

Uma família de identidades trigonométricas

Eduardo Henrique de Mattos Brietzke 

Resumo

No presente artigo damos uma demonstração de uma identidade de Euler para a função arco-tangente usando apenas geometria elementar. A seguir, com o objetivo de enfatizar o inter-relacionamento entre a geometria elementar e a trigonometria, provamos a fórmula para a tangente da soma de dois arcos usando apenas geometria elementar e a expressão da soma dos termos de uma progressão geométrica ilimitada.

Palavras-chave: função arco-tangente; identidades trigonométricas; semelhança de triângulos.

Abstract

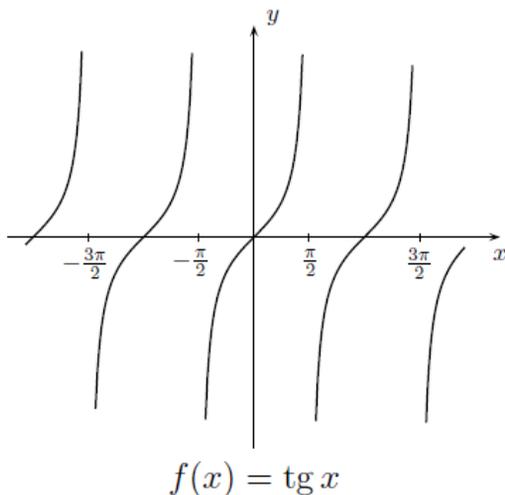
In the present article we give a proof for an identity of Euler for the arctangent function using only elementary geometry. Next, with the aim of emphasizing the interrelationship between elementary geometry and trigonometry, we prove the formula for the tangent of the sum of two arcs using only elementary geometry and the expression for the sum of the terms of a unlimited geometric progression.

Keywords: function arctangent; trigonometric identities; similarity of triangles

1. Introdução

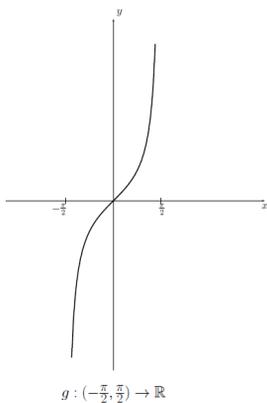
Começamos recordando o gráfico da função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$ (ver figura na próxima página). O domínio da função é o conjunto

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{n\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}, n \text{ ímpar} \right\} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \cup \dots$$



Esta função não tem inversa pois não é injetora, já que uma reta horizontal corta seu gráfico em mais de um ponto. Uma maneira de poder definir uma inversa é fazer uma restrição no domínio. Consideramos então a função

$$g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \text{tg } x.$$



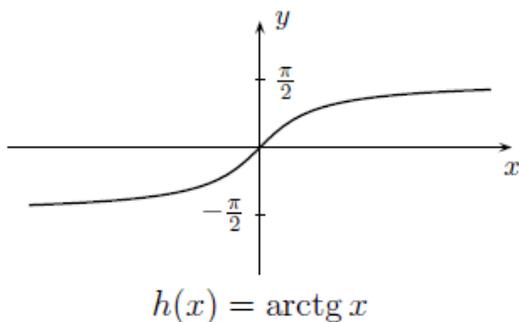
com seu domínio de definição restrito ao intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (veja o gráfico ao lado).

A função g tem uma inversa h , cujo domínio é todo \mathbb{R} , pois cada reta horizontal corta o gráfico de g uma única vez, o que significa que, para cada $t \in \mathbb{R}$, existe um único $s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $g(s) = t$. Então, a função inversa h leva $t \in \mathbb{R}$ em $s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Esta função inversa é a função arco-tangente, usualmente denotada por $\text{arctg } x$. Temos

$$h = \text{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

e, dado $x \in \mathbb{R}$, $\text{arctg } x$ é o único $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $\text{tg } \theta = x$. Assim, por exemplo, $\text{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$, pois $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Analogamente $\text{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.

O gráfico da função arco-tangente é dado a seguir. Note que, como para qualquer função inversa, o gráfico de h é obtido do gráfico de g por reflexão em relação à reta $y = x$.



Se o leitor quiser consultar mais informações sobre funções trigonométricas e suas inversas, pode consultar [3], seção 3.8.

Em 1737 Euler descobriu a igualdade

$$\text{arctg} \left(\frac{1}{2} \right) + \text{arctg} \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

e, empregando a série de Taylor da função arco-tangente, usou essa igualdade para obter uma boa aproximação do valor de π . Nosso objetivo é mostrar como, usando geometria elementar, podemos obter toda uma família de igualdades semelhantes a (1).

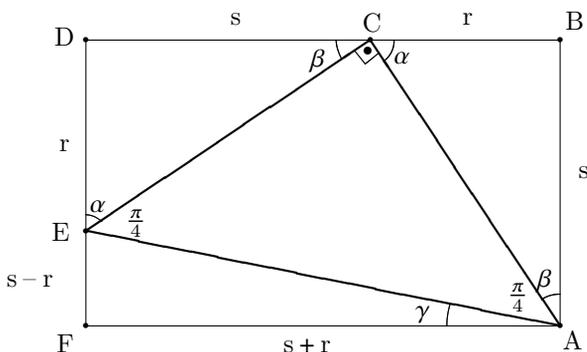
2. Uma família de identidades para a função arco-tangente

Teorema 1. Se $0 < r < s$, então

$$\text{arctg} \left(\frac{r}{s} \right) + \text{arctg} \left(\frac{s-r}{s+r} \right) = \frac{\pi}{4}. \quad (2)$$

Observação 1. A igualdade (1) é um caso particular de (2) para $r = 1$ e $s = 2$.

Demonstração. Na figura abaixo, para $0 < r < s$, consideremos as seguintes medidas: $\overline{DC} = \overline{AB} = s$, $\overline{BC} = \overline{DE} = r$, $\overline{EF} = s - r$ e $\overline{AF} = s + r$.



Os triângulos retângulos ABC e CDE são congruentes. Segue daí a igualdade dos ângulos

$$\alpha := \widehat{ACB} = \widehat{CED} \quad \text{e} \quad \beta := \widehat{BAC} = \widehat{DCE},$$

com

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Logo o triângulo ACE é retângulo e isósceles. Portanto o ângulo \widehat{CAE} vale $\frac{\pi}{4}$. A partir disso podemos concluir que

$$\beta + \frac{\pi}{4} + \gamma = \frac{\pi}{2},$$

onde $\gamma := \widehat{FAE}$.

Logo $\beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$, ou seja,

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{r}{s}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{s-r}{s+r}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

□

Exemplo 1. Os números de Fibonacci são definidos por

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall n \geq 2.$$

A sequência dos números de Fibonacci inicia por

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

e cada termo, a partir dos dois primeiros, é a soma dos dois anteriores. A sequência dos números de Lucas é definida pela mesma recorrência, mas com outras condições iniciais,

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1, \quad L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad \forall n \geq 2.$$

A sequência de Lucas inicia por

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, \dots$$

Aplicando a identidade (2) com $r = F_n$, $s = F_{n+1}$, e levando em conta que $s - r = F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$ e $s + r = F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$, segue que

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{F_n}{F_{n+1}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{F_{n-1}}{F_{n+2}}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad \forall n \geq 2. \quad (3)$$

A seguir vamos usar uma propriedade muito interessante (ver [1], pág. 33, ou [2]) que relaciona a sequência dos números de Fibonacci com o número de ouro

$$\phi := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Esta propriedade afirma que, à medida que n cresce, a razão F_{n+1}/F_n entre dois números de Fibonacci consecutivos aproxima-se do número de ouro ϕ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi.$$

Em (3), fazendo o limite para $n \rightarrow \infty$, obtemos que

$$\operatorname{arctg}(\phi^{-1}) + \operatorname{arctg}(\phi^{-3}) = \frac{\pi}{4}, \quad (4)$$

ou seja,

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-2 + \sqrt{5}) = \frac{\pi}{4}. \quad (5)$$

Na passagem acima usamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{F_{n+1}}{F_n}} = \frac{1}{\phi} = \phi^{-1}$$

e que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}}{F_{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} \frac{F_n}{F_{n+1}} \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} = \phi^{-1} \phi^{-1} \phi^{-1} = \phi^{-3}.$$

Além disso,

$$\phi^{-1} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \cdot \frac{-1 + \sqrt{5}}{-1 + \sqrt{5}} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

e

$$\phi^{-3} = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{-1 + 3\sqrt{5} - 15 + 5\sqrt{5}}{8} = -2 + \sqrt{5},$$

completando a demonstração da igualdade (5).

Pelo mesmo argumento, temos

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{L_n}{L_{n+1}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{L_{n-1}}{L_{n+2}}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad \forall n \geq 1. \quad (6)$$

n	F_n	L_n
0	0	2
1	1	1
2	1	3
3	2	4
4	3	7
5	5	11
6	8	18

A partir da tabela ao lado, usando (3) e (6), podemos construir uma família infinita de igualdades; por exemplo, para $n = 4$, as identidades (3) e (6) dão, respectivamente,

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{5}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$$

e

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{7}{11}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{18}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Definição 1. Uma *seqüência de Lucas generalizada* é uma seqüência na qual cada termo, a partir dos dois primeiros, é a soma dos dois anteriores.

O mesmo raciocínio já empregado acima mostra que se (x_n) for uma seqüência de Lucas generalizada, então vale a seguinte generalização das identidades (3) e (6)

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{x_{n-1}}{x_{n+2}}\right) = \frac{\pi}{4}. \quad (7)$$

Por exemplo, dado $n \in \mathbb{N}$, a seqüência

$$1, n, n+1, 2n+1, 3n+2, 5n+3, 8n+3, \dots, nF_j + F_{j-1}, \dots$$

é uma seqüência de Lucas generalizada. Usando (7), obtemos as igualdades

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}\left(\frac{n}{n+1}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2n+1}\right) &= \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{n}{3n+2}\right) &= \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{n+1}{5n+3}\right) &= \frac{\pi}{4} \\ &\vdots \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{nF_j + F_{j-1}}{nF_{j+1} + F_j}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{nF_{j-1} + F_{j-2}}{nF_{j+2} + F_{j+1}}\right) &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

para todo $j \geq 1$ e todo $n \geq 0$.

Observação 2. O Teorema 1 poderia ter sido demonstrado usando trigonometria em vez de geometria elementar. Da fato, dados $0 < r < s$, seja

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{r}{s}$$

e seja

$$\beta = \frac{\pi}{4} - \alpha.$$

Temos que $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, pois $\frac{r}{s} < 1$. Logo $\beta > 0$ e $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$. Então

$$1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Segue que

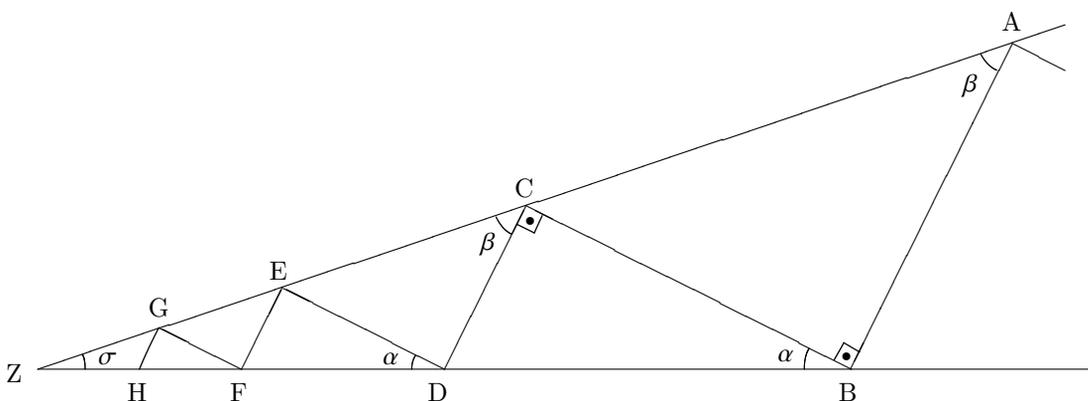
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 - \frac{r}{s}}{1 + \frac{r}{s}} = \frac{s-r}{s+r}.$$

provando o Teorema 1.

3. Uma aplicação da geometria elementar à trigonometria

Vimos, na Observação 2, que em lugar da construção geométrica que usamos para provar o Teorema 1, poderíamos ter usado a trigonometria. É muito relevante a interrelação entre essas duas áreas, a geometria elementar e a trigonometria. Motivados pela Observação 2, é interessante vermos uma demonstração da fórmula da tangente da soma de dois arcos usando só semelhança de triângulos. Começamos com uma construção geométrica interessante por si mesma.

Consideremos a figura abaixo em que σ é um ângulo agudo e ABCDEFGH... é uma linha poligonal na qual lados consecutivos são sempre ortogonais. Os vértices dessa linha poligonal estão sobre os lados do ângulo σ . Os triângulos BCD, DEF, FGH, ... são dois a dois semelhantes, pois têm os lados correspondentes paralelos. O mesmo acontece com os triângulos ABC, CDE, EFG, ...



Considerando os ângulos internos do triângulo AZB, temos que

$$\beta + \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) + \sigma = \pi$$

e, portanto, o ângulo σ pode ser expresso como

$$\sigma = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta).$$

Temos, então, que

$$\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Teorema 2. Com a notação estabelecida acima, temos que os comprimentos

$$\overline{AC}, \overline{CE}, \overline{EG}, \dots \quad e \quad \overline{BD}, \overline{DF}, \overline{FH}, \dots$$

formam duas progressões geométricas de razão $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$.

Demonstração. Já vimos que os triângulos ABC e CDE são semelhantes. Portanto

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}.$$

Mas

$$\overline{BC} = \overline{AB} \operatorname{tg} \beta$$

e

$$\overline{CD} = \overline{BC} \operatorname{tg} \alpha = \overline{AB} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

Logo

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

Da mesma forma se mostra que

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{BD}} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

□

A seguir, vamos usar o Teorema 2 para dar uma demonstração simples de que

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (8)$$

no caso em que $\alpha, \beta > 0$ e $\alpha + \beta < \pi/2$. Começamos mostrando que

$$0 < \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta < 1 \quad (9)$$

e, portanto, teremos que o denominador em (8) é não nulo e a progressão geométrica do Teorema 2 tem razão entre 0 e 1.

De fato, como $\alpha > 0$ e $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, temos que

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} - \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Mas, examinando o gráfico da função $\operatorname{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, vemos que ela é crescente, isto é,

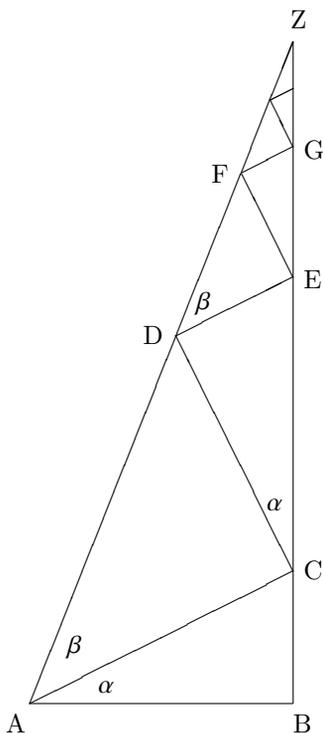
$$x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2.$$

Logo

$$\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \beta)}{\operatorname{cos}(\frac{\pi}{2} - \beta)} = \frac{\operatorname{cos} \beta}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$$

e, portanto,

$$0 < \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta < 1.$$



Considere a figura ao lado. Os ângulos α e β são positivos e $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. A figura mostra uma série de triângulos retângulos e os seguintes segmentos são perpendiculares

$$AC \perp CD, \quad CD \perp DE, \quad DE \perp EF, \quad EF \perp FG, \quad \dots$$

Conforme a construção feita acima, os triângulos ACD, DEF, FGH, ... são dois a dois semelhantes e o mesmo acontece com os triângulos CDE, EFG, GHI, Esses últimos ainda são semelhantes ao triângulo ABC (lados correspondentes perpendiculares).

Tomando $\overline{AB} = 1$, temos

$$\overline{BC} = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{e} \quad \overline{BZ} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta).$$

Decompomos

$$\overline{BZ} = \overline{BC} + \overline{CE} + \overline{EG} + \dots \quad (10)$$

Pelo Teorema 2, os comprimentos \overline{CE} , \overline{EG} , \overline{GI} , ... formam uma progressão geométrica ilimitada de razão $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$. Note que o raciocínio acima é válido porque já verificamos que a razão $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$ da progressão geométrica é menor do que 1.

O primeiro termo da soma no lado direito da igualdade (10) não faz parte da progressão geométrica e vale $\overline{BC} = \operatorname{tg} \alpha$. Também, considerando os triângulos retângulos ABC, ACD e CDE, temos

$$\overline{CE} = \overline{CD} \sec \alpha = \overline{AC} \operatorname{tg} \beta \sec \alpha = \sec^2 \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \operatorname{tg} \alpha + \sec^2 \alpha \cdot (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^3 \beta + \dots) \\
 &= \operatorname{tg} \alpha + \frac{\sec^2 \alpha \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \\
 &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg} \beta + \sec^2 \alpha \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \\
 &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + (\sec^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha) \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \\
 &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.
 \end{aligned}$$

4. Extensão do Teorema 1

No Teorema 1, provamos (2) sob a hipótese de que $0 < r < s$. Isso porque, para na demonstração, interpretamos r , s , $s - r$ e $s + r$ como comprimentos de segmentos de reta. Mas se fizermos experimentos com uma calculadora, vamos constatar que a igualdade (2) vale para certos valores de r

e s fora dessas hipóteses, mas não para todos r e s. É interessante, então, investigar para quais valores de r e s a igualdade vale.

Evidentemente, para que os termos que aparecem em (2) façam sentido, é preciso que $s \neq 0$ e que $s \neq -r$. Para r e s satisfazendo essas duas condições, sejam

$$a = \operatorname{arctg}\left(\frac{r}{s}\right) \quad \text{e} \quad b = \operatorname{arctg}\left(\frac{s-r}{s+r}\right).$$

Então

$$\operatorname{tg} a = \frac{r}{s} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} b = \frac{s-r}{s+r}.$$

Portanto

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} = \frac{\frac{r}{s} + \frac{s-r}{s+r}}{1 - \frac{r(s-r)}{ss+r}} = \frac{r(s+r) + s(s-r)}{s(s+r) - r(s-r)} = \frac{r^2 + s^2}{r^2 + s^2} = 1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}.$$

Segue que

$$a + b = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad \text{para algum } n \in \mathbb{Z}.$$

Como a e b pertencem ao intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a imagem da função arctg , concluímos que o n acima só pode ser 0 ou -1, ou seja,

$$a + b = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad \text{com } n = 0 \text{ ou } -1. \quad (11)$$

Vamos dividir em casos.

Caso 1: $s > 0$ e $r > -s$.

Neste caso,

$$\frac{r}{s} > -1,$$

o que implica que

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{r}{s}\right) > \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4},$$

pois a função arctg é crescente. Logo

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{r}{s}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{s-r}{s+r}\right) > -\frac{3\pi}{4},$$

pois a segunda parcela do lado esquerdo, por estar na imagem da função arctg , é maior do que $-\frac{\pi}{2}$. Concluímos que o n que aparece em (11) não pode ser -1. Logo, neste caso,

$$a + b = \frac{\pi}{4},$$

ou seja,

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{r}{s}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{s-r}{s+r}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \text{para quaisquer } s > 0 \text{ e } r > -s.$$

Caso 2: $s > 0$ e $r < -s$.

Neste caso,

$$\frac{r}{s} < -1,$$

o que implica que

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{r}{s}\right) < \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Logo

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{r}{s}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{s-r}{s+r}\right) < \frac{\pi}{4},$$

pois a segunda parcela do lado esquerdo, por estar na imagem da função arctg , é menor do que $\frac{\pi}{2}$. Concluimos que o n que aparece em (11) não pode ser 0, sendo, portanto, igual a -1 . Logo, neste caso,

$$a + b = -\frac{3\pi}{4},$$

ou seja,

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{r}{s}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{s-r}{s+r}\right) = -\frac{3\pi}{4} \quad \text{para quaisquer } s > 0 \text{ e } r < -s.$$

Caso 3: $s < 0$ e $r \neq -s$.

Este caso pode ser reduzido a um dos dois casos acima, notando que $-s > 0$ e

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{r}{s}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{s-r}{s+r}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-r}{-s}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{-s-(-r)}{(-s)+(-r)}\right).$$

Obtemos que

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{r}{s}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{s-r}{s+r}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \text{para quaisquer } s < 0 \text{ e } r < -s$$

e

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{r}{s}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{s-r}{s+r}\right) = -\frac{3\pi}{4} \quad \text{para quaisquer } s < 0 \text{ e } r > -s.$$

Resumindo os três casos considerados acima, provamos o seguinte resultado.

Teorema 3. *Sejam r e s números reais com $s \neq 0$ e $r \neq -s$. Então*

(i) *Para $s > 0$, temos*

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{r}{s}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{s-r}{s+r}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{se } r > -s \\ -\frac{3\pi}{4}, & \text{se } r < -s \end{cases}$$

(ii) *Para $s < 0$, temos*

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{r}{s}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{s-r}{s+r}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{se } r < -s \\ -\frac{3\pi}{4}, & \text{se } r > -s \end{cases}$$

5. Considerações finais.

Finalmente, vamos dar uma ideia de como Euler utilizou a igualdade (1) para obter uma boa aproximação do valor de π . Expandindo a função $\arctg x$ em série de Taylor (ver [4], capítulo 10), temos

$$\arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \forall x \in (-1, 1). \quad (12)$$

A seguir, utilizando (1) e fazendo $x = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{3}$ em (12), obtemos

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \dots \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \dots \right). \quad (13)$$

A ideia é utilizar somente um número finito de termos de cada uma das séries em (13). Por exemplo, usando só os três primeiros termos de cada uma das séries, temos o valor aproximado

$$\pi \approx 4 \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} \right) \right] = \frac{6115}{1944} = 3,1455 \dots$$

já com duas casas corretas depois da vírgula. Utilizando mais termos das séries, obtemos aproximações de π com erros cada vez menores.

Posteriormente foram descobertas muitas outras igualdades do mesmo tipo, por exemplo, a Fórmula de Machin

$$4 \arctg \left(\frac{1}{5} \right) - \arctg \left(\frac{1}{239} \right) = \frac{\pi}{4},$$

que foi usada por John Machin, em 1706, para calcular valor de π com 100 casas exatas (ver [5]).

Referências

- [1] Reginaldo Leôncio da Silva *A sequência de Fibonacci e o número de ouro: contexto histórico, propriedades, aplicações e propostas de atividades didáticas para alunos de primeiro ano do ensino médio*. Dissertação de Mestrado Profmat. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB). Vitória da Conquista, 2015. Disponível em: http://www2.uesb.br/ppg/profmat/wp-content/uploads/2018/11/Dissertacao_REGINALDO_LEONCIO_SILVA.pdf. Acesso em: 27 de novembro de 2013.
- [2] M. S. Caneiro, K. E. Nobokite, M. A. A. Fernandes *Três diferentes provas de que as razões entre números consecutivos de Fibonacci convergem para o Número de Ouro*. Professor de Matemática Online (PMO) – Sociedade Brasileira de Matemática v. 11, no. 2, 2023.
- [3] G. B. Thomas, M. D. Weir e J. Hass *Cálculo, vol. 1*. 12ª edição, Pearson Universidades, 2012.
- [4] G. B. Thomas, M. D. Weir e J. Hass *Cálculo, vol. 2*. 12ª edição, Pearson Universidades, 2012.
- [5] Wikipedia. Fórmula de Machin. https://pt.wikipedia.org/wiki/Fórmula_de_Machin.

Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
<brietzke@mat.ufrgs.br>

Recebido: 01/11/2023
Publicado: 08/05/2024