1} = g_n^2 + g_{n-1}^2,$$

ou seja, a relação **i)** é válida. Analogamente, para o item **ii)**, notemos que

$$g_{2n} = g_{n+n} = g_n g_{n+1} + g_{n-1} g_n,$$

e como $g_{n+1} = pg_n + qg_{n-1}$, ou seja, $g_n = \frac{g_{n+1} - qg_{n-1}}{p}$, segue que

$$\begin{aligned} g_{2n} &= g_{n+1} \left(\frac{g_{n+1} - qg_{n-1}}{p} \right) + g_{n-1} \left(\frac{g_{n+1} - qg_{n-1}}{p} \right) \\ &= \frac{g_{n+1}^2 - qg_{n-1}g_{n+1} + g_{n-1}g_{n+1} - qg_{n-1}^2}{p} = \frac{g_{n+1}^2 - (q-1)g_{n-1}g_{n+1} - qg_{n-1}^2}{p}. \end{aligned}$$

□

É sempre possível determinar a soma dos n primeiros termos da SFG atráves do n–ésimo termo e do seu antecessor, conforme proposição a seguir.

Proposição 3. A soma dos n primeiros termos da SFG é dada por

$$g_1 + g_2 + \cdots + g_n = \frac{(p+q)g_n + qg_{n-1} + q(p-1) - p}{p+q-1}.$$

Demonstração. Observe que $pg_n = g_{n+1} - qg_{n-1}$, então

$$\begin{aligned}
&p(g_1+g_2+g_3+\cdots+g_{n-1}+g_n) = \\
&= pg_1+g_3-qg_1+g_4-qg_2+g_5-qg_3+\cdots+g_n-qg_{n-2}+g_{n+1}-qg_{n-1} \\
&= pg_1-qg_1-qg_2+(1-q)(g_3+\cdots+g_{n-1})+g_n+g_{n+1} \\
&= pg_1-g_1+g_1-qg_1-g_2+g_2-qg_2+(1-q)(g_3+\cdots+g_{n-1})+g_n-qg_n+qg_n+g_{n+1} \\
&= pg_1-g_1-g_2+(1-q)(g_1+g_2+g_3+\cdots+g_n)+qg_n+g_{n+1},
\end{aligned}$$

sendo assim, temos

$$(p+q-1)g_1+g_2+g_3+\cdots+g_n = pg_1-g_1-g_2+qg_n+g_{n+1},$$

logo, desde que $g_1 = q$ e $g_2 = p$, obtemos

$$g_1+g_2+g_3+\cdots+g_n = \frac{g_{n+1}+qg_n+q(p-1)-p}{p+q-1},$$

o que conclui a demonstração. □

As propriedades da SFG na proposição a seguir dão-nos a soma de seus n primeiros termos de ordem par e de seus n primeiros termos de ordem ímpar.

Proposição 4. Seja $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a SFG, para todo $n \in \mathbb{N}$, valem as seguintes identidades

i) $g_1+g_3+g_5+\ldots+g_{2n-1} = \frac{(p^2+q)(q-1)+(1-q)qg_{2n-1}+pg_{2n}}{(p+q-1)(p-q+1)}$;

ii) $g_2+g_4+g_6+\ldots+g_{2n} = \frac{pg_{2n+1}-q(q-1)g_{2n}-p(q^2+q-1)}{(p+q-1)(p-q+1)}$.

Demonstração. Para provar o item **i)**, notemos inicialmente que

$$\begin{aligned}
&p(g_1+g_3+g_5+\cdots+g_{2n-1}) = \\
&= pg_1+g_4-qg_2+g_6-qg_4+\cdots+g_{2n}-qg_{2n-2} \\
&= pg_1-g_2+g_2-qg_2+g_4-qg_4+\cdots+g_{2n-2}-qg_{2n-2}+g_{2n} \\
&= pg_1-g_2+(1-q)(g_2+g_4+\cdots+g_{2n-2}+g_{2n}) \\
&= pg_1-g_2+\frac{(1-q)}{p}(g_3-qg_1+g_5-qg_3+\cdots+g_{2n-1}-qg_{2n-3})+g_{2n} \\
&= pg_1-g_2+\frac{(1-q)}{p}[-g_1+(1-q)(g_1+g_3+\cdots+g_{2n-1})+qg_{2n-1}]+g_{2n} \\
&= pg_1-g_2-\frac{(1-q)}{p}g_1+\frac{(1-q)^2}{p}(g_1+g_3+\cdots+g_{2n-1})+\frac{(1-q)}{p}qg_{2n-1}+g_{2n},
\end{aligned}$$

nas passagens acima usamos que $pg_{2n-1} = g_{2n} - qg_{2n-2}$ e $pg_{2n} = g_{2n+1} - qg_{2n-1}$. Então, lembrando que $g_1 = q$ e $g_2 = p$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left[p-\frac{(1-q)^2}{p}\right](g_1+g_3+\cdots+g_{2n-1}) &= pq-p-\frac{(1-q)}{p}q-\frac{(1-q)}{p}qg_{2n-1}+g_{2n} \\
[p^2-(1-q)^2](g_1+g_3+\cdots+g_{2n-1}) &= p^2q-p^2-(1-q)q+(1-q)qg_{2n-1}+pg_{2n} \\
&= (p^2+q)(q-1)+(1-q)qg_{2n-1}+pg_{2n}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} g_1 + g_3 + \cdots + g_{2n-1} &= \frac{(p^2+q)(q-1) + (1-q)qg_{2n-1} + pg_{2n}}{p^2 - (1-q)^2} \\ &= \frac{(p^2+q)(q-1) + (1-q)qg_{2n-1} + pg_{2n}}{(p+q-1)(p-q+1)}. \end{aligned}$$

Para provar o item **ii)**, notemos inicialmente que

$$g_2 + g_4 + \cdots + g_{2n} = (g_1 + g_2 + g_3 + \cdots + g_n) - (g_1 + g_3 + \cdots + g_{2n-1}).$$

Sendo assim, usando a Proposição 3 e o item **i)**, temos

$$\begin{aligned} g_2 + g_4 + \cdots + g_{2n} &= \frac{(p+q)g_n + qg_{n-1} + q(p-1) - p}{p+q-1} - \frac{(p^2+q)(q-1) + (1-q)qg_{2n-1} + pg_{2n}}{(p+q-1)(p-q+1)} \\ &= \frac{-q(q-1)g_{2n} + p^2 g_{2n} + pqg_{2n-1} - pq^2 + pq - p}{(p+q-1)(p-q+1)} \\ &= \frac{pg_{2n+1} - q(q-1)g_{2n} - p(q^2+q-1)}{(p+q-1)(p-q+1)}. \end{aligned}$$

□

Observação 1. Vale ressaltar que os resultados das Proposições 3 e 4, estendem os resultados obtidos para a sequência de Fibonacci, na verdade, para $p = q = 1$ obtemos as propriedades correspondentes para a sequência de Fibonacci, ver [4, Proposição 9].

A próxima propriedade da SFG dá-nos uma relação interessante entre três de seus termos consecutivos, segundo a qual será possível estabelecer sua relação com os números metálicos.

Proposição 5. Dados três termos consecutivos da SFG g_{n-1}, g_n e g_{n+1}, para todo natural $n \geq 2$, vale a seguinte relação

$$g_{n-1}g_{n+1} = g_n^2 + (-1)^n q^{n-2}[q^3 + p^2(q-1)].$$

Demonstração. Procederemos por indução sobre n, desde que $g_1 = q, g_2 = p$ e $g_3 = p^2 + q^2$, temos

$$g_2^2 + (-1)^2 q^{2-2}[q^3 + p^2(q-1)] = p^2 + q^3 + p^2(q-1) = q(p^2+q^2) = g_1 g_3,$$

então a igualdade é verdadeira para $n = 2$. Partindo da hipótese de que a igualdade seja válida para algum $k > 2$, isto é,

$$g_{k-1}g_{k+1} = g_k^2 + (-1)^k q^{k-2}[q^3 + p^2(q-1)], \tag{2}$$

mostraremos que ela é válida para $k+1$, ou seja,

$$g_k g_{k+2} = g_{k+1}^2 + (-1)^{k+1} q^{(k+1)-2}[q^3 + p^2(q-1)]. \tag{3}$$

De fato, notemos inicialmente que

$$g_k g_{k+2} = g_k(pg_{k+1} + qg_k) = pg_k g_{k+1} + qg_k^2.$$

Pela definição da SFG tem-se $pg_k = g_{k+1} - qg_{k-1}$, então

$$g_k g_{k+2} = (g_{k+1} - qg_{k-1})g_{k+1} + qg_k^2 = g_{k+1}^2 - qg_{k-1}g_{k+1} + qg_k^2.$$

Usando a hipótese de indução, Eq. (2), vemos que

$$-qg_{k-1}g_{k+1} = -qg_k^2 - q(-1)^k q^{k-2}[q^3 + p^2(q-1)].$$

Consequentemente, obtemos

$$\begin{aligned} g_k g_{k+2} &= g_{k+1}^2 - qg_k^2 - q(-1)^k q^{k-2}[q^3 + p^2(q-1)] + qg_k^2 \\ &= g_{k+1}^2 + (-1)(-1)^k q \cdot q^{k-2}[q^3 + p^2(q-1)] \\ &= g_{k+1}^2 + (-1)^{k+1} q^{k-1}[q^3 + p^2(q-1)] \\ &= g_{k+1}^2 + (-1)^{k+1} q^{(k+1)-2}[q^3 + p^2(q-1)], \end{aligned}$$

ou seja, a Eq. (3) é válida, que é o que queríamos provar. □

Observação 2. Notemos que a proposição acima é uma versão generalizada dessa relação para as sequências de Fibonacci e de Pell. Basta fazermos $p = q = 1$ para a primeira e $q = 1, p = 2$ para a segunda, por exemplo; ver [4, Proposição 7].

3. Sequências de Fibonacci Generalizada e sua Relação com Números Metálicos

Na presente seção, nosso objetivo é definir a sequência de razões entre termos consecutivos das SFG e relacioná-las com os números metálicos. Na verdade, seja $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência de termo geral dado por $r_n = \frac{g_{n+1}}{g_n}$, em que g_{n+1} e g_n são termos consecutivos da SFG, conforme Definição 1. Veremos que essa sequência é convergente, e mais: que converge para um número metálico. Para provar tal fato, provaremos inicialmente a seguinte proposição.

Proposição 6. Seja $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência formada pela razão de termos consecutivos da SFG, ou seja, a sequência de termo geral dado por $r_n = \frac{g_{n+1}}{g_n}$, em que g_{n+1} e g_n são termos consecutivos da SFG. Para todo $n \in \mathbb{N}$, valem as seguintes desigualdades

i) $r_{2n-1} < r_{2n}$;

ii) $r_{2n-1} < r_{2n+1}$;

iii) $r_{2n} > r_{2n+2}$.

Demonstração. Como $p, q \in \mathbb{N}$ e $g_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\begin{aligned} r_{2n} - r_{2n-1} &= \frac{g_{2n+1}}{g_{2n}} - \frac{g_{2n}}{g_{2n-1}} = \frac{g_{2n-1}g_{2n+1} - g_{2n}^2}{g_{2n}g_{2n-1}} \\ &= \frac{g_{2n}^2 + (-1)^{2n} q^{2n-2}[q^3 + p^2(q-1)] - g_{2n}^2}{g_{2n}g_{2n-1}} \\ &= \frac{q^{2n-2}[q^3 + p^2(q-1)]}{g_{2n}g_{2n-1}} > 0, \end{aligned}$$

ou seja, o item **i)** é válido. Para o item **ii)**, observamos que

$$
\begin{aligned}
r_{2n+1} - r_{2n-1} &= \frac{g_{2n+2}}{g_{2n+1}} - \frac{g_{2n}}{g_{2n-1}} = \frac{g_{2n-1}g_{2n+2} - g_{2n}g_{2n+1}}{g_{2n-1}g_{2n+1}} \\
&= \frac{g_{2n-1}(pg_{2n+1} + qg_{2n}) - g_{2n}(pg_{2n} + qg_{2n-1})}{g_{2n-1}g_{2n+1}} \\
&= \frac{pg_{2n-1}g_{2n+1} + qg_{2n-1}g_{2n} - pg_{2n}^2 - qg_{2n-1}g_{2n}}{g_{2n-1}g_{2n+1}} \\
&= \frac{pg_{2n-1}g_{2n+1} - pg_{2n}^2}{g_{2n-1}g_{2n+1}} \\
&= \frac{pg_{2n}^2 + p(-1)^{2n}q^{2n-2}[q^3 + p^2(q-1)] - pg_{2n}^2}{g_{2n-1}g_{2n+1}} \\
&= \frac{pq^{2n-2}[q^3 + p^2(q-1)]}{g_{2n-1}g_{2n+1}} > 0.
\end{aligned}
$$

E analogamente, para o item **iii)**, notemos que

$$
\begin{aligned}
r_{2n+2} - r_{2n} &= \frac{g_{2n+3}}{g_{2n+2}} - \frac{g_{2n+1}}{g_{2n}} = \frac{g_{2n}g_{2n+3} - g_{2n+1}g_{2n+2}}{g_{2n}g_{2n+2}} \\
&= \frac{g_{2n}(pg_{2n+2} + qg_{2n+1}) - g_{2n+1}(pg_{2n+1} + qg_{2n})}{g_{2n}g_{2n+2}} \\
&= \frac{pg_{2n}g_{2n+2} + qg_{2n}g_{2n+1} - pg_{2n+1}^2 - qg_{2n}g_{2n+1}}{g_{2n}g_{2n+2}} \\
&= \frac{pg_{2n}g_{2n+2} - pg_{2n+1}^2}{g_{2n}g_{2n+2}} \\
&= \frac{pg_{2n+1}^2 + p(-1)^{2n+1}q^{2n-1}(p+q-1) - pg_{2n+1}^2}{g_{2n}g_{2n+2}} \\
&= \frac{-pq^{2n-1}(p+q-1)}{g_{2n}g_{2n+2}} < 0.
\end{aligned}
$$

□

Observamos que a Proposição 5 foi aplicada na prova desses três casos. Notemos que o item i) acima nos diz que os termos de ordem ímpar na sequência $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são menores que os termos de ordem par. Já o item ii) garante que a subsequência $(r_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ dos termos de ordem ímpar é monótona crescente; e por fim a subsequência $(r_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ dos termos de ordem par é monótona decrescente pelo item iii).

Além disso, podemos concluir dessas relações que a sequência $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, mais especificamente, tem-se $r_1 < r_n < r_2$ para todo natural n, consequentemente, as subsequências $(r_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(r_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ também são limitadas. Logo, garantimos a convergência das subsequências $(r_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(r_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposição 7. Sejam ℓ_1 e ℓ_2 números reais tais que

$$\lim_{n\to\infty} r_{2n-1} = \ell_1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} r_{2n} = \ell_2,$$

então $\ell_1 = \ell_2 = \sigma_{p,q}$. Consequentemente, a sequência $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termo geral dado por $r_n = \frac{g_{n+1}}{g_n}$, em que g_{n+1} e g_n são termos consecutivos da SFG converge para o número metálico $\sigma_{p,q} = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$.

Demonstração. Uma vez que,

$$r_{2n-1} = \frac{g_{2n}}{g_{2n-1}} = \frac{pg_{2n-1}+qg_{2n-2}}{g_{2n-1}} = p + \frac{qg_{2n-2}}{g_{2n-1}} = p + \frac{qg_{2n-2}}{pg_{2n-2}+qg_{2n-3}} = p + \frac{q}{p+q\frac{g_{2n-3}}{g_{2n-2}}},$$

tem-se

$$r_{2n-1} = p + \frac{q}{p+\frac{q}{r_{2n-3}}};$$

aplicando o limite para $n \to \infty$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} r_{2n-1} = p + \frac{q}{p+\frac{q}{\lim_{n\to\infty} r_{2n-3}}},$$

ou seja,

$$\ell_1 = p + \frac{q}{p+\frac{q}{\ell_1}} \Rightarrow \ell_1^2 - p\ell_1 - q = 0$$

; consequentemente, $\ell_1 = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$ é a única raiz real positiva dessa última equação. Analogamente, uma vez que

$$r_{2n} = \frac{g_{2n+1}}{g_{2n}} = \frac{pg_{2n}+qg_{2n-1}}{g_{2n}} = p + \frac{qg_{2n-1}}{g_{2n}} = p + \frac{qg_{2n-1}}{pg_{2n-1}+qg_{2n-2}} = p + \frac{q}{p+\frac{q}{r_{2n-2}}},$$

e $\lim_{n\to\infty} r_{2n} = \ell_2$, aplicando o limite para $n \to \infty$, tem-se

$$\ell_2 = p + \frac{q}{p+\frac{q}{\ell_2}} \Rightarrow \ell_2^2 - p\ell_2 - q = 0$$

implicando que $\ell_2 = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$ é a única solução real positiva para a equação anterior. Logo, os limites existem e são iguais

$$\lim_{n\to\infty} r_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} r_{2n} = \sigma_{p,q},$$

isto é, as subsequências de ordem par e de ordem ímpar de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergem para $\sigma_{p,q}$. Portanto, esse fato garante a convergência da sequência $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para o número metálico $\sigma_{p,q}$. □

Observação 3. Vale ressaltar que o caso particular da proposição acima, para a sequência dada pela razão entre os números consecutivos de Pell, ou seja, o caso em que $p = 2$ e $q = 1$, foi feito por Teixeira *et al.* [11, Seção 5].

4. Relações entre os números metálicos e conteúdos matemáticos do Ensino Básico

Nessa seção vamos descrever de forma sucinta algumas relações entre os números metálicos e conteúdos do Ensino Básico, como *equações quadráticas, gráficos de funções e geometria plana.*

- **Equações quadráticas**

  Um primeiro conteúdo, que pode ser explorado, tendo como motivação os números metálicos, é o de equações quadráticas, uma vez que tais números foram definidos na Introdução como as raízes positivas das equações
$$x^2 - px - q = 0,$$
  em que p e q são naturais quaisquer. Nessa motivação, pode-se utilizar o método de completar quadrados para ver que os números metálicos são da forma $\sigma_{p,q} = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$. De fato, começamos reescrevendo $-p$ como $-2\frac{p}{2}$ e adicionando $\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$ em ambos os membros da equação, conforme apresentamos a seguir
$$x^2 - px - q = 0 \Rightarrow x^2 - 2\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q,$$
  assim completamos um quadrado da diferença no primeiro membro de modo a obter
$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2+4q}{4}$$
  consequentemente, como $p^2 + 4q > 0$, obtemos
$$x - \frac{p}{2} = \pm\frac{\sqrt{p^2+4q}}{2} \quad \text{e, portanto,} \quad x = \frac{p \pm \sqrt{p^2+4q}}{2}$$
  cuja raiz positiva é o número metálicos $\sigma_{p,q}$.

- **Gráficos de funções**

  Outro conteúdo que pode ser relacionado ao estudo dos números metálicos é o de gráfico das funções quadráticas e afins.

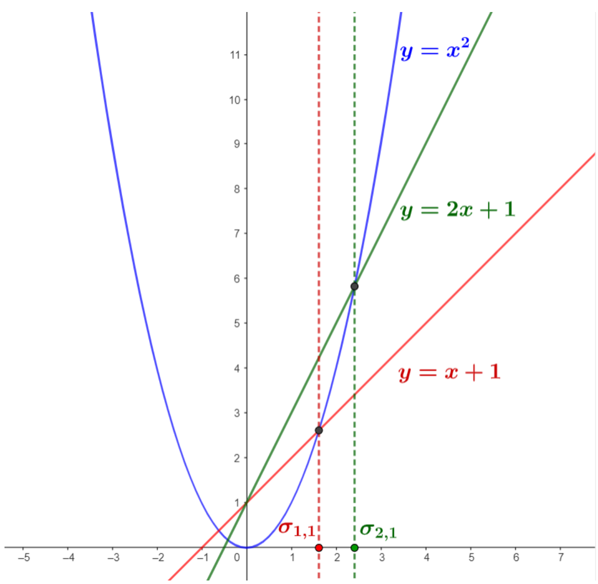

Figura 3: Números metálicos como abscissas do ponto de interseção de gráficos de funções.

Na verdade, pode-se observar que determinar os números metálicos, ou melhor, resolver a equação $x^2 - px - q = 0$ é equivalente a determinar as abscissas dos pontos de interseção dos gráficos da função quadrática $y = x^2$ e das funções afins $y = px + q$ com $p, q \in \mathbb{N}$. Na Figura 3, a título de exemplo e com auxílio do GeoGebra, foram feitos os gráficos das funções $y = x^2$ em azul, $y = x + 1$ em vermelho e $y = 2x + 1$ em verde, na qual as abscissas positivas do ponto de interseção do gráfico em azul com o vermelho e do azul com o verde são os números de ouro $\sigma_{1,1}$ e de prata $\sigma_{2,1}$ respectivamente.

- **Geometria Plana e Espacial**
  Com relação às Geometrias Plana e Espacial existem uma diversidade de conteúdos que podem ser explorados, por exemplo: *divisão de segmentos em razão metálica (média e extrema razão, razão de prata, ...), retângulos metálicos, relação entre os lados e diagonais de polígonos, diagonal de poliedros de Platão, elementos de pirâmide, entre outros*, ver [1], [5], [7], [9], [11]. Para ilustrar, apresentamos na figura a seguir a relação do número de ouro com o triângulo isósceles (com ângulos da base iguais a 72° e com ângulo oposto à base igual a 36°), com o pentágono regular e com o decágono regular.

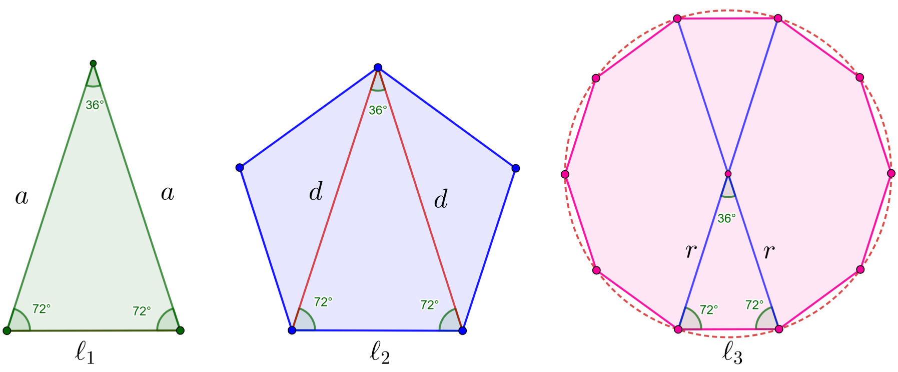

Figura 4: Razão de ouro em polígonos.

  Onde pode-se verificar que as razões entre o lado a e a base ℓ_1 do triângulo isósceles, entre a diagonal d e o lado ℓ_2 do pentágono regular e entre o raio r da circunferência circunscrita ao decágono regular e o lado do decágono regular ℓ_3 da Figura 4 são iguais ao número de ouro, ou seja, $\frac{a}{\ell_1} = \frac{d}{\ell_2} = \frac{r}{\ell_3} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

5. Conclusão

Nesse trabalho, com motivação no número de ouro e sua relação com a sequência de Fibonacci, definimos a família dos números metálicos como as soluções positivas da equação quadrática $x^2 - px - q = 0$ em que, para cada par $(p, q) \in \mathbb{Z}$, teremos um número metálico $\sigma_{p,q} = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$, e vimos que o seu primeiro membro ($p = q = 1$) é o célebre número de ouro. Além disso, definimos as sequências de Fibonacci generalizadas e apresentamos algumas de suas propriedades, que, por sua vez, generalizam as propriedades da sequência de Fibonacci, conforme pode ser visto nas Observações 1 e 2.

Além disso, atingimos o principal objetivo desse trabalho, provando na Seção 3 que a sequência formada pela razão entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci generalizada converge para algum número metálico. Para isso, mostramos que as subsequências de ordem par e de ordem ímpar, são monótonas e limitadas (portanto convergentes) e convergem para o mesmo limite que é o número metálico $\sigma_{\mathrm{p,q}}$.

Por fim, apresentamos na Seção 4 alguns conteúdos matemáticos do Ensino Básico que podem ser relacionados com os números metálicos. Entendemos que evidenciar tal relação pode motivar o estudo dos conteúdos citados.

Agradecimentos

Agradecemos a Universidade Federal de Rondônia pela bolsa de iniciação científica concedida ao segundo autor, sob a orientação do primeiro autor, durante o desenvolvimento deste trabalho. E ao revisor pelas sugestões dadas para melhorar esse trabalho.

Referências

[1] Ávila, G. Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de Fibonacci. *Revista do Professor de Matemática*, 6, 1985.

[2] ArchDaily. Disponível em: https://www.archdaily.cl/cl/805182/vera-de-spinadel-entre-numeros-metalicos-y-fractales. Acesso em 26 de outubro de 2023.

[3] Caneiro, M. S., Nobokite, K. E., Fernandes, M. A. A. *Três diferentes provas de que as razões entre números consecutivos de fibonacci convergem para o número de ouro*. PMO v. 11, n. 2, p. 194-204, 2023.

[4] Costa, E. A., Santos, D. C. Algumas propriedades da sequência de pell. *CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 2022.

[5] Oliveira, J. L. *O retângulo de prata, a razão de prata e sua relação com a sequência de pell.* PMO v. 10, n. 2, p. 163-181, 2022.

[6] Lima, E. L. *Análise real - vol. 1 - Funções de uma Variável - Coleção Matemática Universitária.* 13° Ed. Rio de Janeiro: Impa, 2020.

[7] Lívio, M. *Razão áurea-a história do número fi, um número surpreendente - Tradução de Matsuama, S.*, 6a Ed., Rio de Janeiro: Record, 2011.

[8] Noronha, W.F. R., Alves, F. R. V. Sequência de pell: propriedades e considerações epistemológicas. *CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 2018.

[9] Saraiva, J. C. V. As pirâmides do egito e a razão áurea. *Revista do Professor de Matemática*, 48, 1990.

[10] Spinadel, V. W. *The metallic means family and renormalization group techniques*. Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, 6(1):173–189, 2000.

[11] Teixeira, M. A. G., Craveiro, I. M., Reis, E. S., *Algumas relações entre os números consecutivos de Pell e a razão de Prata* PMO v.11, n.4, p. 478-490, 2023.

[12] Teodoro, M. P. Sobre a sequência de fibonacci. *Revista de Matemática*, 142 5(1): 29–49, 2018.

[13] Unicamp - Sala de Imprensa. Disponível em: https://www.unicamp.br/unicamp/unicamp_hoje/ju/abril2006/ju320pag12.html. Acesso em 27 de outubro de 2023.

Marcio Costa Araújo Filho
Universidade Federal de Rondônia
<marcio.araujo@unir.br>

Valder Cezar Izato de Araújo
Universidade Federal de Rondônia
<cezarizato@gmail.com>

Recebido: 31/10/2023
Publicado: 30/04/2024