

# Teoria Matricial dos Grafos: uma proposta para ser trabalhada no Ensino Médio

Hugo Santos Nunes 

Gisele Costa da Silva 

## Resumo

A teoria matricial dos grafos é uma área da matemática que estuda a relação entre matrizes e grafos. Essa teoria é importante para entender as propriedades dos grafos, como conectividade e ciclos, por meio de operações em matrizes. A abordagem dessa teoria no ensino médio pode ser útil para a compreensão de diversos problemas práticos, como a organização de redes de comunicação, planejamento de rotas de transporte, análise de redes sociais e muito mais.

**Palavras-chave:** Pesquisa matemática; Teoria dos grafos; Teoria das matrizes

## Abstract

The matrix theory of graphs is a mathematical area that studies the relationship between matrices and graphs. This theory is important for understanding the properties of graphs, such as connectivity and cycles, through operations on matrices. The approach of this theory in high school can be useful for understanding various practical problems, such as the organization of communication networks, planning of transportation routes, analysis of social networks and much more.

**Keywords:** Mathematical Research; Graph Theory; Matrix Theory

## 1. Introdução

O pano de fundo histórico que se conhece sobre a teoria dos grafos remonta ao século 18, quando o primeiro artigo científico sobre grafos apareceu, escrito pelo matemático suíço Leonhard Euler, em 1736. Euler baseou-se no problema das pontes de Königsberg (atual Kaliningrado) para escrever seu artigo. O problema trata das sete pontes que conectam as duas margens do rio Pregel com duas de suas ilhas. Duas das pontes ligam a ilha principal à margem oriental, e outras duas à margem ocidental. A ilha menor é conectada a cada margem por uma ponte, e a sétima ponte une as duas ilhas. O problema colocado é se seria possível que, ao partir de um local arbitrário, você retorne ao ponto de partida se cruzar cada ponte apenas uma vez. Euler provou que o grafo associado ao esquema da ponte de Königsberg não tem solução; ou seja, não é possível retornar ao nó inicial sem passar por alguma aresta duas vezes.

## 2. Matriz

Grafos e matrizes estão intimamente relacionados entre si. Uma matriz é um conjunto de números dispostos em linhas e colunas, de modo a formar uma matriz retangular. Algumas matrizes podem fornecer informações valiosas sobre grafos, como quantos vértices estão conectados, quantos caminhos podem existir entre 2 vértices e muito mais. Abordaremos como encontrar o número de vértices conectados entre si, bem como quantos caminhos podem existir entre 2 vértices mais à frente.

## 2.1. Motivação para o estudo de matrizes

O desenvolvimento da teoria e aplicações da matemática é baseado na descrição, através de modelos matemáticos, dos fenômenos que ocorrem ao nosso redor. Ao estudar um fenômeno de qualquer tipo, uma das primeiras preocupações que devemos abordar é decidir quantas características precisam ser analisadas para obter o conhecimento desejado do fenômeno. Por exemplo, em um processo de produção com  $m$  itens diferentes, onde cada um também pode ser produzido por  $n$  linhas de produção diferentes, pode ser interessante estabelecer, de forma ordenada. As tabelas aparecem em diversas situações porque são objetos eficientes para processar informações de maneira ordenada. O exemplo a seguir é um exemplo disso.

**Exemplo 1.** Uma empresa fabrica baterias elétricas em três tamanhos: A, B e C, e duas tensões:  $V_1$  e  $V_2$ . O número de peças fabricadas por dia (em milhares de unidades) é dado pela tabela 1, e o preço (em centavos por unidade) é dado pela tabela 2:

Tabela 1: Nº de peças fabricadas por dia

	A	B	C
$V_1$	20	19	18
$V_2$	22	19	21

Tabela 2: Preço

	$V_1$	$V_2$
A	70	120
B	45	65
C	50	50

Como pode ser observado, as tabelas anteriores contêm as informações sobre a produção diária de cada tamanho de bateria e seus preços. Dessas tabelas podemos extrair informações implicitamente contidas nelas. Por exemplo, a soma de todos os elementos da tabela 1 dá-nos o número total de baterias de todos os tamanhos fabricadas pela empresa em um determinado dia. Se somarmos os elementos de cada coluna obteremos o número de baterias fabricadas nos tamanhos A, B e C, nas duas tensões  $V_1$  e  $V_2$ . Se, pelo contrário, somarmos os elementos de cada linha, obteremos o número de baterias fabricadas por tensão, de todos os tamanhos.

A representação dos fenômenos de estudo por meio de tabelas pode ter objetivos muito mais gerais do que a simples representação apresentada no exemplo 1. Do ponto de vista matemático, representar um fenômeno não tem como objetivo principal sua representação, mas determinar a álgebra de operações que podem ser feitas com ele, além de estudar as ligações entre diferentes fenômenos que relacionam suas características de estudo.

Desta forma, o objetivo é determinar uma estrutura algébrica para os conjuntos cujos elementos são do tipo mostrado no exemplo 1. Para isso, partimos da construção de um conjunto, onde seus elementos são definidos de forma que possam representar e responder, por meio de operações algébricas simples, ao problema levantado em 1.

**Definição 1** (Matriz). Um arranjo retangular  $\mathbf{A}$  com  $m$  linhas e  $n$  colunas, onde seus  $mn$  componentes são números reais, é chamada de **matriz** de ordem ou tamanho  $m \times n$ .

Em geral, na matriz  $\mathbf{A}$ , a componente da linha  $i$  e coluna  $j$  é representada por  $a_{ij}$ ; então, se a matriz for de ordem  $m \times n$  temos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Denotamos o conjunto que representa tudo isso por:

$$\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) = \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A} \text{ é uma matriz de ordem } m \times n\}.$$

Existem algumas matrizes que, devido à sua importância, recebem nomes particulares.

**Definição 2** (Matriz Quadrada). Uma matriz é dita quadrada, quando o número de linhas ( $m$ ) é igual ao número de colunas ( $n$ ), ou seja,  $m = n$ .

**Definição 3** (Matriz Transposta). Dada uma matriz  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , denominamos a transposta de  $\mathbf{A}$ , e indicaremos por  $\mathbf{A}^T \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ , a matriz obtida trocando-se ordenadamente as linhas pelas colunas de  $\mathbf{A}$ .

**Definição 4** (Matriz Simétrica). Uma matriz quadrada  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  denomina-se simétrica quando

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T.$$

**Definição 5** (Matriz Antissimétrica). Uma matriz quadrada  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  denomina-se antissimétrica quando

$$\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}.$$

## 2.2. Propriedades algébricas

Agora que definimos uma matriz, apresentaremos as operações básicas. Existem três tipos de operações com matrizes que abordaremos em nosso artigo. Uma das operações que será abordada é a Adição. Embora a ordem das matrizes possa não importar ao adicionar matrizes, ambas as matrizes precisam ter o mesmo número de linhas e colunas. Uma vez confirmado que ambas as matrizes têm o mesmo número de linhas e colunas, as entradas correspondentes podem ser adicionadas.

**Definição 6.** A soma de duas matrizes  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  define-se como sendo a matriz  $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  de modo que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i, j.$$

**Propriedade 1** (Adição de Matrizes). *Sejam  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  matrizes arbitrárias em  $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Então:*

1.  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ . (Associativa)
2.  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ . (Comutativa)
3.  $\mathbf{A} + \mathbf{0}_{m \times n} = \mathbf{A}$ . (Elemento neutro)
4. Para toda matriz de ordem  $m \times n$ , existe uma matriz de mesma ordem, denotada por  $-\mathbf{A}$ , tal que  $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{A} = \mathbf{0}$ . (Simétrico)

Outro tipo de operação com matrizes é a multiplicação de matrizes por uma constante. Essa operação é análoga à multiplicação de um número na frente de uma expressão entre parênteses, usando a propriedade distributiva.

**Definição 7.** A multiplicação de uma matriz,  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , por um escalar,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , define-se como sendo a matriz  $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$

$$\mathbf{B} = \alpha \mathbf{A}$$

resultante da multiplicação por  $\alpha$  de cada um dos elementos da matriz  $\mathbf{A}$ , ou seja,

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad \forall i, j.$$

**Propriedade 2** (Propriedades da Multiplicação de Matriz por Escalar). *Sejam  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  matrizes de mesma ordem e  $k, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ :*

1.  $(k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A}$
2.  $(k_1 k_2)\mathbf{A} = k_1(k_2\mathbf{A})$
3.  $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$
4. A multiplicação do escalar 0 por qualquer matriz  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ , gera a matriz nula, isto é  $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}_{m \times n}$ .
5. Para toda matriz  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$
6.  $(-k)\mathbf{A} = -(k\mathbf{A})$

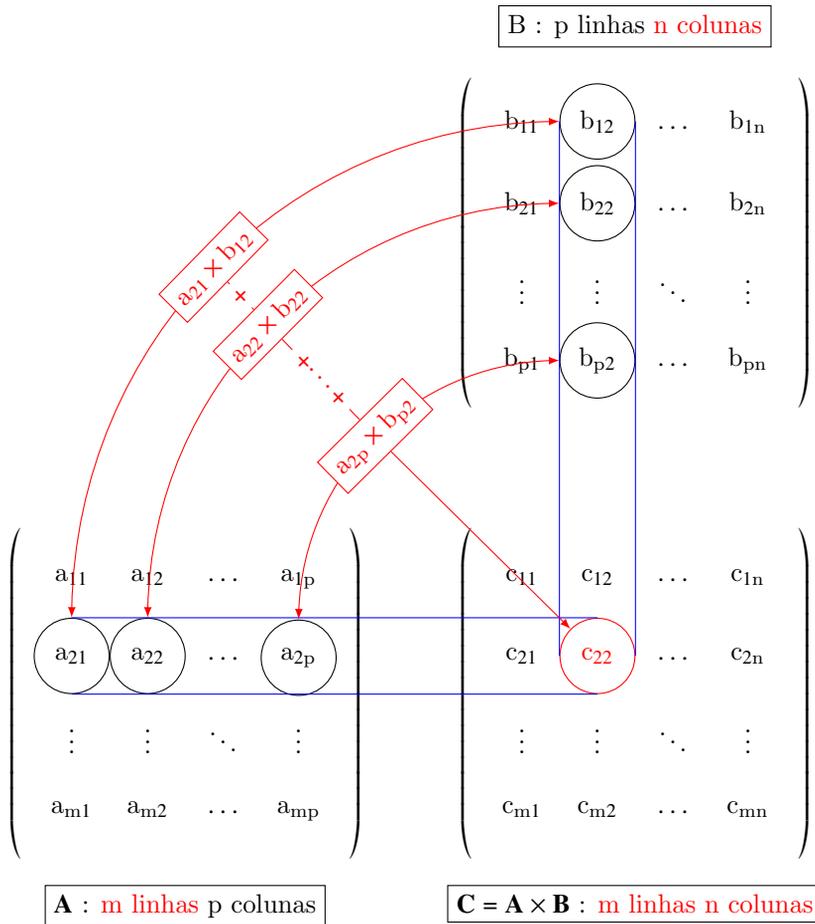
Finalmente, a operação de matriz restante é a multiplicação de duas (ou mais) matrizes entre si. Ao multiplicar uma matriz por outra matriz, o número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda matriz, caso contrário as duas matrizes não podem ser multiplicadas. Uma vez que esteja claro que este requisito foi atendido, a entrada correspondente para a primeira linha da primeira matriz deve ser multiplicada pela entrada correspondente da primeira coluna da segunda matriz. Em seguida, os produtos da multiplicação de todas as entradas da primeira linha da primeira matriz e da primeira coluna da segunda matriz seriam adicionados para encontrar a entrada correspondente para o produto. Tal processo teria que continuar até que cada linha da primeira matriz fosse multiplicada por cada coluna da segunda matriz.

**Definição 8.** Sejam as matrizes  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{R})$  e  $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{R})$ . O produto de duas matrizes, tais que o número de colunas da primeira é igual ao número de linhas da segunda, define-se como sendo a matriz  $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  cujos elementos,  $c_{ij}$ , resultam da soma dos produtos dos elementos da linha  $i$  da matriz  $\mathbf{A}$  pelos elementos correspondentes da coluna  $j$  da matriz  $\mathbf{B}$ . Ou seja:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$$

$$\begin{aligned}
 c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} \\
 &= \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}, \quad \forall i, j.
 \end{aligned}$$

Figura 1: Representação do produto de duas matrizes.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por que a multiplicação de matrizes é definida dessa forma? Existem muitas respostas possíveis para esta questão, mas a mais simples tem a ver com a necessidade de obter uma representação matricial simples para sistemas de equações lineares. Considere o seguinte sistema de duas equações em duas incógnitas:

$$\begin{cases}
 2x + 3y = 1 \\
 x + y = 0
 \end{cases}$$

Isso pode ser representado em forma de matriz como:

$$\begin{bmatrix}
 2x + 3y \\
 x + y
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 1 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 2 & 3 \\
 1 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 x \\
 y
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 1 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

Onde:

- A** = é chamada matriz dos coeficientes
- X** = é chamada matriz das variáveis
- B** = é chamada matriz dos termos independentes

Outra razão pela qual a multiplicação de matrizes é definida da maneira mostrada acima é que ela permite-nos lidar facilmente com sistemas de insumo-produto nos quais determinados produtos podem ser obtidos a partir de combinações fixas de insumos.

**Exemplo 2.** Uma fábrica pode produzir dois bens, denotados por  $B_1$  e  $B_2$ , usando diferentes combinações de dois insumos,  $I_1$  e  $I_2$ . Em particular, 2 unidades de  $I_1$  e 1 unidade de  $I_2$  são necessárias para produzir uma unidade de  $B_1$ , e 1 unidade de  $I_1$  e 3 unidades de  $I_2$  são necessárias para produzir uma unidade de  $B_2$ . Essa informação pode ser resumida pela matriz de entrada-saída:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

onde as duas linhas correspondem às duas saídas e as duas colunas correspondem às duas entradas. Cada unidade de  $I_1$  custa 2 reais, e cada unidade de  $I_2$  custa 1 real. Essas informações podem ser resumidas pela matriz de preços:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar os custos de produção dos dois produtos, basta realizar a seguinte multiplicação de matrizes:

$$\begin{aligned} \mathbf{AX} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$


  
Multiplica as matrizes  
Resolvendo

Portanto, ambas as saídas têm um custo de produção de 5 reais.

**Propriedade 3** (Propriedades da Multiplicação de Matrizes). *Suponha que A, B e C sejam matrizes para as quais as seguintes somas e produtos estão definidos. Seja  $\alpha$  um escalar. Então:*

1.  $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC});$  (Associatividade da multiplicação)
2.  $(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA};$  (Distributiva em relação à soma pela esquerda)
3.  $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC};$  (Distributiva em relação à soma pela direita)
4.  $(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{AB});$  (Distributiva em relação ao produto escalar)
5.  $\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}.$  (Elemento Neutro)

### 3. Grafos

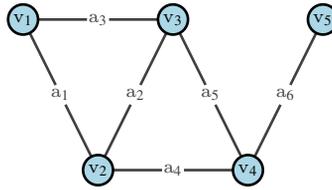
Em geral, um grafo é uma coleção de objetos, chamados vértices, que geralmente são representados geometricamente como pontos, juntamente com um conjunto de conexões entre esses vértices, chamados de arestas, que geralmente são representados como segmentos de reta. Para seu estudo é interessante então, conhecer conceitos básicos como os apresentados a seguir.

**Definição 9** (Grafo). Seja  $V(G)$  um conjunto de vértices e  $A(G)$  um conjunto de arestas ou arcos. Dá-se o nome de **grafo** ao par ordenado  $G = (V, A)$ , onde todo elemento  $A(G)$  está relacionado a elementos de  $V(G)$ .

**Exemplo 3.** A figura abaixo fornece a representação gráfica de um grafo onde  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  e  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ , sendo:

$$a_1 = (v_1, v_2), \quad a_2 = (v_2, v_3), \quad a_3 = (v_1, v_3), \quad a_4 = (v_2, v_4), \quad a_5 = (v_3, v_4) \quad \text{e} \quad a_6 = (v_4, v_5).$$

Figura 2: Grafo com 5 vértices e 6 arestas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Várias situações práticas requerem que associemos sentido às arestas do grafo. Por exemplo, considere um grafo representando as ruas de um bairro. Nem todas as ruas são de mão dupla. Ao se estudar rotas é necessário considerar se as ruas são de mão única, isto é, permitem fluxo apenas no sentido  $(v_i, v_j)$  ou se são de mão dupla. Quando associamos sentido às arestas do grafo temos um grafo direcionado.

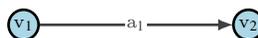
**Definição 10** (Grafo direcionado). Um grafo direcionado  $G$  é um par  $(V, A)$ , formado por um conjunto de vértices  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  e um conjunto de arestas dirigidas  $A(G) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , onde cada aresta é um par ordenado de vértices  $(v_i, v_j)$ .

*Observação 1.* Se as relações não tiverem um sentido definido, podendo a aresta ser seguida em qualquer direção, o grafo é chamado de **não direcionado**.

Em um grafo direcionado, quando dizemos que uma aresta é incidente a um vértice, queremos saber em que sentido.

**Definição 11.** Seja uma aresta associada ao par  $(v_i, v_j)$ . Se o sentido da aresta “sai” de  $v_i$  e “chega” a  $v_j$ , dizemos que a aresta é divergente em relação a  $v_i$  e convergente em relação a  $v_j$ .

Figura 3: A aresta  $a_1$  é divergente em relação à  $v_1$  e convergente em relação à  $v_2$

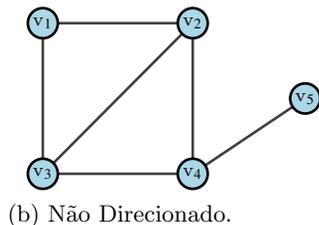
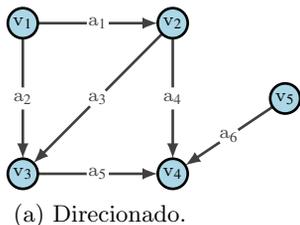


Fonte: Elaborado pelo autor.

**Exemplo 4.** A figura 4a abaixo fornece a representação gráfica de um grafo direcionado onde  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  e  $A(G) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ , sendo:

$$a_1 = (v_1, v_2), \quad a_2 = (v_1, v_3), \quad a_3 = (v_2, v_3), \quad a_4 = (v_2, v_4), \quad a_5 = (v_3, v_4) \quad \text{e} \quad a_6 = (v_5, v_4).$$

Figura 4: Exemplo de grafos Direcionado e Não Direcionado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

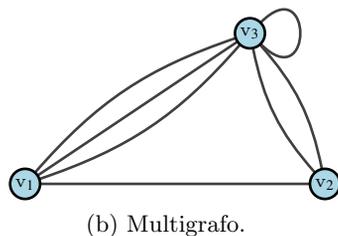
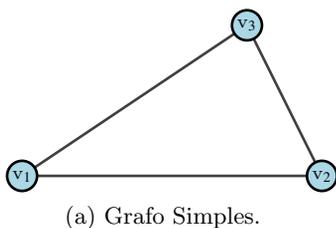
**Definição 12** (Laço). É uma aresta que liga um vértice a ele mesmo.

**Definição 13** (Arestas múltiplas). Também chamada de **arestas paralela**, são arestas diferentes que possuem os mesmos vértices como extremidades.

**Definição 14.** Um grafo é dito:

- Simples:** quando ele não possui laços nem arestas múltiplas.
- Multigrafo:** quando o grafo possui laços e arestas múltiplas

Figura 5: Exemplo de grafos simples e multigrafo.

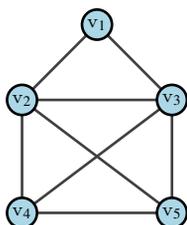


Fonte: Elaborado pelo autor.

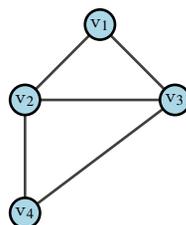
**Definição 15** (Subgrafo). Um grafo  $G'$  é dito um **subgrafo** de um grafo  $G$  se o conjunto de vértices  $V(G') \subseteq V(G)$  e o conjunto de arestas  $A(G') \subseteq A(G)$ .

A figura 6 ilustra um grafo  $G'$  6b que é subgrafo de  $G$  6a.

Figura 6: Exemplo de grafo e subgrafo.



(a) Grafo  $G$ .

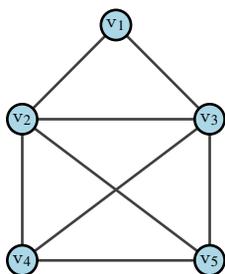


(b) Subgrafo  $G'$ .

Fonte: Elaborado pelo autor.

**Definição 16** (Ordem). A **ordem** de um grafo  $G$  é dada pela cardinalidade do seu conjunto de vértices, ou seja, pelo número de vértices que  $G$  possui.

Figura 7: Grafo de ordem 5.



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Definição 17** (Passeio). Um passeio em um grafo  $G$  é uma seqüência alternada de vértices e arestas, onde cada aresta é incidente ao vértice que a precede e ao que a sucede. Podendo ser distinguido por:

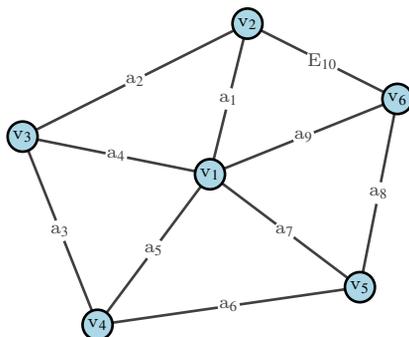
- Trajeto:** um passeio onde todas as arestas são distintas.
- Caminho:** um passeio onde todos os vértices são distintos.

*Observação 2.* Quando o vértice inicial é também o vértice final, formando assim um caminho fechado, ele é chamado de **Ciclo** (ou Circuito).

**Definição 18** (Comprimento). O **comprimento** de um passeio, trajeto ou caminho é o número de arestas que o constitui.

No grafo a seguir um passeio, por exemplo, a seqüência  $v_3, v_1, v_5, v_6, v_1, v_4, v_3$  que tem comprimento 6. É também um trajeto, pois não temos repetição de arestas. Um exemplo de caminho seria a seqüência  $v_3, v_1, v_6, v_5, v_4$  de comprimento 4.

Figura 8: Passeio.



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Definição 19** (Conexidade). Um grafo  $G$  é **conexo** se existir pelo menos um caminho entre cada par de vértices pertencente a ele. Caso contrário, o grafo é dito **desconexo**.

**Definição 20** (Incidência). Dados dois vértices  $v_i$  e  $v_j$ , eles são ditos incidentes de uma aresta  $a_k$ , se eles forem os extremos de  $a_k$ .

**Definição 21** (Vértices adjacentes). Dados dois vértices  $v_i$  e  $v_j$ , eles são ditos adjacentes ou vizinhos se existir uma aresta  $a_k$  em comum entre eles, ou seja, quando estes forem os extremos de uma mesma aresta.

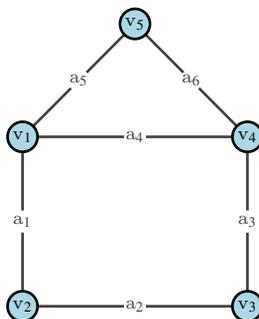
**Definição 22** (Arestas adjacentes). Dados duas arestas  $a_i$  e  $a_j$ , elas são ditas adjacentes se tiverem ao mesmo tempo um vértice  $v_k$  em comum.

**Definição 23** (Grau de um vértice). É o número de arestas que incidem em um vértice.

**Definição 24**. A soma dos graus dos vértices de um grafo recebe o nome de **grau do grafo**.

**Exemplo 5**. No grafo temos que  $v_1$  e  $v_4$  são vértices adjacentes, pois a aresta  $a_4$  é comum a eles, o que faz deles também vértices incidentes na aresta  $a_4$ . Temos também,  $a_5$  e  $a_6$  como exemplo de arestas adjacentes, pois,  $v_5$  é um vértice em comum entre as duas arestas. É um grafo de grau 12, resultado obtido ao somar os graus de seus vértices.

Figura 9: Grafo (Vértice e Aresta Adjacente).



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Teorema 1.** *O grau de um grafo é sempre um número par.*

*Demonstração.* Ao somarmos em um grafo os graus dos vértices cada aresta pertencente a ele é contada duas vezes. Portanto a soma será um número par. Assim, tomando  $m$  como o número de arestas do grafo:

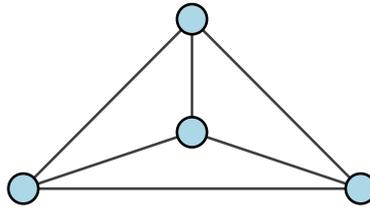
$$\sum_{v \in V} g(v) = 2m.$$

□

**Definição 25** (Grafo Completo). Dá-se o nome de **grafo completo** ao grafo simples em que cada um dos seus  $n$  vértices é adjacente a qualquer outro vértice. Um grafo completo com  $n$  vértices é denotado por  $K_n$ .

**Definição 26** (Grafo Regular). Um grafo  $G$  é **regular** quando todos os seus vértices têm o mesmo grau.

Figura 10: grafo completo que é também um grafo regular, pois todos os seus vértices tem grau 3.



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Definição 27** (Grafo Nulo). Um grafo simples  $G$  é **nulo** ou **vazio** quando o conjunto de arestas é vazio.

**Definição 28** (Grafo Trivial). Quando o grafo simples possui um único vértice, ele é dito **trivial**.

*Observação 3.* Perceba que todo grafo trivial é também um grafo nulo, mas nem todo grafo nulo é um grafo trivial.

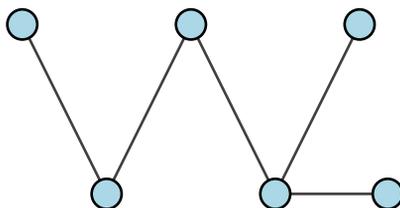
Figura 11: Exemplo de grafos nulo e trivial.



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Definição 29** (Árvore). Um grafo  $G$  é denominado **árvore** se ele for conexo e não possuir ciclos.

Figura 12: Árvore.



Fonte: Elaborado pelo autor.

## 4. Representação de um Grafo

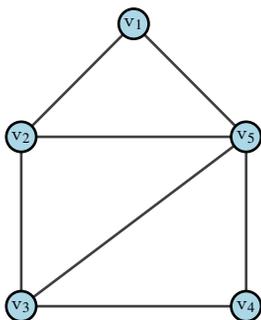
Ao se trabalhar com grafos é importante saber representá-los de maneiras diferentes, não apenas na forma de desenho. Além da representação geométrica, podemos colocar todas as informações relevantes para um grafo em forma de tabela usando matriz. É uma forma útil onde se estabelece uma relação entre grafos e álgebra, e facilita a resolução de problemas onde se tem um número elevado de ligações. Duas matrizes possíveis de serem geradas por um grafo são: matrizes de adjacência e de incidência. A construção dessas matrizes difere para grafos direcionados e não direcionados.

### 4.1. Para grafos não direcionados

**Definição 30** (Matriz de adjacência). Seja  $G$  um grafo simples com  $n$  vértices. A matriz de adjacência  $X$  é uma matriz  $n \times n$ , cujas entradas são:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se existe uma aresta entre os vértices } v_i \text{ e } v_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Figura 13: Grafo  $G$  e sua matriz de adjacência.



$$X = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Cada grafo pode ser expresso matematicamente na forma de uma matriz de adjacência. Assim, dada apenas a matriz de adjacência, é possível reconstruir o grafo. Nessas matrizes as linhas e colunas são atribuídas aos vértices do grafo, e a presença de uma aresta é simbolizada por um

valor numérico. Usando a representação matricial do grafo podemos calcular propriedades desse grafo como grau e outras centralidades aplicando conceitos básicos de matrizes.

*Observação 4.*

- (i) Em grafos não direcionados a relação de adjacência é simétrica, isto é, os elementos  $x_{ij}$  são iguais aos elementos  $x_{ji}$ , pois ambos os elementos são 1 quando  $v_i$  e  $v_j$  são adjacentes, e ambos os elementos são 0 caso contrário. Logo, a matriz de adjacência será uma matriz simétrica, ou seja  $X = X^T$ .
- (ii) O grau de um vértice em um grafo não direcionado, representado por sua matriz de adjacência, pode ser obtido pela soma de sua linha (ou coluna) correspondente.

**Teorema 2.** *Seja  $G$  um grafo simples e  $X$  a sua matriz de adjacência. O número de passeios de comprimento  $K$  entre os vértices  $v_i$  e  $v_j$  de  $G$ , que denotaremos por  $p_{ij}(K)$ , é igual à entrada  $x_{ij}^K$  da matriz  $X^K$ .*

*Demonstração.* Vamos provar fazendo indução em  $K$ . Tomando  $K = 1$ , o resultado é válido, uma vez que só existe um único passeio de comprimento 1 entre os vértices  $v_i$  e  $v_j$  se existir uma aresta que os ligue, e, nesse caso, por definição de matriz de adjacência

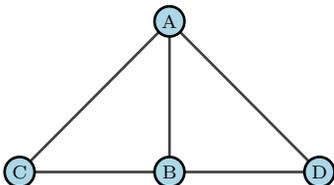
$$x_{ij} = 1 = p_{ij}(1).$$

Suponha, por indução, que para  $k > 2$  o número de passeios de comprimento  $k - 1$  entre os vértices  $v_i$  e  $v_j$  em  $G$  é igual à entrada  $x_{ij}^{k-1}$  da matriz  $X^{k-1}$ . Vejamos para os passeios de comprimento  $K$ . Como  $X^K = X^{K-1}X$ . Dessa forma, para quaisquer  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , temos que

$$\begin{aligned} x_{ij}^{(K)} &= \sum_{p=1}^n x_{ip}^{(K-1)} x_{pj} \\ &= \sum_{p=1}^n p_{ip}(K-1) p_{pj}(1) \\ &= p_{ij}(K). \end{aligned}$$

Uma vez que cada passeio de comprimento  $K - 1$  entre os vértices  $i$  e  $j$  acrescentamos uma aresta, obtemos passeios de comprimento  $K$ . Portanto,  $x_{ij}^{(K)} = p_{ij}(K)$ , para todo  $K \geq 1$ .  $\square$

**Exemplo 6.** Seja um terreno com quatro reservatórios de água, alguns deles interligados por canos. Na matriz  $X$  abaixo, a posição  $x_{ij} = 1$  significa que o reservatório  $i$  pode despejar água diretamente no reservatório  $j$ . Já a posição  $x_{ij} = 0$  significa que os reservatórios  $i$  não despeja água no reservatório  $j$ . O fato de a diagonal principal ser nula significa que um reservatório não despeja água em si mesmo de forma direta.



$$X = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

A matriz de adjacência  $X$  contém o número de passeios de comprimento 1 entre dois reservatórios. Ou seja,  $x_{12} = 1$  significa que o reservatório A despeja água diretamente para o reservatório B, sem precisar passar por um terceiro. Para calcular a matriz  $X^2$ , vamos multiplicar a matriz  $X$  por ela mesma.

$$\begin{aligned}
 X^2 &= XX \\
 &= \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \\
 &= \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}
 \end{aligned}$$

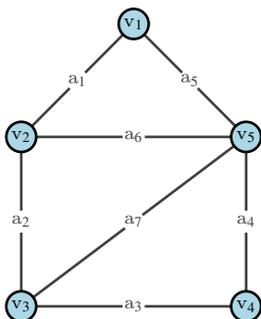
Por exemplo, olhando para a posição  $x_{22}^{(2)} = 3$ , significa que existem 3 caminhos que ligam B consigo mesmo:

$$B - A - B, \quad B - C - B \quad e \quad B - D - B.$$

**Definição 31** (Matriz de incidência). Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices e  $m$  arestas. Sua matriz de incidência é uma matriz de ordem  $n \times m$ , denotada por  $Y = [y_{ij}]$ , definida como:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } a_j \text{ é incidente no } v_i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Figura 14: Grafo  $G$  e sua matriz de incidência.



$$Y = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na matriz acima é possível observar que as linhas estão associadas aos vértices e as colunas às arestas. O elemento da linha  $i$  e coluna  $j$  é 1 quando a aresta  $j$  incide sobre o vértice  $i$ , caso contrário o elemento é 0.

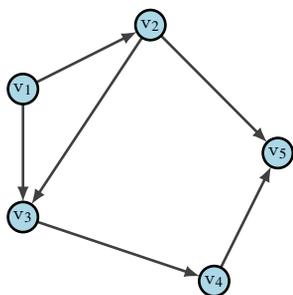
## 4.2. Para grafos direcionados

Em um grafo orientado suas arestas indicam um sentido, ou seja, suas arestas são pares ordenados, representados por setas, de maneira que  $(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$ .

**Definição 32** (Matriz de adjacência). Seja  $G$  um grafo direcionado com  $n$  vértices e sem arestas paralelas. A matriz de adjacência  $X$  é uma matriz  $n \times n$ , cujas entradas são:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se existe uma aresta direcionada do vértice } v_i \text{ para o vértice } v_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Figura 15: Grafo  $G$  e sua matriz de adjacência.



$$X = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

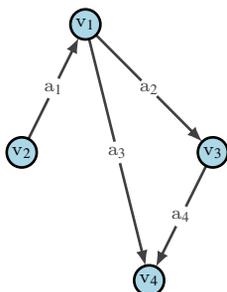
*Observação 5.*

- (i) Em grafos direcionados, sua matriz de adjacência não necessariamente tem que ser simétrica, pois pode não haver uma aresta de  $v_i$  para  $v_j$ .
- (ii) Para um grafo direcionado, a soma dos elementos na linha  $i$  representa o grau de saída do vértice  $v_i$ , enquanto a soma dos elementos na coluna  $j$  representam o grau de entrada de  $v_j$ .

**Definição 33** (Matriz de incidência). Seja  $G$  um grafo direcionado com  $n$  vértices e sem arestas paralelas. A matriz de incidência  $Y$  é uma matriz  $n \times n$ , cujas entradas são:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } a_j \text{ diverge do vértice } v_i \\ -1, & \text{se a aresta } a_j \text{ converge do vértice } v_i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Figura 16: Grafo  $G$  e sua matriz de incidência.



$$Y = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

## 5. Proposta didática

Os grafos são uma importante ferramenta matemática que permite modelar e resolver problemas em diversas áreas do conhecimento, como a informática, a engenharia, a biologia, entre outras. Mas que, apesar das suas diversas aplicações, é algo que ainda não faz parte do Currículo Escolar. Sendo assim, refletir sobre propostas de se trabalhar grafos na educação básica, em especial no Ensino Médio, é algo necessário, uma vez que esse conteúdo proporciona um desenvolvimento prático da matemática de maneira significativa.

Quando se trata do processo de ensino-aprendizagem na educação básica, há uma preocupação com o desenvolvimento de competências específicas da matemática como a utilização de estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos que possibilitem ao estudante interpretar situações em diversos contextos do seu cotidiano.

Desse modo, propor uma aplicação envolvendo grafos mostra-se bastante pertinente, uma vez que auxilia no aperfeiçoamento dessas competências. Dessa forma, apresentamos aqui a proposta didática de uma sequência de atividades para o ensino dos grafos no ensino médio, que busca despertar o interesse dos alunos e tornar o aprendizado mais significativo e divertido.

### • Objetivos:

– Objetivo Geral: Conhecer a utilidade da Teoria Matricial dos Grafos para solucionar problemas.

– Objetivos Específicos:

- i. Trabalhar as definições e operações com matrizes;
- ii. Conhecer as definições básicas de grafos;
- iii. Utilizar a Teoria Matricial dos Grafos para modelar e resolver problemas;
- iv. Desenvolver habilidades de análise e interpretação de dados.

• **Recomendação:** É recomendado aplicar esta atividade em turmas que já conheçam o conteúdo de Matrizes, para dar celeridade ao desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem.

### • Sequência de atividades:

#### 1. Introdução ao conceito de grafo:

Para introduzir o conceito de grafo, é possível começar com uma atividade prática e visual, que pode ser a construção de um grafo simples com objetos do cotidiano, como tampas de garrafa (para serem os vértices) e lápis colorido ou palitos (representando as arestas). Os alunos devem ser desafiados a conectar um determinado número de objetos de forma a criar um desenho, seguindo as seguintes regras básicas: não pode haver conexões cruzadas e todos os vértices devem estar conectados.

#### 2. Identificação de elementos do grafo:

Após a introdução, é importante apresentar aos alunos os principais elementos que compõem um grafo, como vértices, arestas, grau de um vértice e caminhos. Para isso, além dos elementos utilizados pelos alunos anteriormente para a construção do grafo, pode-se utilizar exemplos do cotidiano, como as possíveis rotas de metrô em uma cidade ou as relações em redes sociais.

#### 3. Classificação dos grafos:

Após a compreensão dos elementos que compõem um grafo é interessante que os alunos saibam os diferentes tipos de grafo, conheçam as matrizes de adjacência, incidência e a representação matricial e gráfica dos grafos, para isso sugere-se a apresentação de maneira expositiva dialogada que permita não só ao professor apresentar os conceitos, mas discutir com seus alunos características e propriedades essenciais.

#### 4. Modelagem para solucionar problemas com grafos:

Os grafos são uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas. Nesta etapa, os alunos devem ser desafiados a modelar pequenos problemas do cotidiano como as possíveis rotas de ônibus entre bairros, a melhor rota a ser seguida por ele tendo que passar por pontos específicos ou a organização de um torneio esportivo da escola. Para isso, o educador pode utilizar a aplicação de um exercício prático envolvendo uma situação do cotidiano onde ele pode usar apenas materiais simples como caderno, lápis e borracha, ou trazer como diferencial o uso do *software* Geogebra para construção do Grafo.

#### 5. Sugestão de exercício:

João, ao sair do trabalho, precisa passar no banco, na oficina, no supermercado, na farmácia e só então retornar para casa. Para não perder tempo, ele precisa então, planejar as melhores rotas. Para o problema, suponha seis pontos, por onde João deve passar e a seguinte matriz de adjacência, com as ligações diretas entre esses pontos:

$$X = \begin{matrix} & \begin{matrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & n_5 & n_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \\ n_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

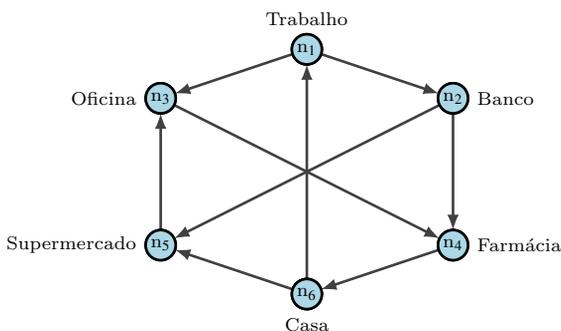
$n_1$	=	Trabalho de João
$n_2$	=	Banco
$n_3$	=	Oficina
$n_4$	=	Farmácia
$n_5$	=	Supermercado
$n_6$	=	Casa de João

Devemos então:

- a) Por meio de produto entre matrizes, determinar a primeira ligação que leva João do trabalho para o supermercado.
- b) Por meio de produto entre matrizes, determinar a primeira ligação que leva João do trabalho para casa.
- c) Representar graficamente o grafo da matriz X.

Ao final da aplicação do exercício, tendo os alunos a solução para o problema apresentado, é interessante discutir com a turma as estratégias utilizadas para se chegar às respostas. Além disso, baseando-se nos resultados obtidos e analisando o grafo construído, qual seria então, na opinião deles, a melhor rota a ser seguida por João para ir do trabalho a sua casa, passando antes em todos os pontos desejados por ele.

Figura 17: Grafo do exercício proposto.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O ensino dos grafos pode ser uma atividade divertida e desafiadora para os alunos do ensino médio. Ao utilizar exemplos do cotidiano e problemas reais, é possível despertar o interesse dos alunos e tornar o aprendizado mais significativo. Além disso, as habilidades desenvolvidas no estudo dos grafos são úteis em diversas áreas do conhecimento, tornando essa proposta didática ainda mais relevante.

## 6. Conclusão

A teoria matricial dos grafos é um campo da matemática que estuda a relação entre matrizes e grafos. Essa teoria é uma extensão natural da teoria de grafos, que é uma ferramenta amplamente utilizada em diversas áreas, como ciência da computação, engenharia, física, biologia, entre outras. No ensino médio, a teoria de grafos é frequentemente apresentada como uma maneira de representar relações entre objetos, como vértices e arestas, e estudar propriedades dessas relações, como a conectividade e a planaridade. A teoria matricial dos grafos acrescenta uma nova dimensão a essa abordagem, mostrando como as propriedades de um grafo podem ser descritas por meio de matrizes. A teoria matricial dos grafos é fundamental em diversas aplicações práticas, como no projeto de redes de computadores, na modelagem de sistemas elétricos e mecânicos, na análise de redes sociais, na criptografia, na teoria de jogos, entre outras. O estudo das matrizes que representam grafos permite entender e otimizar esses sistemas de maneira eficiente e precisa. Por fim, é importante ressaltar que a teoria matricial dos grafos é um campo em constante evolução e que suas aplicações estão se expandindo continuamente. É uma área emocionante e relevante, que oferece oportunidades para descobertas significativas e inovações em muitas áreas do conhecimento.

## Referências

- [1] ANTON, Howard; BUSBY, R. C. *Álgebra Linear Contemporânea*. Bookman Editora, 2006.
- [2] BOLDRINI, José Luiz *et al.* *Álgebra Linear*, 3ª edição. Harbra-Harper & Row do Brasil, São Paulo, 1984.
- [3] GOLDBARG, Marco; GOLDBARG, Elizabeth. *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier, 2012.
- [4] GONZÁLEZ, Eduardo Gutiérrez; OCHOA, Sandra. *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Ciudad de Mexico: Grupo Editorial Patria S. A., 2014.

- [5] HUNTER, David James. *Fundamentos da matemática discreta*. LTC, 2011.
- [6] JURKIEWICZ, Samuel. *Grafos – uma introdução*. São Paulo: Obmep, 2009.
- [7] KOLMAN, Bernard; HILL, David R. *Introdução À Álgebra Linear com Aplicações*. Grupo Gen-LTC, 2000.
- [8] LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc. *Matemática discreta-*: Coleção schaum. Bookman Editora, 2013.
- [9] SOUZA, Audemir Lima. *Teoria dos grafos e aplicações*. 2013.

Hugo Santos Nunes  
Instituto Federal de Alagoas  
<[hugo.nunes@ifal.edu.br](mailto:hugo.nunes@ifal.edu.br)>

Gisele Costa da Silva  
<[gcs5@aluno.ifal.edu.br](mailto:gcs5@aluno.ifal.edu.br)>  
Instituto Federal de Alagoas

Recebido: 29/06/2023

Publicado: 19/1/2024

# Ensino e aprendizagem de métodos numéricos para resolução de sistemas lineares utilizando a ferramenta Google Colaboratory

Valdex de J. Santos  Danton R. da Costa Pitombo  Marinilton J. O. Lima júnior   
Lucas R. de Souza Meira  Victor Bastos G. Moura 

## Resumo

Este artigo trata do ensino de métodos numéricos para resolução de sistemas lineares com o uso da ferramenta Google Colaboratory. A grande vantagem de utilizar tal ferramenta é a possibilidade de incorporar e executar códigos, assim como gerar gráficos em um ambiente de texto, inclusive utilizando linguagem Latex. Neste sentido, foi possível abordar os métodos numéricos e, ao mesmo tempo, implementar tais métodos para resolver sistemas lineares, executando-os e gerando gráficos interpretativos das soluções obtidas. São apresentados exemplos de como o Colaboratory pode ser utilizado para ensinar métodos numéricos para resolução de sistemas lineares, tais como: Método de Gauss, Gauss-Jordan, decomposição LU e métodos iterativos. Os resultados mostram que o uso do Colaboratory pode auxiliar a identificar erros e a entender melhor o comportamento dos algoritmos, possibilitando uma análise mais detalhada das soluções obtidas. Neste sentido, o Colaboratory é uma ferramenta útil para o ensino de métodos numéricos para resolução de sistemas lineares, possibilitando uma aprendizagem mais integradora entre desenvolvimento, implementação e interpretação de resultados.

**Palavras-chave:** Sistemas lineares; métodos numéricos; Google colaboratory; ensino.

## Abstract

This article deals with the teaching of numerical methods for solving linear systems using the Google Colaboratory tool. The great advantage of using this tool is the possibility of incorporating and executing codes, as well as generating graphics in a text environment, including using Latex language. In this sense, it was possible to address the numerical methods and, at the same time, implement such methods to solve linear systems, running them and generating interpretive graphics of the obtained solutions. Examples are presented of how Colaboratory can be used to teach numerical methods for solving linear systems, such as: Gauss Method, Gauss-Jordan, LU decomposition, and iterative methods. The results show that the use of Colaboratory can help identify errors and better understand the behavior of algorithms, enabling a more detailed analysis of the solutions obtained. In this sense, Colaboratory is a useful tool for teaching numerical methods for solving linear systems, enabling a more integrated learning between development, implementation, and interpretation of results.

**Keywords:** Linear systems; numerical methods; Google Colaboratory; teaching.

## 1. Introdução

Neste artigo, apresentamos de forma concisa o estudo desenvolvido pelos quatro últimos autores, sob orientação do primeiro, na disciplina de Cálculo Numérico. Foram apresentados cinco métodos para resolução de sistemas lineares de qualquer ordem, a saber: Gauss, Gauss-Jordan, Fatoração LU, Jacobi e Gauss-Seidel. Para isso, implementamos algoritmos utilizando o [Google Colaboratory](#), que se mostrou uma ferramenta útil para o desenvolvimento dos métodos numéricos, por dois motivos principais.

O primeiro motivo foi a laboriosidade de aferição em algoritmos puramente transcritos em ambientes não preparados para executá-los e/ou modificá-los, como a linguagem LaTeX. O segundo motivo foi a possibilidade de interação conjunta entre o algoritmo e a parte escrita em tempo real, o que permitiu a avaliação do comportamento do algoritmo quando submetido a diferentes parâmetros de entrada fundamentais, definidos pelo próprio usuário.

A utilização do ambiente Colabory foi feita durante as aulas de Cálculo Numérico, de maneira colaborativa entre estudantes e professor, visando melhorar a aprendizagem da disciplina. Neste sentido, fez-se um comparativo entre os métodos numéricos, de forma que os estudantes pudessem perceber as vantagens e desvantagens da utilização de cada um deles, conforme a necessidade do problema a ser resolvido.

Iniciamos com uma breve introdução aos conceitos fundamentais de equações e sistemas lineares. Em seguida, foram abordados cada um dos métodos numérico diretos: Gauss, Gauss-Jordan e Fatoração LU, apresentando exemplos resolvidos e algoritmos correspondentes. Também foram explorados os métodos iterativos, demonstrando sua aplicação com exemplos práticos e algoritmos editáveis.

Para avaliar a eficiência dos métodos de forma imparcial, geramos matrizes aleatórias. É relevante destacar que tanto os exemplos resolvidos quanto os códigos são apresentados de forma didática e editável, permitindo que qualquer usuário os personalize conforme sua necessidade.

O material produzido (link: <https://abre.ai/calcnunsistlinear>) é uma valiosa ferramenta para professores da Educação Básica que desejam experimentar esses métodos em suas aulas, proporcionando uma abordagem diferenciada. Eles podem facilmente copiar, reproduzir e adaptar o conteúdo de acordo com suas preferências e objetivos pedagógicos.

## 2. Sistemas lineares

Uma equação linear é uma expressão matemática na forma  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$ , onde  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  são números reais, coeficientes das variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , respectivamente, e  $b$  é um número real que corresponde ao termo independente. Quando  $b = 0$ , a equação é chamada de homogênea.

Um sistema linear é constituído por um conjunto de equações lineares com a forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{1}$$

Em um sistema linear, o conjunto solução é solução de todas as equações lineares do sistema. Em

outras palavras, o valor de  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  deve satisfazer simultaneamente todo o conjunto de equações do sistema.

## 2.1. Classificação de sistemas lineares

Os sistemas lineares são classificados de acordo com o número de soluções que possuem, sendo que existem três possibilidades:

**SPD** — Sistema Possível e Determinado — possui uma única solução.

**SPI** — Sistema Possível e Indeterminado — possui infinitas soluções.

**SI** — Sistema Impossível — não possui solução.

Na Figura 1 apresentamos uma ilustração da classificação dos sistemas lineares, conforme destacamos acima.

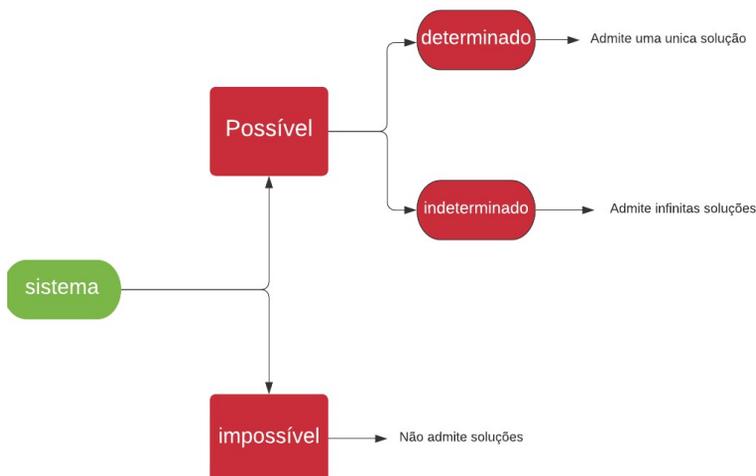


Figura 1: Ilustração da classificação de sistemas lineares

Fonte: Criado pelos autores na ferramenta <https://www.lucidchart.com>.

## 2.2. Matriz associada a um sistema linear

Podemos associar um sistema linear a uma matriz, de forma que seus coeficientes ocupem as linhas e colunas na matriz. Por exemplo, considerando o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 4x + 4y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

Podemos escrevê-lo na forma matricial como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_b$$

Onde  $A$  é a matriz de coeficientes,  $X$  é o vetor coluna das variáveis do sistema, e  $b$  é o vetor coluna dos termos independentes do sistema. Logo, podemos escrever o sistema como  $AX = b$ . Na matriz  $A$ , cada linha representa uma equação do sistema e cada coluna representa uma variável do sistema.

### 3. Solução numérica de sistemas lineares

Quando o número de equações e incógnitas é pequeno, é possível resolver sistemas lineares por técnicas simples. Entretanto, quando o número de equações é muito grande, a resolução manual do sistema torna-se um processo laborioso e, muitas vezes, impraticável. Nesse sentido, a computação e a utilização de métodos numéricos computacionais tornam-se de grande valia.

Este artigo apresenta cinco métodos para resolução de sistemas lineares de qualquer ordem: o método de Gauss, o método de Gauss-Jordan, o método de Fatoração LU, o método de Jacobi e o método de Gauss-Seidel.

#### 3.1. Método de Gauss

O Método de Gauss, também conhecido como escalonamento ou eliminação gaussiana, é uma técnica empregada para solucionar sistemas lineares, por meio da realização de operações elementares na matriz estendida do sistema. Esse processo visa transformá-la em uma matriz triangular superior, conhecida como *matriz escalonada do sistema*.

Uma vez alcançada a matriz escalonada, a solução pode ser facilmente encontrada por meio da substituição regressiva. É importante ressaltar que as operações elementares realizadas devem preservar a solução do sistema, e elas consistem em: multiplicar uma linha por uma constante não nula, substituir uma linha por ela mesma acrescida de um múltiplo de outra linha, ou permutar as linhas.

A seguir, será apresentado um exemplo de como aplicar o Método de Gauss para resolver um sistema linear:

#### Exemplo 1:

Resolva o sistema, por eliminação gaussiana:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + y - z &= 0 \\ 2x + 2y + z &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

**Solução:**

*Passo 1:* Consideramos a matriz estendida do sistema, dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*Passo 2:* Para zerar o elemento imediatamente inferior ao primeiro elemento da matriz, substitui-se a linha 2 pela diferença entre ela mesma e a linha 1 multiplicada por 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} l_2 \Leftrightarrow l_2 - 2l_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*Passo 3:* Substituímos a linha 3 pela subtração dela mesma com a linha 1 multiplicada por 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} l_3 \Leftrightarrow l_3 - 2l_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

*Passo 4:* multiplicamos as linhas 2 e 3 por  $-1$  de modo a deixar os valores da digonal principal positivos, obtendo assim:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz obtida é a matriz escalonada do sistema linear (2), escalonado pelo método de eliminação gaussiana. Para escrever esse sistema na forma de equações lineares, basta usar as linhas da matriz. E assim, temos:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ y + 3z &= 2 \\ z &= 1 \end{aligned} \tag{3}$$

Observe que a terceira equação já nos fornece o valor de  $z = 1$ . Podemos substituir esse valor nas equações anteriores e obter os valores de  $x$  e  $y$ . Fazendo isso, encontramos  $\{x = 1, y = -1, z = 1\}$ .

### 3.2. Método de Gauss com pivoteamento

Muitas vezes, o método de Gauss, embora seja tradicional e eficiente, apresenta um problema sistemático: ele não funciona bem quando os valores dos pivôs são próximos a zero, podendo até mesmo falhar completamente se o pivô for igual a zero ou muito próximo. Para solucionar esse problema, utilizamos o **Método de Gauss com Pivoteamento**.

Essa técnica é uma variação do método de Gauss que visa evitar erros numéricos que podem ocorrer durante a eliminação gaussiana padrão. O método consiste em escolher o elemento pivotante (ou pivô) - o valor absoluto máximo na coluna atual - antes de executar as operações elementares de linha.

O pivoteamento parcial ajuda a garantir que os elementos diagonais principais sejam sempre os maiores de suas respectivas colunas, reduzindo a possibilidade de erros numéricos.

A seguir, será ilustrado como resolver um sistema utilizando esse método, por meio de um exemplo.

**Exemplo 2:** Vamos resolver o sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + y - z &= 0 \\ 2x + 2y + z &= 1 \end{aligned} \tag{4}$$

por eliminação gaussiana com pivoteamento.

*Passo 1:* Consideramos a matriz estendida do sistema, dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*Passo 2:* Observamos que os maiores elementos em valor absoluto encontram-se nas linhas 2 e 3 (são iguais). Portanto, fazemos a permutação das linhas 1 e 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} l_1 \Leftrightarrow l_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*Passo 3:* Agora podemos realizar subtrações de linhas para zerar elementos da matriz. Primeiro, subtraímos da segunda linha a primeira linha multiplicada por 1/2, e depois subtraímos a terceira linha pela primeira multiplicada pelo número 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} l_2 \Leftrightarrow l_2 - \frac{1}{2}l_1 \text{ e } l_3 \Leftrightarrow l_3 - l_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

*Passo 4:* Como o maior elemento da segunda coluna está na terceira linha, fazemos a permutação das linhas 2 e 3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} l_3 \Leftrightarrow l_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

*Passo 5:* Subtraímos da terceira linha, a segunda multiplicada por 1/2 ( $l_3 = l_3 - \frac{1}{2}l_2$ ) para zerar o elemento da terceira linha e segunda coluna.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} l_3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}l_2 - l_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Após obtermos a matriz escalonada na forma escalonada reduzida, podemos usar o método de substituição regressiva para encontrar a solução do sistema. A última equação fornece-nos o valor de  $z = 1$ . Substituindo esse valor na segunda equação, encontramos que  $y + 2 \cdot 1 = 1$ , o que implica que  $y = -1$ . Finalmente, substituindo os valores de  $y$  e  $z$  na primeira equação, temos  $2x - 1 - 1 = 0$ , o que implica que  $x = 1$ . Portanto, a solução do sistema é  $\{x = 1, y = -1, z = 1\}$ .

### 3.2.1 Algoritmo de Gauss

Abaixo segue o algoritmo do Método de Gauss com pivoteamento parcial, implementado no Google Colabory.

```

%%writefile Gauss.m
function x = Gauss(A, b)
% Implementação do método de eliminação de Gauss para resolver sistemas
% lineares Ax = b.
% Verificação de pré-condição
[m, n] = size(A);
if m ~= n
    error('A matriz deve ser quadrada');
end
% Adicionando a coluna b à matriz A
Aug = [A, b];
% Inicializando vetor de solução x
x = zeros(n, 1);
% Eliminação gaussiana
for k = 1:n-1
    [~, i] = max(abs(Aug(k:n, k)));
    ipr = i + k - 1;
    if ipr ~= k
        Aug([k, ipr], :) = Aug([ipr, k], :);
    end
    for i = k+1:n
        pivor = Aug(i, k) / Aug(k, k);
        Aug(i, k:n+1) = Aug(i, k:n+1) - pivor*Aug(k, k:n+1);
    end
end
% Retrossubstituição
x(n) = Aug(n, n+1) / Aug(n, n);
for i = n-1:-1:1
    x(i) = (Aug(i, n+1) - Aug(i, i+1:n)*x(i+1:n)) / Aug(i, i);
end
end

```

### 3.3. Método de Gauss-Jordan

O Método de Gauss-Jordan é um procedimento para resolver sistemas de equações lineares por meio da aplicação de operações elementares nas linhas da matriz aumentada do sistema. Essas operações são executadas até que se obtenha uma matriz na forma diagonal, com elementos normalizados, que permita a fácil resolução do sistema. O vetor da última coluna da matriz diagonalizada corresponde à solução do sistema.

O método de Gauss-Jordan tem algumas vantagens em relação ao método de eliminação de Gauss, como a resolução direta de todas as variáveis, e pode ser utilizado para resolver sistemas lineares

com múltiplas soluções de maneira eficiente. Isso é possível porque, ao final do processo de eliminação, a matriz aumentada é transformada em uma matriz na forma escalonada reduzida por linhas, que permite identificar de maneira clara se o sistema possui soluções únicas, múltiplas ou nenhuma solução.

No entanto, o método de Gauss-Jordan pode ser computacionalmente mais custoso do que outros métodos, especialmente para matrizes grandes, devido ao seu maior número de operações aritméticas. Além disso, o pivoteamento parcial é geralmente necessário para evitar divisões por zero e garantir a estabilidade numérica do método, o que pode aumentar o custo computacional. Por esses motivos, o método de Gauss-Jordan é mais frequentemente utilizado em sistemas de tamanho moderado, em que as suas vantagens superam as suas desvantagens.

Para exemplificar o método, vamos considerar o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\2x + y + z &= 0 \\2x + 2y + z &= 1\end{aligned}$$

pelo método de Gauss-Jordan.

*Passo 1:* O primeiro passo é construir a matriz estendida do sistema, como segue:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 \\2 & 1 & 1 & 0 \\2 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

*Passo 2:* O segundo passo é isolar o pivô da primeira linha e zerar os demais elementos da mesma coluna. Para isso, substitui-se a linha 2 pela diferença da linha 2 pela linha 1 multiplicada por 2:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 \\2 & 1 & 1 & 0 \\2 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix} l_2 \Rightarrow l_2 - 2l_1 \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 \\0 & -1 & -1 & -2 \\2 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

*Passo 3:* O terceiro passo consiste em subtrair da linha 3 a linha 1 multiplicada por 2, obtendo-se o valor 0 para o último elemento da coluna 1. Zera-se também o último elemento da segunda coluna:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 \\0 & -1 & -1 & -2 \\2 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix} l_3 \Rightarrow l_3 - 2l_1 \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 \\0 & -1 & -1 & -2 \\0 & 0 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

*Passo 4:* No quarto passo, multiplica-se a linha 2 e a linha 3 por  $-1$ , para deixar os valores positivos:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 \\0 & 1 & 1 & 2 \\0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

*Passo 5:* No quinto passo, substitui-se a linha 1 pela diferença da própria linha 1 pela linha 2:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 \\0 & 1 & 1 & 2 \\0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix} l_1 \Rightarrow l_1 - l_2 \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1 \\0 & 1 & 1 & 2 \\0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

*Passo 6:* Por fim, substitui-se a linha 2 pela diferença da própria linha 2 pela linha 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} l_2 \Rightarrow l_2 - l_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz resultante é a matriz escalonada do sistema, com os elementos da diagonal principal da matriz dos coeficientes todos unitários. Por consequência, a solução do sistema corresponde ao vetor da última coluna da matriz. Ou seja, a solução do sistema é:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

### 3.3.1 Algoritmo de Gauss Jordan

```

%%writefile GaussJordan.m
function GaussJordan(A,b)
% Concatenando a matriz A e o vetor b em uma matriz aumentada
Aug = [A b];
% Obtendo o tamanho da matriz aumentada
[m,n] = size(Aug);
for i = 1:n-1
    % Encontrando o pivô
    [~,k] = max(abs(Aug(i:n-1,i)));
    ipr = i+k-1;
    if ipr ~= i
        % Trocando as linhas
        Aug([i,ipr],:) = Aug([ipr,i],:);
    end
    % Verificando se o pivô é zero
    if Aug(i,i) == 0
        error("0 pivô é zero, não é possível continuar a eliminação.");
    end
    % Normalizando a linha do pivô
    N = Aug(i,:);
    N = N/Aug(i,i);
    Aug(i,:) = N;
    % Subtraindo as outras linhas
    for j = 1:n-1
        if i ~= j
            Aug(j,:) = Aug(j,:) - N*Aug(j,i);
        end
    end
end
end
% Obtendo a solução
x = Aug(:,n);
% Imprimindo a solução
  
```

```

x= Aug(:,n)
end

```

### 3.4. Método de Fatoração LU

O método de Fatoração LU (Lower-Upper) é uma técnica utilizada para resolver sistemas de equações lineares que consiste em fatorar a matriz dos coeficientes  $A$  em duas matrizes: uma matriz triangular inferior  $L$  e uma matriz triangular superior  $U$ , para escrever  $A = LU$ . A fatoração da Matriz  $A$  nas matrizes  $L$  e  $U$  é explicada em livros de Cálculo Numérico, como feito por Lopes e Ruggiero[1].

Feita a fatoração, obtêm-se dois outros sistemas:  $Ly = b$ , triangular inferior, e  $Ux = y$ , triangular superior. Assim, o sistema de equações lineares  $Ax = b$  é resolvido em duas etapas: primeiro, o sistema  $Ly = b$  é resolvido para  $y$ , onde  $L$  é uma matriz triangular inferior, e depois o sistema  $Ux = y$  é resolvido para  $x$ , onde  $U$  é uma matriz triangular superior.

Uma das vantagens da fatoração LU é que, uma vez que as matrizes  $L$  e  $U$  foram calculadas, podemos resolver o mesmo sistema para diferentes vetores  $b$  com um custo computacional reduzido, pois os sistemas triangulares resultantes são mais simples de resolver do que o sistema original.

O método LU é amplamente utilizado em aplicações em engenharia, física, matemática, economia e outras áreas onde sistemas de equações lineares precisam ser resolvidos. Além disso, muitos algoritmos de métodos numéricos usam o método LU como uma etapa fundamental em seus cálculos.

Segue um exemplo passo a passo como transformar uma matriz  $A$  em uma matriz triangular inferior  $L$  e uma matriz triangular superior  $U$ . Para tanto, considere a matriz  $A$ , dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

*Passo 1:* A matriz  $L$  começa como matriz identidade, e a matriz  $U$  é obtida através da matriz  $A$  através da fatoração gaussiana, conforme explicado na Seção 3.1. Dessa forma, temos:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

*Passo 2:* Colocamos as duas matrizes como matriz estendida, dada por:

$$[L|U] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

*Passo 3:* Dividimos a primeira linha por 2:

$$[L|U] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

*Passo 4:* Multiplicamos a primeira linha por 4 e somamos a segunda linha, e a multiplicamos por 2 e somamos a terceira linha, obtendo:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

*Passo 5:* Dividimos a segunda linha por 4:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 1 & 1/4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

*Passo 6:* Multiplicamos a segunda linha  $-2$  e somamos a terceira.

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1/2 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array} \right]$$

Assim, obtemos as matrizes

$$L = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Assim, dado qualquer vetor coluna de termos independentes  $b$ , resolvemos o sistema  $Ly = b$ , obtendo os valores do vetor  $y$  e, em seguida, resolvemos o sistema  $Ux = y$ , obtendo a solução do sistema apresentado. Por exemplo, se tivermos o sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ -4x + 2y + 3z = 3 \\ -2x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

obteremos a solução:  $(x = 1/4, y = 7/2, z = -1)$ .

### 3.4.1 Algoritmo da Fatoração LU

O código abaixo mostra uma implementação feita no Google Colaboratory do método de fatoração LU:

```

function x = LU(A, b)
    [m, n] = size(A);
    if m ~= n
        error('A matriz deve ser quadrada');
    end
    % Pivoteamento:
    for j = 1:n
        [pivot_val, pivot_row] = max(abs(A(j:n, j)));
        pivot_row = pivot_row + j - 1;
    end

```

```

    if pivot_val == 0
        error('A matriz é singular');
    end
    if pivot_row ~= j
        A([j, pivot_row], :) = A([pivot_row, j], :);
        b([j, pivot_row]) = b([pivot_row, j]);
    end
end
end
% Fatoração LU:
L = eye(n);
for k = 1:n-1
    for i = k+1:n
        L(i, k) = A(i, k) / A(k, k);
        A(i, k+1:n) = A(i, k+1:n) - L(i, k) * A(k, k+1:n);
    end
end
U = triu(A);
% Solução do sistema:
y = zeros(n, 1);
for i = 1:n
    y(i) = (b(i) - L(i, 1:i-1) * y(1:i-1)) / L(i, i);
end
x = zeros(n, 1);
for i = n:-1:1
    x(i) = (y(i) - U(i, i+1:n) * x(i+1:n)) / U(i, i);
end
end
end

```

### 3.5. Métodos iterativos

Na área das ciências exatas computacionais, os métodos iterativos são amplamente aplicados para resolver problemas complexos sem soluções analíticas ou de difícil obtenção. Esses métodos permitem gerar seqüências de resultados aproximados que são refinados e aprimorados a cada iteração executada. Dentre esses, destacam-se os métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel.

Os métodos iterativos são particularmente valiosos na resolução de sistemas esparsos, onde os métodos diretos podem ser ineficazes, podendo estar sujeitos a erros de arredondamento. Como o erro nos métodos iterativos é controlado pelo número de iterações, os erros de arredondamento não são um motivo de preocupação.

Por exemplo, considere o sistema linear:

$$\begin{aligned}
 2x + 0y + 0z &= 4 \\
 0x + 3y + 0z &= 9 \\
 0x + 0y + 5z &= 10
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

que tem solução ( $x = 2, y = 3, z = 2$ ). Os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel resolvem esse sistema de forma eficaz, embora seja trivial nesse caso. No entanto, sua importância cresce em sistemas maiores com estrutura esparsa.

Neste exemplo, a matriz de coeficientes é diagonal, o que significa que a maioria dos elementos é zero, exceto os elementos na diagonal principal. Esse é um caso clássico em que os métodos diretos podem ser ineficientes, pois eles não se beneficiam da estrutura esparsa da matriz.

Por outro lado, os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel são altamente eficazes para sistemas esparsos. Eles exploram a estrutura da matriz, atualizando iterativamente as variáveis com base nas entradas não nulas, resultando em convergência mais rápida e economia de memória em comparação com métodos diretos. Portanto, esses métodos são adequados para resolver sistemas lineares esparsos, como o exemplo dado.

É importante salientar que, como não sabemos *a priori* a solução dos sistemas a serem resolvidos, precisamos calcular o erro relativo que, no caso dos métodos iterativos, pode ser expresso pela equação[2]:

$$|\varepsilon_{a,i}| = \left| \frac{x_i^j - x_i^{j-1}}{x_i^j} \right| 100\% < \varepsilon_s \quad (6)$$

para todo  $i$ , onde  $j$  e  $j - 1$  representam a iteração atual e a anterior.

### 3.5.1 Método de Jacobi

O método iterativo de Jacobi é utilizado para aproximar a solução de sistemas lineares representados por uma matriz  $A$  e um vetor  $b$  na forma  $AX = b$ , onde o objetivo é encontrar uma solução aproximada a partir de um chute inicial  $x^{(1)}$ .

Assim, dado o sistema linear,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= y_n \end{aligned} \quad (7)$$

o processo iterativo consiste em isolar cada elemento  $x_n$  da equação correspondente e utilizar os elementos da iteração atual  $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n-1}^{(k)}, x_{n+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$  para estimar a próxima iteração  $x_{n+1}$ . A fórmula para essa estimativa é dada por:

$$x_n^{(k+1)} = \frac{y_n - (a_{n1}x_1^{(k)} + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)})}{a_{nn}}$$

O processo iterativo é executado até se alcançar uma precisão desejada ou um número máximo de iterações. É importante ressaltar que a convergência do método de Jacobi depende da matriz  $A$  ser estritamente diagonal dominante ou simétrica definida positiva. Este método, conforme ressaltado anteriormente, é extremamente útil na resolução de sistemas esparsos.

### 3.5.2 Método de Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel é semelhante ao método de Jacobi, pois ambos utilizam manipulações algébricas para isolar os elementos do sistema em cada iteração. No entanto, o Método de Gauss-Seidel é mais rápido, pois utiliza o valor atualizado de  $x$  na mesma iteração para obter o próximo valor, proporcionando uma convergência mais rápida para a solução do sistema.

O algoritmo do Método de Gauss-Seidel envolve a resolução de um sistema triangular inferior para cada iteração e a atualização imediata dos valores de  $x$ . A partir de um chute inicial  $x^{(1)}$ , os elementos  $x_n^{(k)}$  são isolados para estimar a próxima iteração  $x_{n+1}$ . Dessa forma, o método é iterativo e refinado a cada iteração até que a solução desejada seja atingida.

**Exemplo:** Use o método de Gauss-Seidel para obter a solução do sistema:

$$3x_1 - 0,1x_2 - 0,2x_3 = 7,85 \quad (8)$$

$$0,1x_1 + 7x_2 - 0,3x_3 = -19,3 \quad (9)$$

$$0,3x_1 - 0,2x_2 + 10x_3 = 71,4 \quad (10)$$

*Passo 1:* Em cada uma das equações, isolamos a variável na diagonal:

$$x_1 = \frac{7,85 + 0,1x_2 + 0,2x_3}{3}$$

$$x_2 = \frac{-19,3 - 0,1x_1 + 0,3x_3}{7}$$

$$x_3 = \frac{71,4 - 0,3x_1 + 0,2x_2}{10}$$

*Passo 2:* Supondo-se que  $x_2$  e  $x_3$  sejam iguais a zero, a Equação (8) pode ser usada para calcular

$$x_1 = \frac{7,85 + 0 + 0}{3} = 2,616667$$

*Passo 3:* Esse valor, junto com o valor suposto de  $x_3 = 0$ , pode ser substituído na Equação (9) para calcular

$$x_2 = \frac{-19,3 - 0,1(2,616667) + 0}{7} = -2,794524$$

*Passo 4:* A primeira iteração é completada substituindo-se os valores calculados para  $x_1$  e  $x_2$  na Equação (10) para obter

$$x_3 = \frac{71,4 - 0,3(2,616667) + 0,2(-2,794524)}{10} = 7,005610$$

*Passo 5:* Para a segunda iteração, o mesmo processo é repetido para calcular

$$x_1 = \frac{7,85 + 0,1(-2,794524) + 0,2(7,005610)}{3} = 2,990557$$

$$x_2 = \frac{-19,3 - 0,1(2,990557) + 0,3(7,005610)}{7} = -2,499625$$

$$x_3 = \frac{71,4 - 0,3(2,990557) + 0,2(-2,499625)}{10} = 7,000291$$

O método está, portanto, convergindo para a verdadeira solução, uma vez que o erro relativo é pequeno. Iterações adicionais podem ser aplicadas para melhorar as respostas. Porém, em um problema real, a resposta verdadeira não seria conhecida *a priori*. Consequentemente, a Equação (6) fornece um meio de estimar o erro. Por exemplo, para  $x_1$ ,

$$|\varepsilon_{a,1}| = \left| \frac{2,990557 - 2,616667}{2,990557} \right| 100\% = 12,5\%$$

Para  $x_2$  e  $x_3$ , as estimativas de erro são  $|\varepsilon_{a,2}| = 11,8\%$  e  $|\varepsilon_{a,3}| = 0,076\%$ . Assim, quando elas são satisfeitas, garantem que o resultado é conhecido pelo menos dentro da tolerância especificada por  $\varepsilon_s$ . Tal processo iterativo pode continuar para diminuir mais o erro relativo e obter aproximações melhores.

No caso do método de Jacobi, utilizaríamos o valor original de  $x_1$  no passo 3 e não o valor atualizado no passo anterior. O mesmo procede-se para as demais variáveis. Nesse sentido o Método de Gauss-Seidel permite-nos encontrar soluções mais rápidas, dentro da aproximação aceitável.

Os algoritmos dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel estão disponíveis no arquivo projeto em: <https://abre.ai/calculuslinear>

#### 4. Ambiente Colaboratory (COLAB) nas Aulas de Cálculo Numérico

O Colaboratory (COLAB), que se encontra no *link* <https://colab.research.google.com/>, é uma plataforma em nuvem desenvolvida pelo Google que possibilita aos usuários escrever, executar e compartilhar códigos em linguagens como Python, R, Octave e MatLab. É amplamente adotado por estudantes, pesquisadores, cientistas de dados e desenvolvedores em todo o mundo, devido à sua eficiência e à capacidade de aprimorar a experiência de aprendizado e trabalho.

Entre as suas vantagens, destaca-se o acesso gratuito aos recursos de computação de alta qualidade oferecidos pelo Google, bem como a possibilidade de compartilhar *notebooks* e arquivos com outros usuários. Além disso, o COLAB integra-se perfeitamente com outras ferramentas do Google[3]. Sua utilização é facilitada por diversos recursos úteis, tais como autocompletar código, depuração interativa e visualizações interativas, o que a torna uma ferramenta poderosa e versátil.

Utilizamos a plataforma Colab no curso de Cálculo Numérico para a implementação colaborativa dos Métodos Numéricos destinados à resolução de sistemas lineares, envolvendo tanto alunos quanto o professor. Com isso, a ferramenta passou a ser uma parte rotineira das aulas, auxiliando na resolução de exemplos e na compreensão dos conceitos abordados na disciplina. Com o desenvolvimento colaborativo dos métodos, qualquer pessoa pode acessar e simular soluções para sistemas lineares diversos, simplesmente acessando o *link* do projeto no Google Colaboratory, disponível neste *link*.

Na Figura 2, apresentamos o método de Gauss implementado no ambiente Colaboratory para este artigo, permitindo modificar os parâmetros de entrada do algoritmo e observar o seu comportamento em relação a diferentes sistemas. Na Figura 3 ilustramos a execução do código para uma matriz de coeficientes  $10 \times 10$  gerada com números aleatórios e termos independentes gerados de forma similar. Dessa forma, é possível modificar os parâmetros de entrada do algoritmo e observar como ele se comporta em relação a diferentes sistemas.

#### 5. Comparações entre os métodos numéricos

Existem diversas abordagens em métodos numéricos para solução de sistemas lineares, cada uma com suas particularidades. Para escolher a melhor ferramenta para cada situação, é crucial realizar uma análise cuidadosa. É possível categorizar os métodos em duas principais vertentes: diretos e indiretos. Para fazer essa avaliação, é importante considerar aspectos como custo computacional, facilidade de implementação, garantia de convergência e complexidade. Assim, é possível identificar as vantagens e desvantagens de cada método e suas possíveis limitações, a fim de escolher o mais efetivo em cada situação.

```

%%writefile Gauss.m
function x = Gauss(A,b)
[m,n] = size(A);
if m~=n
    fprintf("Matriz deve ser quadrada\n")
endif
nb = n+1;
Aug = [A b];
for k = 1:n-1
    [~,i] = max(abs(Aug(k:n,k)));
    ipr = i +k-1;
    if ipr ~= k
        Aug([k,ipr],:) = Aug([ipr,k],:);
    endif
    for i = k+1:n
        pivot = Aug(i,k)/Aug(k,k);
        Aug(i,k:nb) = Aug(i,k:nb)-pivot*Aug(k,k:nb);
    endfor
endfor
x = zeros(n,1);
x(n) = Aug(n,nb)/Aug(n,n);
for i = n-1:-1:1
    x(i) = (Aug(i,nb)-Aug(i,i+1:n)*x(i+1:n))/Aug(i,i);
endfor
endfunction
  
```

Writing Gauss.m

Figura 2: Algoritmo de Gauss efetivado no COLAB

```

[6] %%writefile testem100_1_Gauss.m
A=randi(100,10,10);
b=randi(110,10,1);
Gauss(A,b)

Overwriting testem100_1_Gauss.m

# Solução de matriz 100x100 com o método de Gauss
!octave -W testem100_1_Gauss.m

ans =

    0.4021754
    0.8604504
   -0.3506931
    0.0116896
    0.9963863
    0.0041950
    0.6265070
   -1.4769818
   -0.4926100
    0.3207672
  
```

Figura 3: Formulação dos parâmetros de entrada

## 5.1. Métodos diretos

Os métodos numéricos de eliminação de Gauss, Gauss-Jordan e fatoração LU possuem semelhanças significativas, já que são métodos diretos que transformam o sistema em uma forma equivalente, mais simples de ser resolvida. No método de Gauss, o sistema é manipulado por operações básicas até se obter uma matriz triangular superior ou inferior, seguida de substituições regressivas para encontrar a solução.

No método de Gauss-Jordan, a matriz é manipulada até se obter um sistema equivalente na forma diagonal, com elementos normalizados, dispensando a necessidade de substituições regressivas para encontrar a solução do sistema.

Já na fatoração LU, a matriz A é fatorada em L (matriz triangular inferior) e U (matriz triangular superior), ou seja,  $A = LU$ . Para encontrar a solução de  $Ax = b$ , resolve-se primeiro o sistema

triangular inferior  $Ly = b$  e, em seguida, o sistema triangular superior  $Ux = y$ .

Todos os métodos requerem rotinas de pivoteamento para evitar problemas quando um dos elementos da diagonal principal for nulo. O pivoteamento consiste em fazer uma permutação de linhas para escolher o maior pivô em módulo em cada etapa.

Cláudio G. Canuto e Carlos E. Kenig, [4], afirmam que "os métodos diretos apresentam-se como a melhor escolha quando o problema é de dimensões reduzidas e dispõe-se de suficiente capacidade de armazenamento e processamento".

## 5.2. Métodos indiretos

Existem alternativas aos métodos diretos para solucionar sistemas lineares, como os métodos iterativos. Ao contrário dos métodos diretos, que fornecem soluções exatas, a solução obtida por meio dos métodos iterativos é uma aproximação que pode se aproximar da solução real conforme aumentamos o número de iterações. Os métodos iterativos são iniciados com uma estimativa preliminar para a solução e aprimoram a solução a cada iteração.

Dois exemplos de métodos iterativos são os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel. A principal diferença entre eles está no modo como os valores calculados são atualizados: no método de Jacobi, os valores das incógnitas são atualizados apenas após o fim de cada iteração, enquanto no método de Gauss-Seidel, o valor de cada incógnita é atualizado assim que uma nova estimativa é calculada.

Os métodos indiretos para solução de sistemas lineares apresentam características distintas e comparados aos métodos diretos. Por exemplo, enquanto os métodos diretos possuem convergência garantida por serem processos finitos, os métodos iterativos têm convergência assegurada apenas sob certas condições, portanto é importante avaliar essas condições antes de utilizar os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel.

"Os métodos iterativos, como o método de Gauss-Seidel, são mais adequados para sistemas grandes, pois seu tempo de cálculo é proporcional ao tamanho da matriz. No entanto, sua convergência pode ser lenta para sistemas mal condicionados" [5]. No entanto, podem ser usados mesmo quando a matriz é singular ou mal condicionada, enquanto os métodos diretos podem falhar nesses casos [1].

"Os métodos diretos são eficientes para sistemas relativamente pequenos, em que o custo computacional é justificável pela precisão. Para sistemas maiores e mais esparsos, os métodos iterativos geralmente são mais eficientes" [2].

Além disso, os métodos iterativos são menos suscetíveis ao acúmulo de erros de arredondamento que podem ocorrer em métodos diretos. Isso ocorre porque os erros de arredondamento são acumulados durante a aplicação das transformações elementares sobre as equações do sistema, o que não ocorre nos métodos iterativos, onde apenas a solução corrente é sujeita a erros.

## 5.3. Tempo de performance

Aqui, vamos avaliar o desempenho dos métodos apresentados e determinar qual se destaca em termos de tempo de execução.

Usando como exemplo o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
 4x + 3y + 2z &= 1 \\
 x + 5y + 7z &= 1 \\
 x + y + 2z &= 1
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Faremos um teste de desempenho usando esta matriz para comparar os métodos e analisar o tempo de execução de cada um. Para isso, usamos a ferramenta **MATLAB** com os comandos **Profile on** e **profile viewer** para monitorar a *performance*. O método de Jacobi não apresentou convergência para este exemplo, portanto, não faremos comparações de desempenho para tal método. A Figura 4 mostra a tabela de desempenho obtida:

Nome da função	Chamadas	Tempo Total	Tempo Próprio ↑	Gráfico de tempo total
<b>Gauss</b>	1	0.004	0.004	
<b>Gauss-Seidel</b>	1	0.005	0.005	
<b>Gauss-Jordan</b>	1	0.006	0.006	
<b>LU</b>	1	0.055	0.055	

Figura 4: Tempo de *performance* de cada método

Esta tabela mostra o tempo necessário para executar cada método no exemplo acima, o que é um bom indicador de comparação entre eles. Podemos notar que não houve diferenças significativas entre os métodos de Gauss e Gauss-Jordan, ambos apresentaram tempo de execução relativamente próximo. O método indireto de Gauss-Seidel apresentou tempo de processamento muito semelhante aos métodos diretos neste exemplo. No entanto, o método de decomposição LU exibiu o maior tempo de execução entre todos os métodos, sendo maior até do que a soma dos tempos de execução dos outros métodos.

#### 5.4. Tempo de Performance em relação ao tamanho da matriz

Será discutido agora o desempenho de diferentes métodos numéricos para a resolução de sistemas lineares de diferentes tamanhos. Embora o exemplo anteriormente apresentado seja de um sistema de três equações e três incógnitas, é comum trabalhar com sistemas maiores e, para comparar o tempo de execução entre os métodos, é necessário considerar o tamanho do sistema e como cada método comporta-se ao trabalhar com sistemas de ordens mais elevadas.

Utilizamos a mesma ferramenta anterior para encontrar o tempo de execução para monitoramento de desempenho e a função  $randi(iMAX, m, n)$  para gerar matrizes de tamanho  $m, n$ , onde  $m$  são as linhas e  $n$  as colunas da matriz, onde  $iMAX$  é o valor máximo que o número randômico gerado pode assumir.

A Figura 5 apresenta uma comparação entre cada método em relação ao tempo médio gasto para resolver sistemas de  $n$  equações. O gráfico permite verificar que, ao aumentar o tamanho da matriz, o tempo de execução para o método de Gauss-Jordan varia pouco em comparação a outros métodos, sendo este que resolve o sistema no menor tempo possível até a matriz de tamanho  $n = 200$

analisada. Isso se deve à diagonalização da matriz, que já fornece a solução sem necessidade de processos retroativos ou iterações indeterminadas.

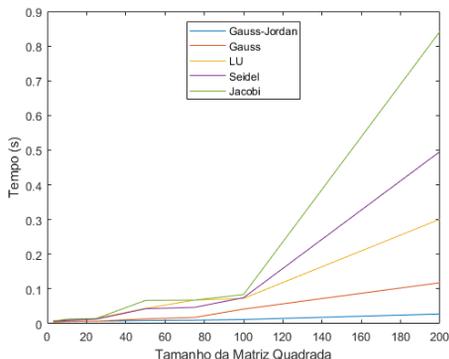


Figura 5: Tempo de *performance* de cada método em relação ao tamanho da matriz

Ao analisarmos o gráfico, é possível verificar quanto tempo, em média, cada método leva para solucionar um sistema de tamanho  $n$ , considerando  $n$  o tamanho da matriz quadrada. O método de Gauss-Jordan apresentou um desempenho superior em relação aos métodos indiretos, com o menor tempo de execução possível até a matriz de tamanho  $n = 200$  analisada, devido à diagonalização da matriz que já fornece a solução sem necessidade de processos retroativos ou iterações indeterminadas.

Para avaliar com precisão o tempo de desempenho em relação ao tamanho da matriz, utilizamos ferramentas computacionais capazes de cronometrar o tempo de execução de um algoritmo. No caso deste estudo, empregamos o *software* Matlab e seus comandos “tic” para iniciar a contagem do tempo, e “toc” para finalizá-la e obter o tempo decorrido.

No entanto, é importante lembrar que o tempo de *performance* pode ser influenciado por diversos fatores, tais como o *hardware* do computador utilizado, a implementação do algoritmo e a precisão da solução obtida. Portanto, é necessário interpretar os resultados obtidos com cautela, já que eles podem variar em diferentes situações.

## 6. Conclusão

Os métodos numéricos vistos até aqui são fundamentais para resolver problemas complexos em diversas áreas do conhecimento, como engenharia, física, finanças, entre outras. Ao analisar o desempenho desses métodos, é possível observar que cada um apresenta vantagens e desvantagens, dependendo do problema em questão.

No caso da solução de sistemas lineares, vimos que os métodos diretos, como a eliminação de Gauss e a decomposição LU, são mais eficientes para sistemas pequenos ou com pouca esparsidade. Já os métodos indiretos, como o método de Jacobi e Gauss-Seidel, são mais indicados para sistemas grandes e esparsos, além de serem mais simples de implementar. Por fim, o método de Gauss-Jordan destaca-se por ter o menor tempo de execução até para sistemas grandes.

É importante lembrar que a escolha do método mais adequado depende do contexto em que o problema insere-se, bem como dos recursos computacionais disponíveis e do nível de precisão re-

querido. Além disso, há outros fatores a considerar, como a estabilidade numérica e a possibilidade de utilização de técnicas de paralelização para acelerar a solução do problema.

Em resumo, a análise do desempenho dos métodos numéricos estudados permite-nos entender suas características e aplicabilidades, contribuindo para a escolha adequada do método em diferentes situações e para o desenvolvimento de soluções eficientes e precisas em problemas reais.

## Referências

- [1] Ruggiero, M. & Lopes, V. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. (Makron Books do Brasil,1997)
- [2] Chapra, S. & Canale, R. *Métodos Numéricos para Engenharia-7ª Edição*. (McGraw Hill Brasil,2016)
- [3] Bisong, Ekaba . *Building machine learning and deep learning models on google cloud platform: a comprehensive guide for beginners*. (Springer,2019)
- [4] Canuto, C. G., & Kenig, C. E. (2011). *Análise Numérica: uma introdução*. Rio de Janeiro: LTC.
- [5] Kincaid, D., & Cheney, W. (2002). *Análise Numérica*. LTC.

Valdex de J. Santos  
Instituto Federal da Bahia  
<[valdexsantos@ifba.edu.br](mailto:valdexsantos@ifba.edu.br)>

Danton R. da Costa Pitombo  
Instituto Federal da Bahia  
<[dantonpitombo2015.1@gmail.com](mailto:dantonpitombo2015.1@gmail.com)>

Marinilton J. O. Lima júnior  
Instituto Federal da Bahia  
<[marinilton77@gmail.com](mailto:marinilton77@gmail.com)>

Lucas R. de Souza Meira  
Instituto Federal da Bahia  
<[lukas.meira@gmail.com](mailto:lukas.meira@gmail.com)>

Victor Bastos G. Moura  
Instituto Federal da Bahia  
<[victor.moura@ifba.edu.br](mailto:victor.moura@ifba.edu.br)>

Recebido: 18/04/2023  
Publicado: 20/02/2024

# Uma fórmula curiosa para os números de Fibonacci

Eduardo Henrique de Mattos Brietzke 

## Resumo

Neste artigo apresentamos uma fórmula curiosa para os números de Fibonacci e de Lucas em termos das funções hiperbólicas. Essas fórmulas foram descobertas nos anos 80, mas aparentemente foram quase esquecidas. Mostramos também como elas nos permitem dar novas demonstrações para propriedades conhecidas das sequências de Fibonacci e Lucas. É bem conhecido que existe uma correspondência entre identidades trigonométricas e identidades com funções hiperbólicas. É nosso objetivo estender essa analogia, mostrando que existe uma correspondência entre identidades de funções hiperbólicas e identidades de números de Fibonacci e Lucas. Para desenvolver essas ideias, abordamos também uma identidade combinatória devida a Gould.

**Palavras-chave:** números de Fibonacci; números de Lucas; funções hiperbólicas; identidade de Gould.

## Abstract

In this article we present a curious formula for the Fibonacci and Lucas numbers in terms of hyperbolic functions. These formulas were discovered in the 1980s, but apparently have been almost forgotten. We also show how these formulas allow us to give new proofs for well known properties of the Fibonacci and Lucas sequences. It is well known that there is a correspondence between trigonometric identities and identities with hyperbolic functions. It is our aim to extend this analogy, showing that there is a correspondence between identities of hyperbolic functions and identities of Fibonacci and Lucas numbers. To develop these ideas, we also approach a combinatorial identity due to Gould.

**Keywords:** Fibonacci numbers; Lucas numbers; hyperbolic functions; identity of Gould.

## 1. Introdução

Nosso principal objetivo é o de apresentar uma expressão curiosa para os números de Fibonacci em termos de funções hiperbólicas

$$F_{2n+1} = \frac{2 \cosh \left( (2n+1) \ln \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \right)}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad F_{2n} = \frac{2 \sinh \left( 2n \ln \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \right)}{\sqrt{5}}, \quad (1)$$

bem como uma expressão similar para os números de Lucas. Vamos ver que essas fórmulas foram descobertas nos anos 80, mas foram praticamente esquecidas. Para ilustrar a utilidade dessas expressões, vamos usá-las para dar novas demonstrações de alguns fatos bem conhecidos sobre números de Fibonacci. Em particular, vamos dar uma nova demonstração para a propriedade que diz que  $F_m$  divide  $F_n$ , se  $m$  dividir  $n$ . Usualmente essa propriedade é provada por indução. Nós vamos exibir explicitamente  $F_m$  como um fator de  $F_n$ . Para fazer isso, mostraremos uma identidade combinatória devida a Gould.

## 2. Números de Fibonacci e funções hiperbólicas

A sequência de Fibonacci  $F_n$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) é definida por

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{e} \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall n \geq 2 \quad (2)$$

e começa por 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,  $\dots$ . Vamos precisar da Fórmula de Binet.

**Proposição 1** (Fórmula de Binet). *Para todo  $n \geq 0$  vale*

$$F_n = \frac{1}{2^n \sqrt{5}} \left[ (1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n \right]. \quad (3)$$

*Demonstração.* Definimos uma sequência  $(G_n)$  por

$$G_n = \frac{1}{2^n \sqrt{5}} \left[ (1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n \right].$$

Temos que provar que  $G_n = F_n$ , para todo  $n$ . Para isso, basta mostrar que a sequência  $(G_n)$  satisfaz a mesma recorrência (2) que a sequência de Fibonacci, ou seja, que

$$G_0 = 0, \quad G_1 = 1 \quad \text{e} \quad G_n = G_{n-1} + G_{n-2}, \quad \forall n \geq 2.$$

De fato, é trivial verificar que  $G_0 = 0$  e  $G_1 = 1$ . Além disso, chamando  $a = 1 + \sqrt{5}$  e  $b = 1 - \sqrt{5}$ , temos

$$G_n - G_{n-1} - G_{n-2} = \frac{1}{2^n \sqrt{5}} \left[ a^{n-2}(a^2 - 2a - 4) + b^{n-2}(b^2 - 2b - 4) \right], \quad \forall n \geq 2.$$

Mas,

$$a^2 - 2a - 4 = (1 + 2\sqrt{5} + 5) - 2(1 + \sqrt{5}) - 4 = 0$$

e também

$$b^2 - 2b - 4 = 0.$$

Logo  $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$ ,  $\forall n \geq 2$ . □

Usaremos as funções cosseno hiperbólico e seno hiperbólico, definidas por

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Existe uma semelhança muito grande entre as propriedades das funções trigonométricas e as das funções hiperbólicas, conforme ilustra a tabela abaixo.

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$	$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$	$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$	$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$
$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

Estas propriedades das funções hiperbólicas podem ser demonstradas facilmente a partir das definições dessas funções. Para ilustrar como se faz isso, vamos provar uma propriedade que usaremos bastante e que é a análoga da fórmula de De Moivre para funções trigonométricas

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx).$$

**Proposição 2.** Para qualquer  $x$  real e  $n \geq 0$  inteiro,

$$(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh(nx) + \sinh(nx). \quad (4)$$

*Demonstração.*

$$\cosh x + \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x.$$

Logo

$$(\cosh x + \sinh x)^n = (e^x)^n = e^{nx} = \cosh(nx) + \sinh(nx).$$

□

*Observação 1.* A explicação para o paralelismo entre as fórmulas para as funções trigonométricas e hiperbólicas é que, na verdade, essas funções são muito semelhantes, pelo fato de que

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{e} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Decorre disso que  $\cosh x = \cos(ix)$  e  $\sinh x = i \sin(ix)$ . Mas não vamos usar este fato.

A seguir, notamos que das definições das funções hiperbólicas segue diretamente que

$$\cosh(\ln x) = \frac{x + x^{-1}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh(\ln x) = \frac{x - x^{-1}}{2}, \quad \forall x > 0.$$

Substituindo  $x$  pelo número de ouro

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

e suas potências, temos

$$\cosh(n \ln \phi) = \frac{\phi^n + \phi^{-n}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh(n \ln \phi) = \frac{\phi^n - \phi^{-n}}{2}. \quad (5)$$

Em particular,

$$\cosh(\ln \phi) = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh(\ln \phi) = \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Portanto,

$$\frac{2 \cosh(\ln \phi^n)}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^n + \phi^{-n}}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2^n \sqrt{5}} \left[ (1+\sqrt{5})^n + (-1+\sqrt{5})^n \right]. \quad (7)$$

Comparando com a fórmula de Binet,

$$F_n = \frac{1}{2^n \sqrt{5}} \left[ (1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n \right],$$

chegamos às seguinte conclusões.

**Conclusão 1:** Se  $n$  for ímpar, então  $F_n = \frac{2 \cosh(n \ln \phi)}{\sqrt{5}}$ .

Analogamente,

$$\frac{2 \sinh(n \ln \phi)}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2^n \sqrt{5}} \left[ (1+\sqrt{5})^n - (-1+\sqrt{5})^n \right].$$

e, novamente comparando com a fórmula de Binet, obtemos o seguinte.

**Conclusão 2:** Se  $n$  for par, então  $F_n = \frac{2 \sinh(n \ln \phi)}{\sqrt{5}}$ .

Resumindo as conclusões acima, temos o seguinte resultado.

**Proposição 3.** Denotando por  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  o número de ouro, temos as seguintes expressões para os números de Fibonacci:

$$F_n = \begin{cases} \frac{2 \cosh(n \ln \phi)}{\sqrt{5}}, & \text{para } n \text{ ímpar,} \\ \frac{2 \sinh(n \ln \phi)}{\sqrt{5}}, & \text{para } n \text{ par.} \end{cases} \quad (8)$$

### 3. Números de Lucas e funções hiperbólicas

A sequência de Lucas é definida por  $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ , para  $n \geq 0$  (tomando  $F_{-1} = 1$ ), e inicia por

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \dots$$

Para os números de Lucas valem expressões similares a (1), que apresentamos a seguir.

**Proposição 4.** Denotando por  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  o número de ouro, temos a seguinte expressão para os números de Lucas:

$$L_n = \begin{cases} 2 \sinh(n \ln \phi), & \text{para } n \text{ ímpar,} \\ 2 \cosh(n \ln \phi), & \text{para } n \text{ par.} \end{cases} \quad (9)$$

*Demonstração.* Suponhamos que  $n$  seja par. Então,  $n + 1$  e  $n - 1$  são ímpares. Portanto, aplicando (8), temos

$$\begin{aligned} L_n &= F_{n+1} + F_{n-1} = \frac{\cosh((n+1) \ln \phi) + \cosh((n-1) \ln \phi)}{\sqrt{5}/2} \\ &= \frac{2 \cosh(n \ln \phi) \cosh(\ln \phi)}{\cosh(\ln \phi)} = 2 \cosh(n \ln \phi). \end{aligned}$$

O caso  $n$  ímpar é similar. □

#### 4. Aplicações das fórmulas para os números de Fibonacci e de Lucas

Vejamos agora como as expressões obtidas para os números de Fibonacci e de Lucas permitem obter novas demonstrações para propriedades bem conhecidas.

**Observação importante.** A cada identidade trigonométrica envolvendo senos e cossenos, está associada uma identidade envolvendo as funções hiperbólicas, e desta última resulta uma identidade envolvendo números de Fibonacci ou de Lucas. Por exemplo, consideremos a identidade  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ . A ela está associada a identidade

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Substituindo  $x = n \ln \phi$ , temos

$$\cosh^2(n \ln \phi) - \sinh^2(n \ln \phi) = 1. \quad (10)$$

Se  $n$  for ímpar, resulta

$$\frac{5F_n^2}{4} - \frac{L_n^2}{4} = 1,$$

ou seja,

$$F_n^2 = \frac{L_n^2 + 4}{5}, \quad \text{para } n \text{ ímpar.}$$

Se  $n$  for par, a mesma substituição  $x = n \ln \phi$  em (10) resulta em

$$\frac{L_n^2}{4} - \frac{5F_n^2}{4} = 1,$$

ou seja,

$$F_n^2 = \frac{L_n^2 - 4}{5}, \quad \text{para } n \text{ par.}$$

Reunindo essas duas igualdades em uma única, temos a seguinte identidade.

**Proposição 5.** Para todo  $n$  temos

$$F_n^2 = \frac{L_n^2 - 4(-1)^n}{5}. \quad (11)$$

A seguir vamos mostrar como da identidade  $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$ , que é o análogo para funções hiperbólicas da Fórmula de De Moivre  $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$ , resulta uma identidade de Fibonacci. Para isso, introduzimos primeiro uma notação. Para  $x \in \mathbb{R}$ , denotamos por  $\lfloor x \rfloor$  o maior inteiro  $n$  tal que  $n \leq x$ . Assim, por exemplo,  $\lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$ .

**Proposição 6** (Identities de Catalan). ([6], p. 192)

$$F_n = 2^{n-1} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 5^k,$$

$$L_n = 2^{n-1} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 5^k.$$

*Demonstração.* Por (4), temos que

$$(\cosh \phi + \sinh \phi)^n = \cosh(n\phi) + \sinh(n\phi).$$

Mas, por (6),

$$\cosh \phi + \sinh \phi = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}.$$

Então, qualquer que seja  $n$ , não importa se par ou ímpar, temos

$$\left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n = (\cosh \phi + \sinh \phi)^n = \cosh n\phi + \sinh n\phi = \frac{L_n + F_n \sqrt{5}}{2}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{L_n + F_n \sqrt{5}}{2} &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sqrt{5})^k \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 5^k + \frac{\sqrt{5}}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 5^k. \end{aligned}$$

Considerando dos dois lados da igualdade os termos com  $\sqrt{5}$  e os termos sem  $\sqrt{5}$ , segue o resultado. No último passo acima usamos que se  $a+b\sqrt{5} = c+d\sqrt{5}$ , com  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ , então  $\sqrt{5} = (a-c)/(d-b)$ , e, portanto,  $a = c$  e  $b = d$ , devido à irracionalidade de  $\sqrt{5}$ .  $\square$

A próxima identidade resulta das fórmulas para o cosseno hiperbólico e para o seno hiperbólico de uma soma.

**Proposição 7.** *Seja  $n \geq m$ .*

(i) *Se  $m$  for par, então  $F_{n+m} + F_{n-m} = F_n L_m$ .*

(ii) *Se  $m$  for ímpar, então  $F_{n+m} + F_{n-m} = L_n F_m$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $m$  seja par. Consideremos o caso  $n$  ímpar. Então,  $n + m$  e  $n - m$  são ambos ímpares. Portanto

$$F_{n+m} = \frac{2 \cosh((n+m) \ln \phi)}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad F_{n-m} = \frac{2 \cosh((n-m) \ln \phi)}{\sqrt{5}}.$$

Então, utilizando as fórmulas dadas na tabela no início,

$$F_{n+m} + F_{n-m} = \frac{4 \cosh(n \ln \phi) \cosh(m \ln \phi)}{\sqrt{5}}.$$

Como  $n$  é ímpar e  $m$  é par, temos

$$F_n = \frac{2 \cosh(n \ln \phi)}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad L_m = 2 \cosh(m \ln \phi).$$

Logo  $F_{n+m} + F_{n-m} = F_n L_m$ .

Os outros casos são análogos. □

**Corolário 1.** *Para qualquer  $n \geq 0$ ,  $F_{2n} = L_n F_n$ .*

*Observação 2.* A partir da definição é imediato verificar que

$$\sinh(-x) = -\sinh x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

isto é, o seno hiperbólico é uma função ímpar. Combinando este fato com (4), temos que

$$\cosh(nx) + \sinh(nx) = (\cosh x + \sinh x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cosh^{n-k} x \cdot \sinh^k x. \quad (12)$$

e

$$\cosh(nx) - \sinh(nx) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \cosh^{n-k} x \cdot \sinh^k x. \quad (13)$$

Somando (12) e (13), obtemos

$$\cosh(nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \cosh^{n-2k} x \cdot \sinh^{2k} x. \quad (14)$$

Subtraindo (13) e (12), temos

$$\sinh(nx) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \cosh^{n-2k-1} x \cdot \sinh^{2k+1} x. \quad (15)$$

**Proposição 8.** Para quaisquer  $m$  e  $n$  naturais,

$$F_{nm} = F_m \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} L_m^{n-1-2k} (L_m^2 - 4(-1)^m)^k, \quad (16)$$

*Demonstração.* Começamos com o caso  $m$  par. Temos que  $n \cdot m$  também é par e, por (15),

$$\begin{aligned} F_{nm} &= \frac{2 \sinh(nm \ln \phi)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \cosh^{n-1-2k}(m \ln \phi) \cdot \sinh^{2k+1}(m \ln \phi) \\ &= \frac{2 \sinh(m \ln \phi)}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \cosh^{n-1-2k}(m \ln \phi) \cdot (\cosh^2(m \ln \phi) - 1)^k \\ &= F_m \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \left(\frac{L_m}{2}\right)^{n-1-2k} \left(\frac{L_m^2}{4} - 1\right)^k \\ &= F_m \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} (L_m^2 - 4)^k L_m^{n-1-2k}. \end{aligned}$$

Dividimos o caso  $m$  ímpar em dois subcasos, conforme a paridade de  $n$ . Supondo  $m$  e  $n$  ímpares, temos  $n \cdot m$  ímpar e

$$\begin{aligned} F_{nm} &= \frac{2 \cosh(nm \ln \phi)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \cosh^{n-2k}(m \ln \phi) \cdot \sinh^{2k}(m \ln \phi) \\ &= \frac{2 \cosh(m \ln \phi)}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k} \cosh^{n-1-2k}(m \ln \phi) \cdot (\cosh^2(m \ln \phi) - 1)^k. \end{aligned}$$

Como  $n$  é ímpar, podemos chamar  $n - 1 - 2k = 2j$ . Ficamos com

$$F_{nm} = F_m \cdot \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{n-1-2j} \cosh^{2j}(m \ln \phi) \cdot \sinh^{n-1-2j}(m \ln \phi).$$

Usando combinações complementares, temos

$$\begin{aligned} F_{nm} &= F_m \cdot \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2j+1} \cosh^{2j}(m \ln \phi) \cdot \sinh^{n-1-2j}(m \ln \phi) \\ &= F_m \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} (\sinh^2(m \ln \phi) + 1)^j \cdot \sinh^{n-1-2j}(m \ln \phi). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 F_{nm} &= F_m \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} \left( \frac{L_m^2}{4} + 1 \right)^j \left( \frac{L_m}{2} \right)^{n-1-2j} \\
 &= F_m \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} (L_m^2 + 4)^j L_m^{n-1-2j}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, consideramos o caso  $m$  ímpar e  $n$  par. Temos que  $n \cdot m$  é par e

$$\begin{aligned}
 F_{nm} &= \frac{2 \sinh(nm \ln \phi)}{\sqrt{5}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \cosh^{n-1-2k}(m \ln \phi) \cdot \sinh^{2k+1}(m \ln \phi) \\
 &= \frac{2 \cosh(m \ln \phi)}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \cosh^{n-2-2k}(m \ln \phi) \cdot \sinh^{2k+1}(m \ln \phi) \\
 &= F_m \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \left( \frac{L_m^2}{4} + 1 \right)^{\frac{n-2-2k}{2}} \left( \frac{L_m}{2} \right)^{2k+1} \\
 &= F_m \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} (L_m^2 + 4)^{\frac{n-2-2k}{2}} L_m^{2k+1}.
 \end{aligned}$$

Fazendo  $j = \frac{n-2-2k}{2}$ , temos

$$F_{nm} = F_m \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n}{n-1-2j} (L_m^2 + 4)^j L_m^{n-1-2j}.$$

Tomando combinação complementar,

$$F_{nm} = F_m \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} (L_m^2 + 4)^j L_m^{n-1-2j}.$$

Assim, em todos os casos, obtemos a mesma expressão (16). □

*Observação 3.* A referência básica sobre a relação entre identidades de funções de hiperbólicas e identidades de Fibonacci é o artigo [4] de E. Ehrhardt, de 1983, onde, em particular, são apresentadas as expressões (8) e (9) para as seqüências de Fibonacci e de Lucas. Esse artigo foi publicado na revista *The Fibonacci Quarterly*, que é a principal publicação sobre números de Fibonacci e questões relacionadas. No entanto, aparentemente o assunto ficou soterrado debaixo de uma torrente de outras informações, tanto que retornou depois de duas décadas, sem fazer referência ao trabalho de Ehrhardt. Em 2005 Richard Askey, em [1], encontrou a expressão

$$F_n = \frac{2}{i^n \sqrt{5}} \sinh(n \log(i\phi)), \quad \text{onde} \quad \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

que é muito semelhante a (1). Acreditamos que (1) seja mais elementar, pois evita o uso de logaritmos de números complexos, que inclusive não são unicamente definidos.

Em 2007 (ver [8]), a fórmula de Askey foi usada para dar uma nova demonstração de que, se  $m$  divide  $n$ , então  $F_m$  divide  $F_n$ . Mas, novamente, foi uma demonstração por indução sem obter explicitamente  $F_m$  como um fator de  $F_n$ .

Em 2003 (ver [2]) uma expressão similar foi obtida

$$F_n = i^{n-1} \frac{\text{sen} \left( n \arccos \left( -\frac{i}{2} \right) \right)}{\text{sen} \left( \arccos \left( -\frac{i}{2} \right) \right)} \quad \text{e} \quad L_n = 2i^n \cos \left( n \arccos \left( -\frac{i}{2} \right) \right).$$

Um método para a obtenção para as seqüências de Fibonacci e Lucas dessas expressões envolvendo funções trigonométricas de argumentos complexos está explicado na dissertação de Mestrado [11] do aluno Bruno Astrolino e Silva e nas referências contidas nela.

Um outro indício de que a relação entre identidades de funções hiperbólicas e identidades de Fibonacci foi praticamente esquecida é que o assunto não é mencionado em [7], que é uma referência bem completa e atual sobre números de Fibonacci.

## 5. Uma identidade combinatória de Gould

Nossa principal aplicação da representação dos números de Fibonacci e de Lucas em termo das funções hiperbólicas vai ser à propriedade de divisibilidade da seqüência de Fibonacci. Vamos obter  $F_m$  explicitamente como um fator de  $F_n$  quando  $m$  divide  $n$ . Para isso, vamos precisar da seguinte identidade combinatória de Gould. É muito interessante observar como duas ideias bem diferentes juntam-se para resolver um problema matemático.

**Teorema 1.** ([5]) Para quaisquer inteiros  $n$  e  $j$  com  $0 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ,

$$\sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} \binom{k}{j} = 2^{n-2j} \binom{n-j}{j}. \quad (17)$$

A identidade (17) não aparece na literatura com muita frequência. Entre outros lugares, ela aparece no artigo [5] de H. W. Gould, de 1972, e também numa lista de fórmulas do Prof. Gould in 7 volumes, editadas e publicadas online pela Professora Jocelyn Quaintance. A identidade (17) e também a identidade (22) do Corolário 2 abaixo estão em [9], que é o volume 6. Esta é uma coleção enorme de fórmulas sem demonstrações.

Para provar o Teorema 1, precisamos de algumas coisas ainda.

**Definição 1.** Uma função  $f$  de duas variáveis é *simétrica* se  $f(x, y) = f(y, x)$  para todo  $(x, y)$ .

Dados  $\alpha$  e  $\beta$  reais ou complexos, definimos

$$p = \alpha + \beta \quad \text{e} \quad q = \alpha\beta.$$

Note que  $p$  e  $q$  são funções simétricas de  $(\alpha, \beta)$ . Para  $n$  natural,

$$\alpha^n + \beta^n \quad \text{e} \quad \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$$

são funções simétricas polinomiais de  $(\alpha, \beta)$  e, portanto, podem ser expressas como polinômios em  $(p, q)$  (ver [3], cáp. XXVII, p. 201). É fácil calcular,

$n$	$\alpha^n + \beta^n$	$(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})/(\alpha - \beta)$
0	2	1
1	$p$	$p$
2	$p^2 - 2q$	$p^2 - q$
3	$p^3 - 3pq$	$p^3 - 2pq$
4	$p^4 - 4p^2q + 2q^2$	$p^4 - 3p^2q + q^2$
5	$p^5 - 5p^3q + 5pq^2$	$p^5 - 4p^3q + 3pq^2$
6	$p^6 - 6p^4q + 9p^2q^2 - 2q^3$	$p^6 - 5p^4q + 6p^2q^2 - q^3$
7	$p^7 - 7p^5q + 14p^3q^2 - 7pq^3$	$p^7 - 6p^5q + 10p^3q^2 - 4pq^3$

Na coluna do meio, as condições iniciais são  $\alpha^0 + \beta^0 = 2$  e  $\alpha^1 + \beta^1 = p$ . Na coluna da direita as condições iniciais são  $(\alpha^1 - \beta^1)/(\alpha - \beta) = 1$  e  $(\alpha^2 - \beta^2)/(\alpha - \beta) = p$ . Mas em ambas as colunas cada termo é igual a  $p$  vezes o termo um passo acima menos  $q$  vezes o termo dois passos acima. De fato, é imediato verificar que

$$\alpha^n + \beta^n = p(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) - q(\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}) \tag{18}$$

e

$$\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = p \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} - q \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}. \tag{19}$$

Usando essa recorrência podemos facilmente estender a tabela.

Focando na coluna da direita da tabela e considerando só os coeficientes, sem os sinais, construímos o triângulo de números começando com

1				
1				
1	1			
1	2			
1	3	1		
1	4	3		
1	5	6	1	
1	6	10	4	

Note que se movermos a segunda coluna do triângulo um passo para cima, a terceira coluna dois passos para cima, a quarta coluna três passos para cima, e assim por diante, vamos obter o triângulo de Pascal. Por esta razão, a  $n$ -ésima linha do triângulo acima é

$$\binom{n}{0}, \binom{n-1}{1}, \binom{n-2}{2}, \dots, \binom{n-k}{k}, \dots$$

Tal ideia é formalizada no próximo resultado.

**Proposição 9.** ([3], p. 203) *Dados  $\alpha$  e  $\beta$  números reais ou complexos e  $n \geq 0$  inteiro, pondo  $p = \alpha + \beta$  e  $q = \alpha\beta$ , temos*

$$\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n-j}{j} p^{n-2j} q^j. \quad (20)$$

*Demonstração.* Vamos usar a forma forte do Princípio de Indução. Suponhamos que, para um determinado  $n$ , valha que, para todo  $m < n$ ,

$$\frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha - \beta} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{m-j}{j} p^{m-2j} q^j.$$

Pela recorrência (19) e usando a hipótese de indução para  $m = n - 1$  e para  $m = n - 2$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} &= p \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} - q \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \\ &= p \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n-1-j}{j} p^{n-1-2j} q^j - q \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n-2-j}{j} p^{n-2-2j} q^j. \end{aligned}$$

Na igualdade acima não precisamos nos preocupar com os limites superiores dos somatórios, pois a partir de um certo  $j$  os coeficientes binomiais se anulam. Então, podemos até considerar os somatórios como sendo para todos os  $j \geq 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} &= \sum_{j \geq 0} (-1)^j \binom{n-1-j}{j} p^{n-2j} q^j - \sum_{j \geq 0} (-1)^j \binom{n-2-j}{j} p^{n-2-2j} q^{j+1} \\ &= \sum_{j \geq 0} (-1)^j \binom{n-1-j}{j} p^{n-2j} q^j + \sum_{j \geq 1} (-1)^j \binom{n-1-j}{j-1} p^{n-2j} q^j. \end{aligned}$$

Na última igualdade acima, no segundo somatório foi feita a substituição de  $j$  por  $j - 1$ . A seguir, juntamos os dois somatórios, usando que, pela Relação de Stifel,

$$\binom{n-1-j}{j} + \binom{n-1-j}{j-1} = \binom{n-j}{j}.$$

Para ser bem precisos, destacamos o primeiro termo do primeiro somatório, para que os dois somatórios passem a ser com  $j \geq 1$ , e assim possam ser juntados. Obtemos

$$\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = \binom{n-1}{0} p^n + \sum_{j \geq 1} (-1)^j \binom{n-j}{j} p^{n-2j} q^j.$$

Como

$$\binom{n-1}{0} = 1 = \binom{n}{0},$$

segue que

$$\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = \sum_{j \geq 0} (-1)^j \binom{n-j}{j} p^{n-2j} q^j,$$

provando que, se valer para todo  $m < n$ , então também vale para  $n$ . Isso conclui a indução.  $\square$

*Demonstração do Teorema 1.* Aplicamos (20) com  $\alpha = 1 + \sqrt{x}$  e  $\beta = 1 - \sqrt{x}$ . Neste caso  $p = \alpha + \beta = 2$  e  $q = \alpha\beta = 1 - x$ . Temos, então,

$$\frac{(1 + \sqrt{x})^{n+1} - (1 - \sqrt{x})^{n+1}}{2\sqrt{x}} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} 2^{n-2k} (1-x)^k.$$

Por outro lado, aplicando o Teorema Binomial,

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \sqrt{x})^{n+1} - (1 - \sqrt{x})^{n+1}}{2\sqrt{x}} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (\sqrt{x})^k - \frac{1}{2\sqrt{x}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k (\sqrt{x})^k \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2j+1} x^j. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2j+1} x^j = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n-j}{j} 2^{n-2j} (1-x)^j.$$

A seguir, substituindo  $x$  por  $1 - x$ , obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n-j}{j} 2^{n-2j} x^j &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2j+1} (1-x)^j \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{r=0}^j \binom{n+1}{2j+1} \binom{j}{r} (-1)^r x^r \\ &= \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{j=r}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^r \binom{n+1}{2j+1} \binom{j}{r} x^r. \end{aligned}$$

No lado direito da igualdade acima, substituímos primeiro  $j$  por  $k$  e depois  $r$  por  $j$ ; segue que

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n-j}{j} 2^{n-2j} x^j = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n+1}{2k+1} \binom{k}{j} x^j.$$

Comparando o coeficiente de  $x^j$  dos lados da igualdade, segue (17).  $\square$

**Exemplo 1.** Vejamos três aplicações da identidade (17) do Teorema 1. Tomando  $j = 0$  em (17), reobtemos a bem conhecida expressão

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} = 2^n.$$

Tomando  $j = 1$  em (17), temos

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} k = 2^{n-2} (n-1).$$

Para qualquer  $n \geq 0$ ,

$$\sum_{k=0}^n \binom{4n+1}{2n-2k} \binom{n+k}{k} = 2^{2n} \binom{3n}{n}. \quad (21)$$

De fato, substituindo  $n$  por  $4n$  em (17), obtemos

$$\sum_{k=j}^{2n} \binom{4n+1}{2k+1} \binom{k}{j} = 2^{4n-2j} \binom{4n-j}{j}.$$

Tomando combinações complementares, temos

$$\sum_{k=j}^{2n} \binom{4n+1}{4n-2k} \binom{k}{k-j} = 2^{4n-2j} \binom{4n-j}{j}.$$

Substituindo  $k$  por  $k+j$ ,

$$\sum_{k=0}^{2n-j} \binom{4n+1}{4n-2k-2j} \binom{k+k}{k} = 2^{4n-2j} \binom{4n-j}{j}.$$

Em particular, para  $j = n$ , temos (21).

Usando o Teorema 1, provamos uma identidade companheira para (17).

**Proposição 10.** ([5]) Para quaisquer inteiros  $n$  e  $j$  com  $0 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ,

$$\sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \binom{k}{j} = 2^{n-1-2j} \cdot \frac{n}{n-j} \binom{n-j}{j}. \quad (22)$$

*Demonstração.* Como

$$\binom{n+1}{2k+1} = \binom{n}{2k} + \binom{n}{2k+1},$$

temos

$$\sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \binom{k}{j} = \sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left[ \binom{n+1}{2k+1} - \binom{n}{2k+1} \right] \binom{k}{j}.$$

Por (17),

$$\sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} \binom{k}{j} = 2^{n-2j} \binom{n-j}{j}$$

e

$$\sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \binom{k}{j} = 2^{n-1-2j} \binom{n-1-j}{j}.$$

Portanto,

$$\sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \binom{k}{j} = 2^{n-1-2j} \cdot \left[ 2 \binom{n-j}{j} - \binom{n-1-j}{j} \right].$$

Mas,

$$\binom{n-1-j}{j} = \frac{(n-1-j)!}{j!(n-1-2j)!} = \frac{n-2j}{n-j} \cdot \frac{(n-j)!}{j!(n-2j)!} = \frac{n-2j}{n-j} \binom{n-j}{j}.$$

Segue que

$$\sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \binom{k}{j} = 2^{n-1-2j} \cdot \left[ 2 - \frac{n-2j}{n-j} \right] \cdot \binom{n-j}{j},$$

provando (22). □

*Observação 4.* O lado direito da identidade (17)

$$2^{n-2j} \binom{n-j}{j}$$

tem uma interpretação combinatória como o número de ladrilhamentos de um retângulo  $1 \times n$  usando  $j$  dominós (retângulos  $1 \times 2$ ) brancos e  $n-2j$  quadrados  $1 \times 1$  azuis ou vermelhos. De fato, se quisermos contar de quantas maneiras é possível ladrilhar um tabuleiro  $1 \times n$  com  $j$  dominós e com quadrados, em primeiro lugar, note que precisaremos usar  $n-2j$  quadrados, pois a soma dos comprimentos dos  $j$  dominós vale  $2j$ . Para efeitos de contagem, podemos colapsar os dominós, transformando-os em quadrados. Ficamos com um tabuleiro de  $n-j$  casas, das quais devemos escolher  $j$  casas para cobrir com dominós colapsados, o que nos dá  $\binom{n-j}{j}$  possibilidades. Este é o número de maneiras de ladrilhar um tabuleiro  $1 \times n$  com  $j$  dominós e  $n-2j$  quadrados. Agora, se vamos permitir que os  $n-2j$  quadrados possam ser de duas cores, vamos ter que multiplicar o coeficiente binomial  $\binom{n-j}{j}$  por  $2^{n-2j}$ . M. Shattuck mostrou em [10] que o lado esquerdo da identidade (17) corresponde a contar, por outro método, os mesmos ladrilhamentos, dando assim uma demonstração combinatória dessa identidade, sem fazer cálculos.

## 6. Aplicação à propriedade de divisibilidade da sequência de Fibonacci

Uma sequência de inteiros  $(a_n)_{n \geq 1}$  é dita uma *sequência de divisibilidade* se  $m \mid n$  implicar  $a_m \mid a_n$ . Decorre do teorema a seguir que os números de Fibonacci formam uma sequência de divisibilidade.

**Teorema 2.** Para quaisquer  $m, n \geq 0$ ,

$$F_{nm} = F_m \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-k}{k} L_m^{n-1-2k}, \quad \text{se } m \text{ for ímpar,} \quad (23)$$

e

$$F_{nm} = F_m \cdot \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-1-k}{k} L_m^{n-1-2k}, \quad \text{se } m \text{ for par.} \quad (24)$$

*Demonstração.* Por (16),

$$F_{nm} = F_m \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} (L_m^2 - 4(-1)^m)^k L_m^{n-1-2k}.$$

Vamos analisar o polinômio

$$P(x) := \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} (x^2 - 4(-1)^m)^k x^{n-1-2k}.$$

Aplicando o Teorema Binomial, temos

$$P(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^k \binom{n}{2k+1} \binom{k}{j} x^{2(k-j)} 4^j (-1)^{(m+1)j} x^{n-1-2k}.$$

Trocando a ordem dos somatórios, obtemos

$$P(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{k=j}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \binom{k}{j} 4^j (-1)^{(m+1)j} x^{n-1-2j}.$$

Aplicando (17) do Teorema 1, obtemos

$$P(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-j}{j} (-1)^{(m+1)j} x^{n-1-2j},$$

provando o teorema. □

*Observação 5.* É um fato bem conhecido que os números de Fibonacci formam uma sequência de divisibilidade, isto é, se  $m$  divide  $n$ , então  $F_m$  divide  $F_n$ . No entanto, tanto quanto sabemos, na literatura isto é sempre provado por indução, sem dar explicitamente uma expressão para o quociente  $F_n/F_m$ . No Teorema 2, mostramos que

$$F_{nm} = F_m \cdot F_n(L_m), \quad \text{se } m \text{ é ímpar}$$

e

$$F_{nm} = F_m \cdot \tilde{F}_n(L_m), \quad \text{se } m \text{ é par,}$$

onde  $F_n(x)$  é o polinômio de Fibonacci

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-k}{k} x^{n-1-2k},$$

cujos coeficientes são uma diagonal do triângulo de Pascal, e  $\tilde{F}_n(x)$  é o polinômio de Fibonacci modificado

$$\tilde{F}_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-1-k}{k} x^{n-1-2k}.$$

### Agradecimentos

Agradeço ao Prof. James Sellers pela indicação da referência [4]. Agradeço ao (à) parecerista pelos comentários que resultaram na melhora da redação deste artigo e pela indicação da referência [10].

### Referências

- [1] R. Askey – Fibonacci and Lucas Numbers. *Mathematics Teacher* 98 (2005), 610-614.
- [2] N. D. Cahill, J. R. D’Errico, and J. P. Spence – Complex factorizations of the Fibonacci and Lucas numbers. *Fibonacci Quarterly* 41 (2003), 13-19.
- [3] G. Chrystal – *Algebra, an Elementary Text-Book*, vol 2, 7th ed, AMS Chelsea Publishing, 1889, reprint 1999 AMS.
- [4] E. Ehrhardt – Associated hyperbolic and Fibonacci identities. *The Fibonacci Quarterly* (1983), 87-96.
- [5] H. W. Gould – The Case of the strange binomial identities of Professor Moriarty. *The Fibonacci Quarterly* 10 (1972), 381-391.
- [6] G. H. Hardy, E. M. Whright – *An introduction to the Theory of numbers*, 6th edition. Oxford University Press, 1979.
- [7] T. Koshy – *Fibonacci and Lucas numbers with applications*. John Wiley & Sons, 2001.
- [8] T. J. Osler, A. Hilburn – An unusual proof that  $F_m$  divides  $F_{nm}$  using hyperbolic functions. *The Mathematical Gazette* 91 (2007), 510-512.
- [9] J. Quaintance – *Combinatorial Identities: Table III: Binomial Identities Derived from Trigonometric and Exponential Series From the seven unpublished manuscripts of H. W. Gould Edited and Compiled by Jocelyn Quaintance*. 2010. <http://www.math.wvu.edu/~hgould/Vol.6.PDF>.
- [10] M. Shattuck – Combinatorial proofs of some Moriarty-type binomial coefficient identities. *Integers* 6 (2006), #A35.
- [11] B. A. Silva – *Números de Fibonacci e números de Lucas*. Dissertação de Mestrado Profissional, Profmat, USP de São Carlos, 2017.

Eduardo Henrique de Mattos Brietzke  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
<[brietzke@mat.ufrgs.br](mailto:brietzke@mat.ufrgs.br)>

Recebido: 02/09/2023  
Publicado: 26/02/2024

# O baricentro como ponto crítico de uma função

Ruthyelen Cristina Machado de Freitas 

Rogério César dos Santos   
Velasco 

Fabio Couzzi

## Resumo

Dada a mediana AM de um triângulo ABC, seja P um ponto deslizante sobre a mesma. Neste artigo iremos encontrar o ponto sobre AM que otimiza a razão  $\frac{PC}{PB}$  e também verificar sob que condição tal ponto crítico coincide com o baricentro. As conclusões a que chegamos foram que o ponto crítico P é tal que  $PM = \frac{BC}{2}$ , e que esse ponto coincide com o baricentro se e somente se o triângulo satisfaz a relação  $5BC^2 = AC^2 + AB^2$ . Usaremos, para a demonstração, o teorema de Stewart, a Lei dos Cossenos e o Cálculo Diferencial.

**Palavras-chave:** Razão Ótima; Triângulo; Baricentro; Mediana.

## Abstract

Given the median AM of a triangle ABC, let P be a point sliding along it. In this article, we will find the point on AM that optimizes the ratio  $\frac{PC}{PB}$  and also verify under which condition such a critical point coincides with the centroid. The conclusions we have reached are that the critical point P is such that  $PM = \frac{BC}{2}$  and this point coincides with the centroid if and only if the triangle satisfies the relationship  $5BC^2 = AC^2 + AB^2$ . For the proof, we will employ Stewart's theorem, the Law of Cosines, e Differential Calculus.

**Keywords:** Optimal Ratio; Triangle; Centroid; Median.

## 1. Introdução

No artigo [1] de Bialostocki e Bialostocki (2011), os autores demonstraram que, dada a bissetriz AT de um triângulo ABC, como mostra a figura 1, e dado P um ponto deslizante na reta suporte  $\overleftrightarrow{AT}$ , então os pontos que otimizam a razão  $\frac{PC}{PB} = \frac{r_1}{r_2}$  são o incentro I e o ex-incentro  $I_a$  do triângulo.

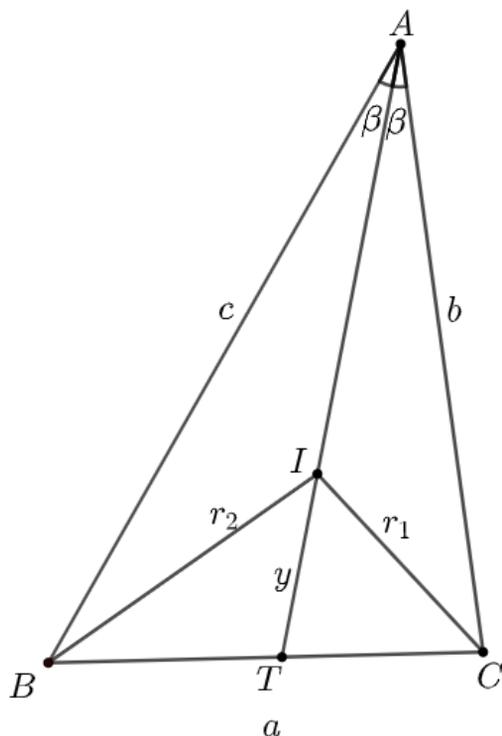


Figura 1: O ponto P na bissetriz AT que otimiza  $\frac{r_1}{r_2}$  é o incentro I.

Bialostocki e Ely (2015) em [2] generalizaram esse problema para qualquer ceviana AT, onde T é qualquer ponto no interior de BC, não necessariamente o pé da bissetriz de  $\hat{A}$ . Eles demonstraram, por caminhos distintos, a seguinte proposição.

**Proposição 1.** *Sejam dados quaisquer dois pontos B e C do plano, uma reta l não perpendicular a BC que passa pelo interior de BC, e O o ponto interseção da mediatriz de AB com a reta l, conforme ilustra a figura 2. Considere ainda a circunferência de centro O e raio  $OB = OC$ , e Q a interseção dessa circunferência com a reta l. Então, o ponto sobre a reta l que otimiza a razão  $\frac{PC}{PB}$ , com P pertencente à l, é o ponto Q.*

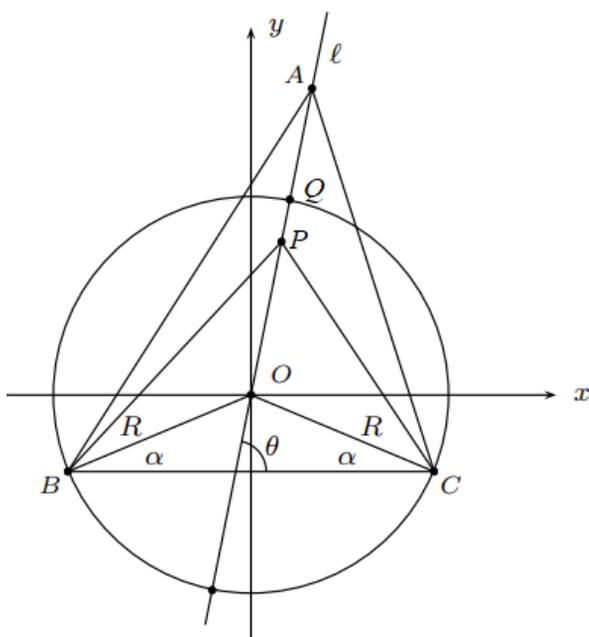


Figura 2: Figura retirada do artigo de Bialostocki e Ely (2015): o problema geral de encontrar o ponto  $P$  na reta  $l$  que otimiza a razão  $\frac{PC}{PB}$ , na figura, o ponto  $Q$ .

Os trabalhos [3] e [4] de Hajja (2012 e 2017) levantaram outras questões relacionadas ao tema.

Motivados por esse problema, fizemo-nos a mesma pergunta, porém substituindo a bissetriz  $AT$  da figura 1 ou a reta  $l$  da figura 2 pela mediana  $AM$  da figura 3. Nesse caso, desejamos determinar sob que condições o ponto  $P$  na mediana  $AM$  que otimiza a razão  $\frac{r_1}{r_2}$  coincide com o baricentro  $G$ . No caso da bissetriz, foi provado pelos autores mencionados anteriormente que esse ponto coincide com o incentro em qualquer triângulo.

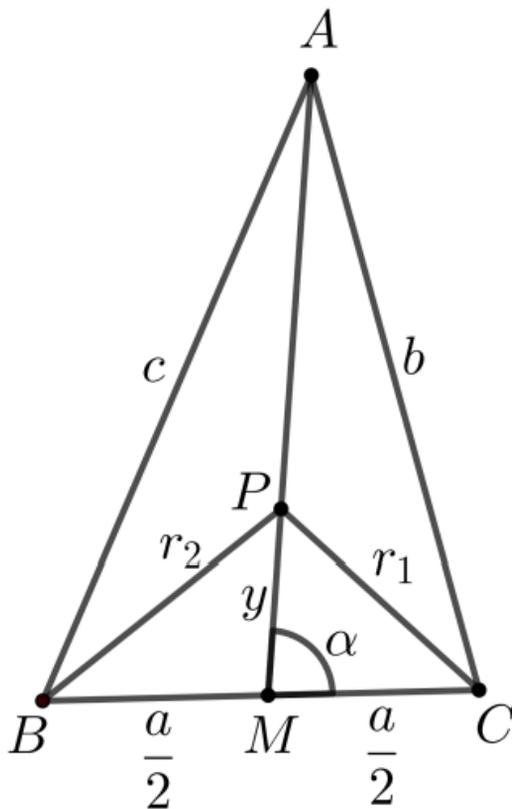


Figura 3: Dado M ponto médio de BC, queremos uma condição necessária e suficiente para que o ponto em AM que otimiza  $\frac{r_1}{r_2}$  seja o baricentro do triângulo ABC.

## 2. Lema auxiliar

Vamos precisar do seguinte lema, para podermos enunciar e provar o teorema central do nosso artigo.

**Lema 1.** *Considere um triângulo ABC de medidas  $AB = c$ ,  $BC = a$  e  $AC = b$ , e seja M o ponto médio de BC, de modo que o ângulo  $\alpha = \angle AMC$  seja menor que noventa graus, conforme ilustra a figura 3. Seja P qualquer ponto na mediana AM. Seja  $y = PM$ , que depende da posição de P na mediana. Sejam  $r_1 = PC$  e  $r_2 = PB$ . Defina  $f(y) = \frac{r_1(y)}{r_2(y)}$ . Então,*

$$f' = 0 \iff y = \pm \frac{a}{2}.$$

*Ou seja, os pontos críticos de f são  $\pm \frac{a}{2} = \pm \frac{BC}{2}$ .*

*Demonstração.* Vamos demonstrar o lema de duas formas. A primeira, calculando os pontos críticos de f por meio da derivada. A segunda, por meio da proposição 1.

Sem perigo de confusão, vamos identificar  $y$  ao seu ponto  $P$  correspondente na mediana  $AM$ , como mostra a figura 3. Isto é, dizer que  $P$  é ponto crítico de  $f$  vai significar, para nós, que  $y = PM$  é ponto crítico de  $f$ .

Feita essa observação, vamos à prova do lema.

Definindo  $g(y) = f^2(y)$ , observamos que

$$g' = 0 \iff f' = 0,$$

pois:

$$\begin{aligned} g' = 0 &\iff (f^2)' = 0 \iff \\ &2 \cdot f \cdot f' = 0 \iff \\ &f' = 0, \end{aligned}$$

pois a função  $f = \frac{r_1}{r_2}$  nunca se anula.

Logo, para a prova do lema, basta encontramos os pontos críticos de  $g$ , que serão os mesmos de  $f$ .

Similarmente à demonstração apresentada em [2], podemos utilizar a Lei dos Cossenos para estabelecer

$$r_1^2 = y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2y \frac{a}{2} \cos \alpha = y^2 + \frac{a^2}{4} - ya \cos \alpha$$

e

$$r_2^2 = y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2y \frac{a}{2} \cos(180 - \alpha) = y^2 + \frac{a^2}{4} + ya \cos \alpha.$$

Logo,

$$g = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{y^2 + \frac{a^2}{4} - ya \cos \alpha}{y^2 + \frac{a^2}{4} + ya \cos \alpha} = \frac{4y^2 + a^2 - 4ya \cos \alpha}{4y^2 + a^2 + 4ya \cos \alpha}.$$

Calculando  $g'$ , obtemos:

$$g' = \frac{(8y - 4a \cos \alpha)(4y^2 + a^2 + 4ya \cos \alpha) - (8y + 4a \cos \alpha)(4y^2 + a^2 - 4ya \cos \alpha)}{(4y^2 + a^2 + 4ya \cos \alpha)^2}.$$

Então, lembrando que  $\cos \alpha \neq 0$ , concluímos que

$$\begin{aligned} f' = 0 &\iff g' = 0 \iff \\ &32y^3 + 8ya^2 + 32ay^2 \cos \alpha - 16ay^2 \cos \alpha - 4a^3 \cos \alpha - 16a^2y \cos^2 \alpha - \\ &(32y^3 + 16y^2a \cos \alpha + 8ya^2 + 4a^3 \cos \alpha - 32ay^2 \cos \alpha - 16a^2y \cos^2 \alpha) = 0 \\ &\iff \\ &32ay^2 \cos \alpha - 8a^3 \cos \alpha = 0 \\ &\iff \\ &a \cos \alpha (32y^2 - 8a^2) = 0 \\ &\iff \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y^2 &= \frac{a^2}{4}. \\
 \iff \\
 y &= \pm \frac{a}{2},
 \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Vamos ver a outra maneira de demonstrar o lema, utilizando a proposição 1. Observe a figura 4. Seja  $l$  a reta  $\overleftrightarrow{AM}$ . Então, a interseção da mediatriz de  $BC$  com  $l$  é o próprio ponto  $M$ , o ponto médio de  $BC$ . Isso implica que  $O = M$  é o centro do círculo com raio  $OB = OC = \frac{a}{2}$ . A interseção desse círculo com a reta  $l$  será o ponto  $Q$  na mediana  $AM$  tal que  $y = MQ = \frac{a}{2}$ . Pela proposição 1, esse é o ponto crítico de  $f$ , portanto, no caso da mediana.

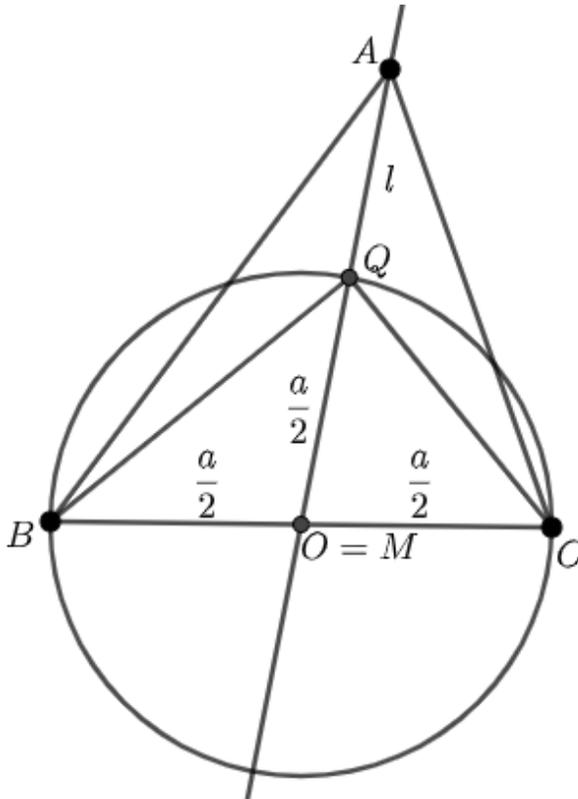


Figura 4: Outra prova do lema 1 de que o ponto crítico  $Q$  no caso da mediana é tal que  $MQ = \frac{a}{2}$ , por meio da proposição 1.

Observe que, como consequência do lema 1, se  $P$  é ponto crítico de  $f$ , então o triângulo  $BPC$  é retângulo em  $P$ , conforme ilustra a figura 5, pois um triângulo é retângulo se e somente se a mediana com relação a um lado mede metade desse lado.

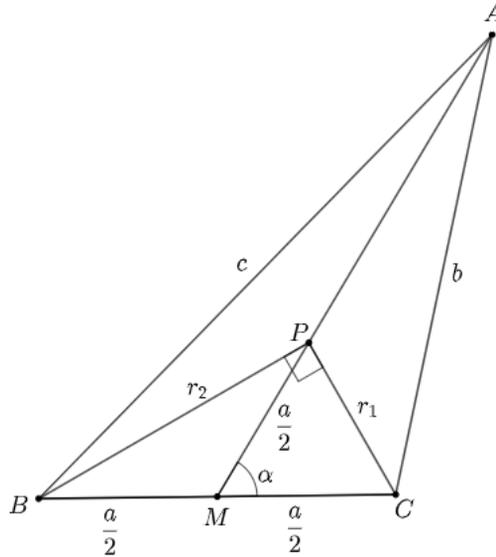


Figura 5: O ponto  $P$  em  $AM$  que minimiza  $f = \frac{r_1}{r_2}$  é tal que  $MP = \frac{a}{2}$  e, portanto,  $\widehat{BPC} = 90^\circ$ .

Vamos classificar esses pontos críticos  $y = \pm \frac{a}{2}$  encontrados.

Como  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , sabemos que  $\cos \alpha > 0$ . Logo,  $g' > 0$  se e somente se  $y > \frac{a}{2}$  ou  $y < -\frac{a}{2}$ , enquanto que  $g' < 0$  se e somente se  $-\frac{a}{2} < y < \frac{a}{2}$ . Portanto, a função  $g$  é crescente no intervalo  $(-\infty, -\frac{a}{2})$ , decrescente no intervalo  $(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ , e crescente em  $(\frac{a}{2}, \infty)$ .

Assim,  $\frac{a}{2}$  é ponto de mínimo e  $-\frac{a}{2}$  é ponto de máximo da função  $g$ . Logo, são de mínimo e de máximo da função  $f$ , respectivamente.

Vamos calcular  $f(\frac{a}{2})$  e  $f(-\frac{a}{2})$ . Nos triângulos  $PMC$  e  $PMB$  da figura 5, temos, para o ponto de mínimo  $\frac{a}{2}$ :

$$r_1^2 = 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cos \alpha \iff$$

$$r_1^2 = \frac{a^2}{2}(1 - \cos \alpha)$$

e

$$r_2^2 = 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cos(180^\circ - \alpha) \iff$$

$$r_2^2 = \frac{a^2}{2}(1 + \cos \alpha).$$

Assim,

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{r_1\left(\frac{a}{2}\right)}{r_2\left(\frac{a}{2}\right)} = \sqrt{\frac{-\cos \alpha + 1}{\cos \alpha + 1}}.$$

Para o ponto de máximo  $-\frac{a}{2}$ , temos que P encontra-se na reta suporte de AM, exterior ao triângulo ABC, de modo que o ângulo  $\widehat{CMP}$  vale, agora,  $180^\circ - \alpha$ , isto é,  $r_1$  é oposto ao ângulo  $180^\circ - \alpha$ . Por outro lado,  $\widehat{BMP}$  vale  $\alpha$  e, assim,  $r_2$  é oposto ao ângulo  $\alpha$ .

Logo,

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cos \alpha + 1}{-\cos \alpha + 1}} = \frac{1}{f\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

### 3. Resultado principal

Agora sim, vamos ao nosso teorema.

**Teorema 1.** *Considere novamente o triângulo ABC da figura 3 e seja M o ponto médio de BC, de modo que o ângulo  $\alpha = \angle AMC$  seja menor que noventa graus. Seja P qualquer ponto na mediana AM. Seja  $y = PM$ , o qual depende da posição de P na mediana. Sejam  $r_1 = PC$  e  $r_2 = PB$ . Defina  $f = \frac{r_1}{r_2}$ . Então, o baricentro G do triângulo ABC é ponto de mínimo de f se e somente se  $5a^2 = b^2 + c^2$*

*Demonstração.* Para a ida, a hipótese é que o baricentro  $P = G$  minimiza a razão  $f = \frac{r_1}{r_2}$ . A tese é que  $5a^2 = b^2 + c^2$ .

Como G minimiza f, então, pelo lema 1, temos que  $\frac{a}{2} = GM$ . Além disso, o baricentro divide a mediana na razão 2 para 1, logo,  $GM = \frac{AM}{3}$ .

Portanto,

$$AM = \frac{3a}{2}.$$

Sabemos, a partir do teorema de Stewart aplicado à mediana, que

$$2(b^2 + c^2) = 4AM^2 + a^2.$$

Substituindo, temos:

$$\begin{aligned} 2(b^2 + c^2) &= 4\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + a^2 \iff \\ 2b^2 + 2c^2 &= 9a^2 + a^2 \iff \\ 5a^2 &= b^2 + c^2. \end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração da ida do teorema.

Para provar a volta do teorema 1, vamos supor que

$$5a^2 = b^2 + c^2. \tag{1}$$

A tese é que o baricentro  $G$  minimiza  $f$ .

Seja  $P$  o ponto de  $AM$  que minimiza  $f$ . Então, pelo lema 1, temos que

$$PM = \frac{a}{2}. \quad (2)$$

Pela relação de Stewart,

$$2(b^2 + c^2) = 4AM^2 + a^2.$$

Substituindo a equação (1), temos:

$$2(5a^2) = 4AM^2 + a^2 \iff$$

$$AM^2 = \frac{9a^2}{4}.$$

Finalmente, pela equação (2), obtemos  $AM = 3 \cdot \frac{a}{2} = 3PM$ , e portanto,  $P = G$ , como queríamos demonstrar.

□

Para os triângulos tais que  $5a^2 = b^2 + c^2$ , isto é, em que  $G$  é o ponto mínimo de  $f$ , é possível calcular  $\cos \alpha$  do seguinte modo. Primeiro, lembremos que para esses triângulos, vale  $AM = \frac{3a}{2}$ . Logo, observando o triângulo  $AMC$  da figura 5, temos:

$$b^2 = AM^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot AM \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos \alpha \iff$$

$$b^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos \alpha \iff$$

$$b^2 = \frac{10a^2}{4} - \frac{6a^2}{4} \cos \alpha \iff$$

$$4b^2 = a^2(10 - 6 \cos \alpha) \iff$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{6} \left(10 - \frac{4b^2}{a^2}\right) \iff$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{3} \left(5 - \frac{2b^2}{a^2}\right).$$

Esse cálculo permite-nos, ainda, obter o valor mínimo de  $f$ ,  $f\left(\frac{a}{2}\right)$ , em termos de  $a$  e  $b$ :

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{-\cos \alpha + 1}{\cos \alpha + 1}} =$$

$$\sqrt{\frac{-\frac{1}{3} \left(5 - \frac{2b^2}{a^2}\right) + 1}{\frac{5}{3} - \frac{2b^2}{3a^2} + 1}} =$$

$$\sqrt{-\frac{2}{3} + \frac{2b^2}{3a^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{\frac{8}{3} - \frac{2b^2}{3a^2}}{8a^2 - 2b^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{4a^2 - b^2}}.$$

Também, o valor máximo:

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{f\left(\frac{a}{2}\right)} =$$

$$\sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{b^2 - a^2}}.$$

#### 4. Aplicações no GeoGebra

A recíproca do teorema permite-nos obter e esboçar no GeoGebra exemplos de triângulos cujo baricentro minimiza  $f$ . Observe que, como  $\widehat{AMC} < 90^\circ$ , ao considerarmos os triângulos  $AMC$  e  $AMB$ , devemos ter  $c > b$ .

Por exemplo, o triângulo com lados  $a = 13$ ,  $b = 19$  e  $c = 22$ , no qual

$$5a^2 = 5 \cdot 13^2 =$$

$$5 \cdot 169 = 5 \cdot (170 - 1) = 850 - 5 = 845$$

e

$$b^2 + c^2 = 19^2 + 22^2 =$$

$$(20 - 1)^2 + (20 + 2)^2 = 400 - 40 + 1 + 400 + 80 + 4 = 845.$$

A figura 6 ilustra.

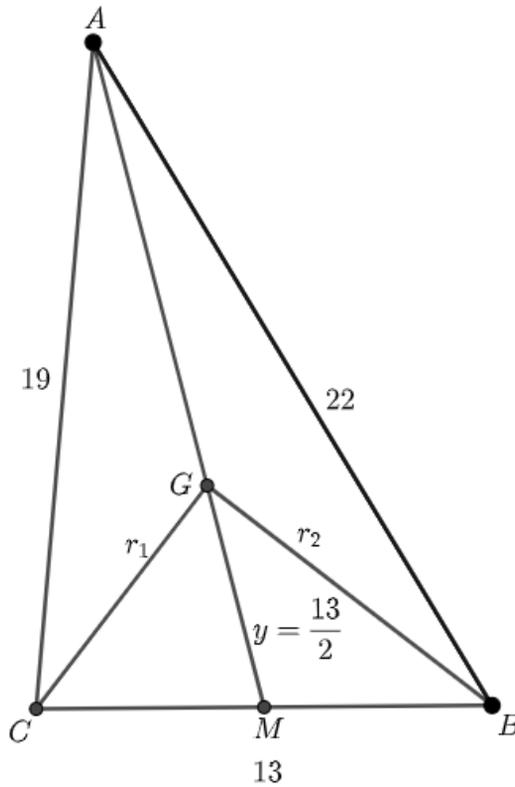


Figura 6: Um triângulo no qual o ponto na mediana AM que otimiza  $\frac{r_1}{r_2}$  é o baricentro G.

Calculando o ângulo  $\widehat{AMC}$ , temos:

$$\widehat{AMC} = \alpha = \arccos \left[ \frac{1}{3} \left( 5 - \frac{2b^2}{a^2} \right) \right] =$$

$$\arccos \left[ \frac{1}{3} \left( 5 - \frac{2 \cdot 19^2}{13^2} \right) \right] \approx$$

$$\arccos 0,2526 \approx 75,96^\circ.$$

Calculando o valor mínimo de f:

$$f \left( \frac{a}{2} \right) =$$

$$\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{4a^2 - b^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{19^2 - 13^2}{4 \cdot 13^2 - 19^2}} \approx 0,78.$$

O valor máximo de  $f$ :

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) \approx \frac{1}{0,78} \approx 1,28.$$

A figura 7 ilustra uma parte do triângulo ABC e indica todas essas medidas.

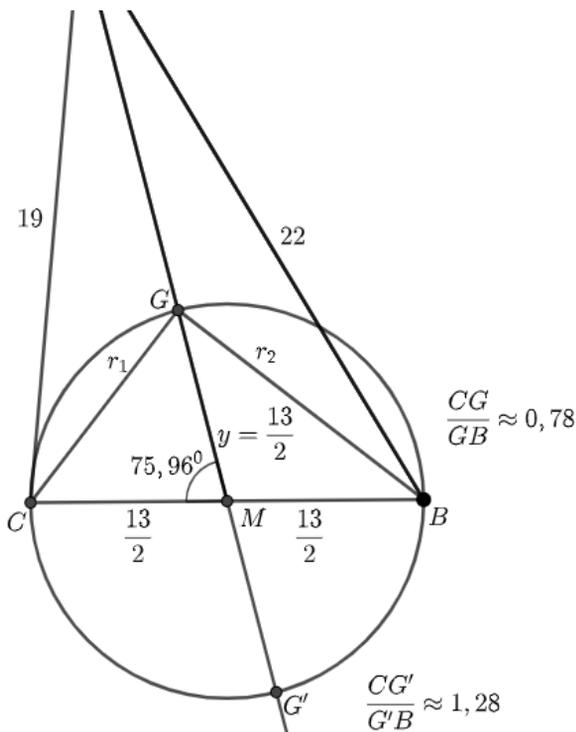


Figura 7: Valores máximo e mínimo de  $f$  para um triângulo tal que  $G$  é ponto de mínimo.

Outro exemplo seria um triângulo de medidas  $a = 52$ ,  $b = 76$  e  $c = 88$ .

Nesses dois casos, o ponto na mediana que minimiza  $f$  é o baricentro do triângulo ABC, de acordo com a volta do teorema.

## 5. Conclusões

Concluimos portanto que, dados um triângulo ABC,  $M$  o ponto médio de BC,  $P$  ponto deslizante de AM,  $r_1 = PC$  e  $r_2 = PB$ , conforme ilustra a figura 8, então o ponto de mínimo da função  $f = \frac{r_1}{r_2}$  é  $y = \frac{a}{2}$  e, nesse ponto, sendo  $\alpha = \widehat{AMC}$ ,

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{-\cos \alpha + 1}{\cos \alpha + 1}}.$$

O valor máximo de  $f$  é  $\frac{1}{f(\frac{a}{2})}$ .

Também concluímos que esse ponto de mínimo  $y = \frac{a}{2}$  incide no baricentro se e somente se  $5a^2 = b^2 + c^2$ .

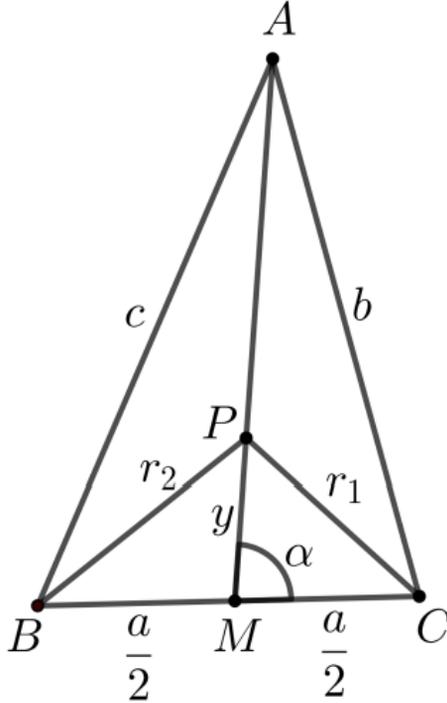


Figura 8: O baricentro  $P = G$  minimiza  $\frac{r_1}{r_2}$  se e somente se  $5a^2 = b^2 + c^2$ .

Para um tal triângulo, o valor mínimo de  $f$  é  $f(\frac{a}{2}) = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{4a^2 - b^2}}$  e o máximo o seu inverso multiplicativo.

Como uma observação final, se  $P_0$  é o ponto na mediana  $AM$  que minimiza  $f$ , então  $P_0$  não pode minimizar  $r_1 = PC$  com  $P$  na mediana  $AM$ . De fato, se  $P_0$  minimiza  $PC$  e também minimiza  $\frac{PC}{PB}$ , então, pelo lema 1,  $\widehat{CP_0B} = \widehat{CP_0M} = 90^\circ$ , o que é absurdo.

## Referências

- [1] Bialostocki, A. e Bialostocki, D., “The incenter and an excenter as solutions to an extremal problem”, *Forum Geom.*, 11 (2011) 9–12.
- [2] Bialostocki, A. e Ely, R., “Points on a line that maximize e minimize the ratio of the distances to two given lines”, *Forum Geometricorum*, 15, 177-178, 2015.
- [3] Hajja, M., “Extremal properties of the incentre e the excentres of a triangle”, *The Mathematical Gazette*, 2012, Vol. 96, No. 536 (July 2012), pp. 315-317.
- [4] Hajja, M., “One more note on the extremal properties of the incentre e the excentres of a triangle”, *The Mathematical Gazette*, Vol. 101, No. 551 (July 2017), pp. 308-310.

Ruthyelen Cristina Machado de Freitas  
Secretaria de Educação do Distrito Federal  
<[ruthyelencf@gmail.com](mailto:ruthyelencf@gmail.com)>

Rogério César dos Santos  
Universidade de Brasília  
<[rogerc@unb.br](mailto:rogerc@unb.br)>

Fabio Couzzi Velasco  
Aluno do Mestrado Profmat DF  
<[fabiocouzzi@yahoo.com.br](mailto:fabiocouzzi@yahoo.com.br)>

Recebido: 21/08/2023  
Publicado: 04/03/2024

# Explorando QR Codes como Recurso Didático na Educação Matemática

Rodrigo Araujo de Souza 

Thainá Lopes Ferreira   
Alcebiades Dal Col 

Weslaine Herzog Santos 

## Resumo

O objetivo principal deste artigo é promover a compreensão do QR Code e indicar sua relação com a Matemática. Nós iniciamos com uma explicação concisa sobre o funcionamento do QR Code, com ênfase nos padrões presentes no QR Code e nos conceitos de *bytes* e máscaras. Nosso propósito é mostrar aos estudantes do ensino médio as conexões entre a matemática escolar e a matemática aplicada. Além disso, este trabalho compartilha uma proposta didática que estimula a compreensão do QR Code. Nós destacamos a importância de despertar a curiosidade dos estudantes, estimulando seu interesse pela Matemática, ao demonstrar como essa disciplina está intrinsecamente ligada ao QR Code.

**Palavras-chave:** QR Code; codificação; máscara; proposta didática; binário.

## Abstract

The main objective of this article is to promote understanding of the QR Code and indicate its relationship with Mathematics. We start with a concise explanation of how the QR code works, with a focus on the patterns present in the QR code and on the concepts of bytes and masks. Our purpose is to demonstrate to students the connections between school mathematics and applied mathematics. Moreover, this work shares a didactic proposal that encourages understanding of the QR code. We emphasize the importance of sparking students' curiosity, stimulating their interest in Mathematics, by showing how this discipline is intrinsically linked to the QR code.

**Keywords:** QR code; codification; mask; didactic proposal; binaries.

## 1. Introdução

Na década de 1960, surgiu no Japão a necessidade de um código identificador de mercadorias [1]. Com o rápido crescimento econômico do país e a ausência de um código identificador, os comerciantes eram obrigados a digitar todos os preços dos produtos manualmente, acarretando em alguns problemas de saúde. A fim de solucionar a demanda, foi criado o que conhecemos hoje como código de barras. Porém, com o decorrer dos anos, algumas barreiras vieram à tona, e a principal foi a limitação de caracteres, já que a quantidade máxima era de 20 armazenados.

Após receber muitos pedidos, a *Denso Wave Incorporated* (divisão da *Denso Corporation* encarregada pelo desenvolvimento do código de barras) tomou a decisão de desenvolver um novo código.

Dado que o código de barras permitia apenas a leitura em uma dimensão, a ideia inicial era desenvolver um código bidimensional. Depois de um ano e meio de trabalho, em 1994, a *Denso Wave Incorporated* anunciou o lançamento do QR Code. QR Code é uma abreviação de *Quick Response Code*, que significa código de resposta rápida em inglês. No cenário atual, devido à disponibilização gratuita das diretrizes de geração do código pela *Denso Wave* e à disponibilidade de *scanners* em *smartphones*, esse código passou a ser utilizado em uma ampla gama de tarefas. Essas aplicações incluem desde o gerenciamento de tarefas e estoque até a emissão de boletos e o armazenamento de informações pessoais.

Com este trabalho, iremos abordar de forma sucinta o funcionamento do QR Code, abrangendo aspectos como o posicionamento dos seus padrões, a codificação de mensagens e o mascaramento de dados. Além disso, ao final, apresentaremos uma proposta de sequência didática para explorar o QR Code em turmas do ensino médio trabalhando as seguintes habilidades presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [2]:

- (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
- (EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

## 2. Tipos de QR Code

Com a crescente adoção do QR Code, surgiu a necessidade de desenvolver novos tipos de códigos para atender a diferentes demandas. Dentre esses tipos, destacam-se o *micro QR Code*, projetado para códigos de tamanho reduzido, com capacidade máxima de armazenamento de 35 caracteres; o *rMQR Code*, projetado para ser impresso em espaços estreitos, possuindo um formato retangular e capacidade de armazenamento maior que o micro QR Code; o *SQRC*, destinado a dados privados, com aparência semelhante ao QR Code convencional, porém ele só pode ser lido por leitores específicos; o *FRAME QR*, que incorpora uma imagem ao código, sendo exemplos populares o QR Code gerado pelo aplicativo WhatsApp ou Picpay; e, por fim, o *QR Code clássico*, que será o foco dos nossos estudos nas seções seguintes.

O QR Code clássico possui 40 versões, variando em tamanho e complexidade. De uma versão para a versão seguinte tem-se um aumento de 4 *pixels* em cada dimensão do quadrado. A versão 1 tem um tamanho de  $21 \times 21$ , totalizando 441 *pixels*, enquanto a versão 2 possui o tamanho de  $25 \times 25$ , resultando em 625 *pixels*. Seguindo com a progressão vamos até a versão 40 que possui um tamanho de  $177 \times 177$ , totalizando 31.329 *pixels*. A Figura 1 apresenta exemplos de QR Code nas versões 1, 2 e 40. Neste trabalho, a principal versão usada é a de número 3 que tem tamanho  $29 \times 29$ , com um total de 841 pixels. Os pixels são pequenos quadrados que estamos utilizando como unidade de medida de comprimento no QR Code.

Atualmente, nem todo *smartphone* possui o próprio leitor de QR Code, mas, é possível realizar a instalação de aplicativos leitores, como por exemplo: “Leitor de código QR” disponível em [4] e “Scanner de QR Código de Barras” disponível em [5].

## 3. Padrões no QR Code e suas funções



Figura 1: Exemplos de QR Code nas versões 1, 2 e 40. Fonte: Wikipédia [3].

Uma das principais dificuldades enfrentadas pela empresa durante o desenvolvimento do código foi alcançar uma leitura rápida e eficiente. Como solução, foram estabelecidos padrões que deveriam ser posicionados em locais determinados, com o objetivo de desempenhar funções específicas. Nas subseções a seguir, iremos detalhar a função e o posicionamento dos padrões destacados na Figura 2.

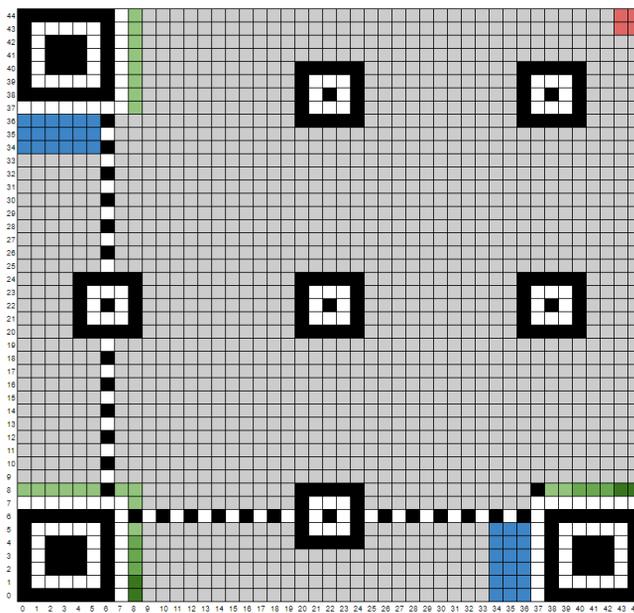


Figura 2: Posicionamento dos padrões. Fonte: Produção dos próprios autores.

### 3.1. Padrões de localização

Os padrões de localização estão destacados na Figura 3 e são blocos quadrados de tamanho  $7 \times 7$  pixels posicionados no canto superior esquerdo, canto inferior direito e canto inferior esquerdo, totalizando três blocos. Cada bloco é composto por três quadrados de mesmo centro: o quadrado externo preto de tamanho  $7$  pixels por  $7$  pixels, um quadrado branco de  $5$  pixels por  $5$  pixels e um

quadrado preto sólido de 3 *pixels* por 3 *pixels*.

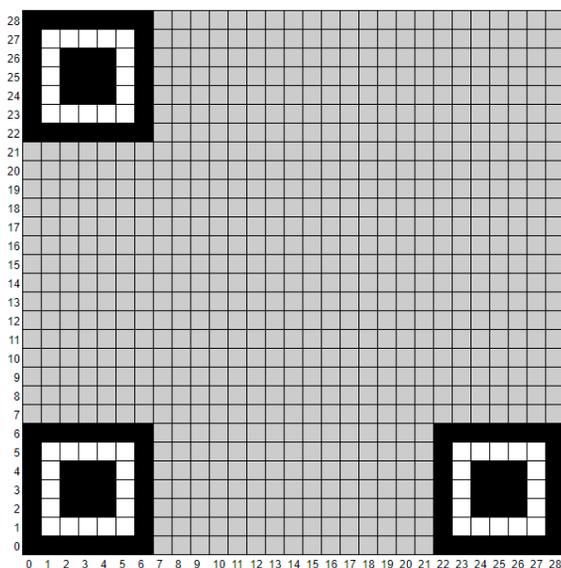


Figura 3: Posicionamento dos padrões de localização. Fonte: Produção dos próprios autores.

A função dos padrões de localização é orientar o *scanner* quanto à direção em que a leitura deve ser realizada. O leitor de QR Code é capaz de identificar o padrão de localização por meio da detecção da proporção de 1 : 1 : 3 : 1 : 1, conforme ilustrado na Figura 4, por isso, é possível ler QR Codes rotacionados.

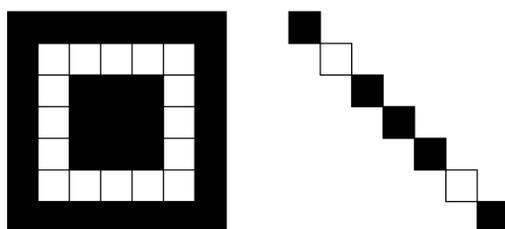


Figura 4: Proporção 1 : 1 : 3 : 1 : 1. Fonte: Produção dos próprios autores.

### 3.2. Separadores

Os separadores são conjuntos de *pixels* brancos, com um *pixel* de largura, que são colocados ao redor dos padrões de localização para separá-los do restante do QR Code. Esse padrão está destacado em branco na Figura 5.

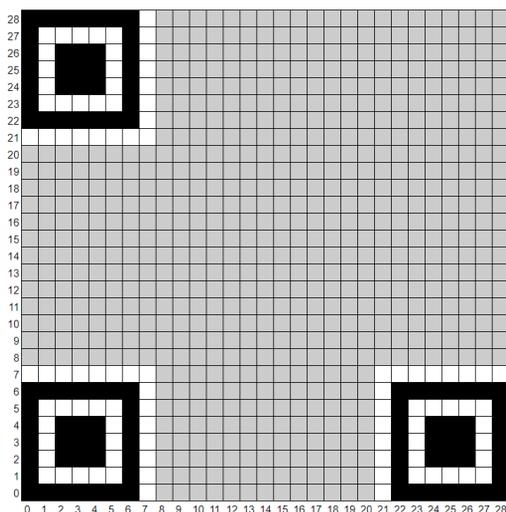


Figura 5: Posicionamento dos separadores. Fonte: Produção dos próprios autores.

### 3.3. Padrões de alinhamento

Os padrões de alinhamento consistem em blocos de 5 pixels por 5 pixels e eles devem estar presentes em códigos de versão maiores ou iguais a 2. O bloco é composto por um único pixel preto inscrito em um quadrado branco de 3 pixels por 3 pixels que por sua vez está contido em um quadrado externo preto de tamanho 5 pixels por 5 pixels, todos com o mesmo centro. A função dos padrões de alinhamento é semelhante à dos padrões de localização.

O posicionamento dos padrões de alinhamento segue uma configuração predefinida, determinada com base na Tabela 1. A tabela determina onde o centro do padrão deve ser disposto, os números representam coordenadas de linha e coluna.

Versão	Centro				Versão	Centro				Versão	Centro							
<b>2</b>	6	18			<b>15</b>	6	26	48	70	<b>28</b>	6	26	50	74	98	122		
<b>3</b>	6	22			<b>16</b>	6	26	50	74	<b>29</b>	6	30	54	78	102	126		
<b>4</b>	6	26			<b>17</b>	6	30	54	78	<b>30</b>	6	26	52	78	104	130		
<b>5</b>	6	30			<b>18</b>	6	30	56	82	<b>31</b>	6	30	56	82	108	134		
<b>6</b>	6	34			<b>19</b>	6	30	58	86	<b>32</b>	6	34	60	86	112	138		
<b>7</b>	6	22	38		<b>20</b>	6	34	62	90	<b>33</b>	6	30	58	83	114	142		
<b>8</b>	6	24	42		<b>21</b>	6	28	50	72	94	<b>34</b>	6	34	62	90	118	146	
<b>9</b>	6	26	46		<b>22</b>	6	26	50	74	98	<b>35</b>	6	30	54	78	102	126	150
<b>10</b>	6	28	50		<b>23</b>	6	30	54	78	102	<b>36</b>	6	24	50	76	102	128	154
<b>11</b>	6	30	54		<b>24</b>	6	28	54	80	106	<b>37</b>	6	28	54	80	106	132	158
<b>12</b>	6	32	58		<b>25</b>	6	32	58	84	110	<b>38</b>	6	32	58	84	110	136	162
<b>13</b>	6	34	62		<b>26</b>	6	30	58	86	114	<b>39</b>	6	26	54	82	110	138	166
<b>14</b>	6	26	46	66	<b>27</b>	6	34	62	90	118	<b>40</b>	6	30	58	86	114	142	170

Tabela 1: Posicionamento dos padrões de alinhamento. Fonte: Produção dos próprios autores.

Por exemplo, os números vinculados à versão 3 são 6 e 22, então os centros dos padrões devem

ser colocados em  $(6, 6)$ ,  $(6, 22)$ ,  $(22, 6)$  e  $(22, 22)$ , lembrando que a contagem começa da linha 0 e coluna 0 (canto inferior esquerdo). Porém, os padrões de alinhamento não podem sobrepor os padrões de localização ou os separadores. A Figura 6 exibe a localização desses padrões na versão 3 do QR Code. Os três padrões de alinhamento destacados em vermelho sobrepoem os localizadores, por isso, apenas o padrão de centro  $(22, 22)$  é mantido.

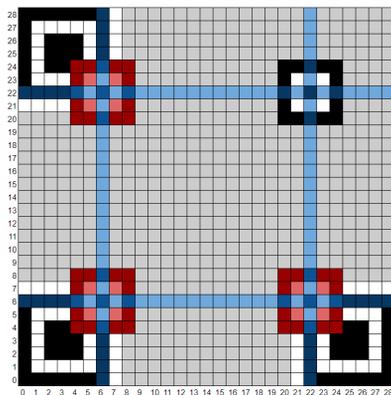


Figura 6: Posicionamento dos padrões de alinhamento na versão 3 do QR Code. Fonte: Produção dos próprios autores.

### 3.4. Padrões de temporização

Os padrões de tempo são duas linhas de um *pixel* de largura que conectam os padrões de localização. Essas linhas intercalam entre as cores pretas e brancas, começando e terminando com um *pixel* da cor preta. Seu comprimento depende da versão usada, mas o padrão horizontal sempre é colocado na 6ª linha do QR Code, enquanto o vertical sempre é colocado na 6ª coluna do QR Code, como mostrado na Figura 7. A função desse padrão é auxiliar na leitura das linhas e colunas, bem como confirmar a versão do código.

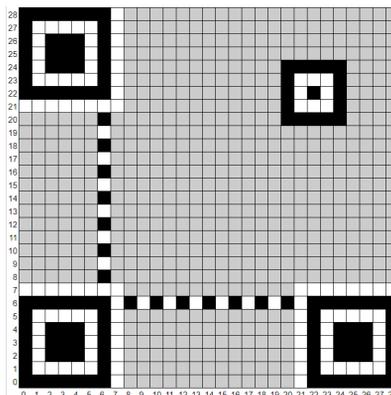


Figura 7: Posicionamento dos padrões de temporização. Fonte: Produção dos próprios autores.

### 3.5. Correção de erro

Os códigos corretores de erros detectam e corrigem erros. Os *pixels* destacados na Figura 8 são destinados ao armazenamento do nível de correção de erro que será usado na codificação da mensagem. O método de correção de erros usado no QR Code é o chamado código de Reed-Solomon [6].

A Figura 9 mostra os níveis de correção de erro listados em ordem crescente. É importante ressaltar que quanto maior o nível de correção de erro, maiores serão as chances dos leitores de QR Code decodificarem com sucesso a mensagem contida em um QR Code danificado.

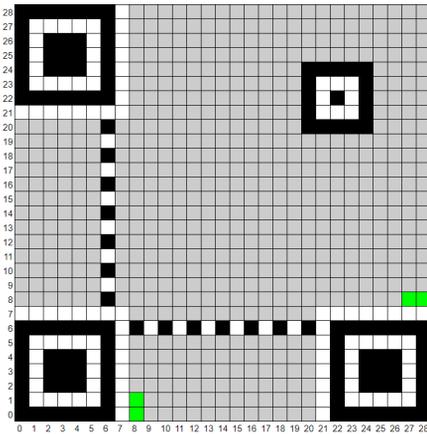


Figura 8: Posicionamento do padrão de correção de erro. Fonte: Produção dos próprios autores.

NÍVEL DE CORREÇÃO DE ERRO	BITS	PIXELS	PORCENTAGEM DA CORREÇÃO
L (LOW)	01		7%
M (MEDIUM)	00		15%
Q (QUARTILE)	11		25%
H (HIGH)	10		30%

Figura 9: Níveis de correção de erro e sua representação em *pixels*. Fonte: Produção dos próprios autores.

### 3.6. Tipo de armazenamento de dados

No canto superior direito é posicionado um quadrado de 2 *pixels* por 2 *pixels*, como destacado na Figura 10, cuja função é determinar o tipo de caracteres contido na mensagem. A Figura 11 mostra os principais tipos de decodificação de dados usados e suas representações em *pixels*.

O modo *numérico* é utilizado para representar dígitos decimais de 0 a 9. Ele é ideal para codificar informações numéricas, como números de telefone ou códigos de identificação. Já o modo *alfanumérico* permite representar uma variedade maior de caracteres, incluindo algarismos, letras maiúsculas, alguns caracteres especiais e espaços. Esse modo é adequado para codificar mensagens que contenham combinações de números, letras maiúsculas e certos símbolos. O modo *byte* é mais abrangente, permitindo números, letras maiúsculas e minúsculas, símbolos, dentre outros caracteres presentes na codificação de caracteres ISO 8859-1 [7, 8]. Por fim, o modo *Kanji* é específico para a língua japonesa, permitindo a codificação de caracteres Kanji. É utilizado principalmente em QR Codes destinados ao público japonês.

Para selecionar o tipo de armazenamento de dados mais adequado, é necessário analisar as necessidades específicas da mensagem. Por exemplo, se a mensagem consistir apenas de letras maiúsculas, o modo alfanumérico será suficiente, embora seja possível codificar a mensagem usando o modo bytes.

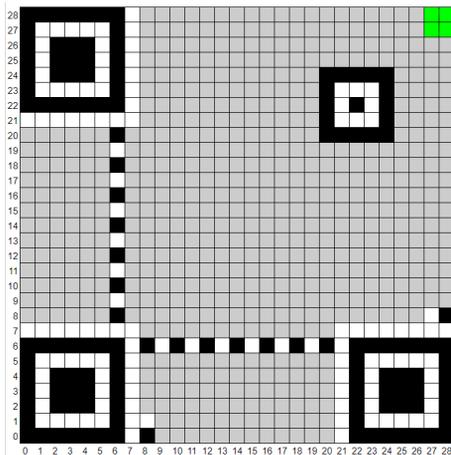


Figura 10: Posicionamento do padrão de armazenamento de dados. Fonte: Produção dos próprios autores.

TIPO	BITS	PIXELS
NÚMÉRICO	0001	
ALFANUMÉRICO	0010	
BYTE	0100	
KANJI	1000	
ECI	0111	

Figura 11: Tipos de armazenamento de dados. Fonte: Produção dos próprios autores.

### 3.7. Dark module, string de formato, informação de versão e Quiet Zone

O *dark module* é um único *pixel* preto posicionado na coordenada  $((4 * V) + 9, 8)$ , onde  $V$  é a versão do QR Code. Assim, o *dark module* sempre fica localizado acima do canto superior esquerdo do separador inferior direito. A Figura 12 mostra a versão 7 do QR Code com o *dark module* na coordenada (37, 8).

A *string de formato* é um conjunto de *pixels* composto por 15 *pixels*, como destacado em verde na Figura 12. Sua função é fornecer informações sobre a correção de erros, máscara (estudaremos na Seção 5) e versão do código. A criação da *string* é feita a partir da sequência de 5 *pixels* correspondentes à correção de erro e máscara, com o uso do método de correção de erros *Reed-Solomon*. Não iremos entrar em detalhes sobre esse processo por envolver diversas divisões polinomiais, mas as possíveis combinações estão listadas no site de tutorial [9].

A informação de versões são dois blocos localizados próximos ao padrão de localização, como destacado em azul na Figura 12, sendo que um bloco tem tamanho 6 *pixels* por 3 *pixels* e outro bloco tem tamanho 3 *pixels* por 6 *pixels*. Apenas as versões 7 ou maiores possuem tal padrão. Sua função é indicar a capacidade de armazenamento de dados e a versão do QR Code.

Os três padrões mencionados nesta subseção são adicionados quando as outras etapas responsáveis pela criação do QR Code estiverem feitas.

Por fim, a *Quiet Zone*, que significa Zona Tranquila em inglês, é uma área em branco ao redor do QR Code que fornece espaço de segurança e ajuda na leitura correta do código pelos leitores.

## 4. Bytes

Uma vez selecionado o tipo de codificação de dados a ser utilizado, é realizada a etapa de composição da mensagem de acordo com a tabela de codificação associada ao modo escolhido. É importante ressaltar que a mensagem codificada deve ser transformada da base 10 para a base

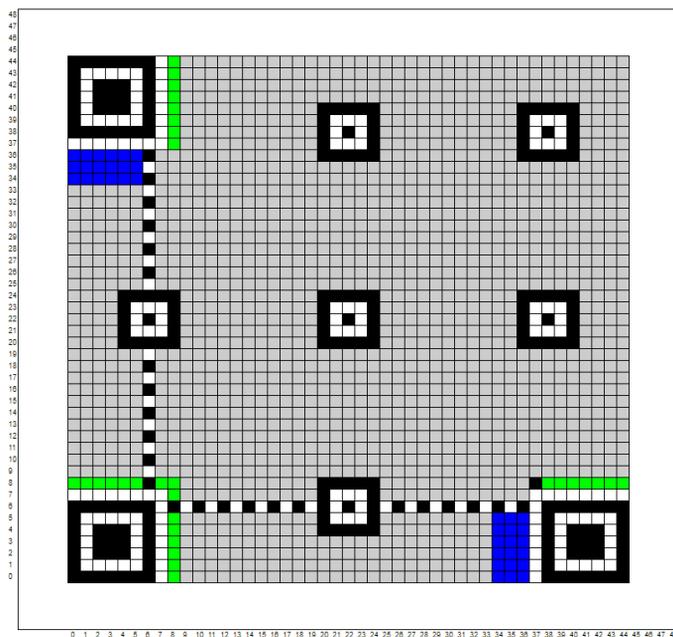


Figura 12: Posicionamento dos padrões *dark module*, *string* de formato e informação de versão.  
 Fonte: Produção dos próprios autores.

2. Para exemplificar o procedimento, tomaremos a palavra “engraçadinho” (Tabela 2). Como a mensagem é formada por letras minúsculas e caracteres especiais, o modo de codificação preferível é o modo *byte*, por isso seguiremos a tabela ISO 8859 [7, 8].

Letra	Codificação em decimal	Codificação em binário
e	101	01100101
n	110	01101110
g	103	01100111
r	114	01110010
a	97	01100001
ç	231	11100111
a	97	01100001
d	100	01100100
i	105	01101001
n	110	01101110
h	104	01101000
o	111	01101111

Tabela 2: Codificação da palavra “engraçadinho”. Fonte: Produção dos próprios autores.

Após o processo de codificação dos dados, a palavra-código deve ser transformada em *byte*. Cada caractere é armazenado em um *byte*, e cada *byte* é composto por 8 *bits*. Caso o caractere não

detenha 8 *bits*, são acrescentados 0's à esquerda, até que o *byte* esteja completo. Antes de prosseguirmos, é necessário salientar que o número 0 representa um *pixel* branco, enquanto o número 1 representa um *pixel* preto.

Os *bits* são lidos em um padrão de ziguezague percorrendo-se os módulos individuais do QR Code de acordo com a direção escolhida, que pode ser de baixo para cima ou de cima para baixo. Na Figura 13 apresentamos as possibilidades de leitura dos *bits* e na Figura 14 mostramos um exemplo.

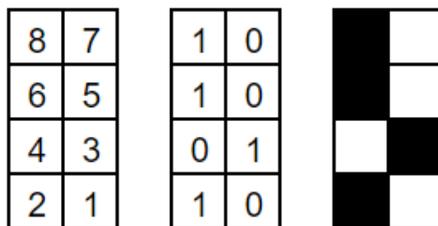
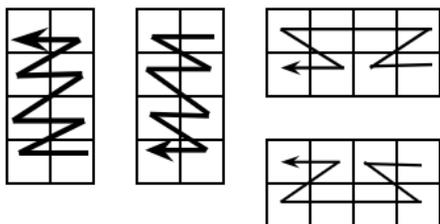


Figura 13: Padrão ziguezague. Fonte: Produção dos próprios autores.

Figura 14: Exemplo de codificação da letra “e”. Fonte: Produção dos próprios autores.

Após gerar a mensagem final em *bits* e organizá-la na ordem correta, é necessário colocar os *bits* na matriz do QR Code, seguindo uma estrutura específica. Antes de proceder com a estruturação da mensagem na matriz, é preciso montar o primeiro *byte*, conhecido como *indicador de contagem de caracteres*. Esse *byte* representa o número de caracteres que estão sendo codificados somado um, pois o indicador deve ser considerado parte da mensagem, e é uma sequência de *bits* derivada da conversão desse número para sua representação binária. Por exemplo, se a mensagem original contém 12 letras, o indicador de contagem de caracteres irá mostrar o valor 13 que em binário, é representado por “00001101”. A Figura 15 mostra o indicador de contagem na cor cinza.

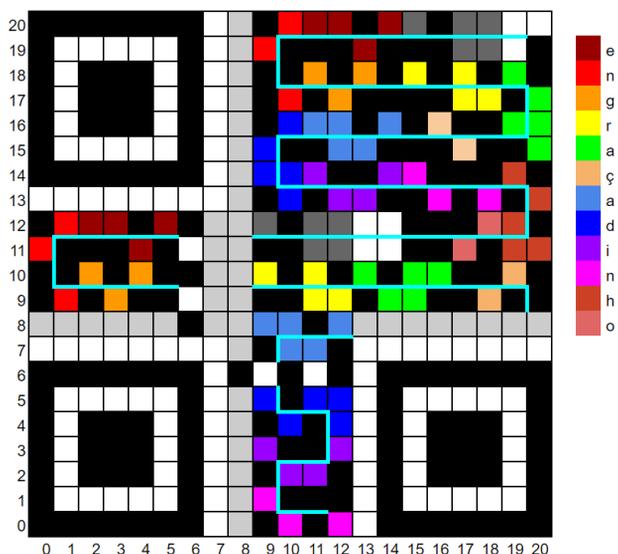


Figura 15: Estruturação da mensagem no QR Code. Fonte: Produção dos próprios autores.

Retomando a estruturação da mensagem na matriz, à esquerda do código que indica o tipo de dados utilizado, inserimos o indicador de contagem de caracteres, seguido da mensagem original. Em algumas versões, a cadeia de *bits* final pode não ser longa o suficiente para preencher o número total de *bits* na matriz. Nesse caso, é necessário adicionar um certo número de 0 ao final da mensagem para alcançar o comprimento correto. Esses 0 adicionais são conhecidos como *bits restantes*.

Para estruturar a mensagem da Tabela 2, escolhemos a versão 1 do QR Code, pois ela possui capacidade suficiente para acomodar a nossa mensagem. Nessa versão, são adicionados 4 *bits* restantes ao final da mensagem. Se a sequência de *bits* restantes for menor que 4 *bits* para atingir o final do QR Code, devemos adicionar apenas o número de zeros necessários para atingir o comprimento desejado. Após a sequência de zeros, a mensagem é repetida.

Durante a inserção dos *bits* na matriz, quando um padrão de função é encontrado, todos os módulos ocupados são ignorados até que o próximo módulo não utilizado seja alcançado. Da mesma forma, quando o padrão de alinhamento é encontrado, os módulos que fazem parte desse padrão são pulados, e a inserção dos *bits* continua em uma direção descendente.

A Figura 15 apresenta um exemplo da estruturação de uma mensagem no QR Code. O caminho percorrido pelos leitores de QR Code ao ler a mensagem é representado pela linha ciano. A leitura da mensagem começa a partir do padrão de armazenamento de dados e segue em ziguezague. Ao “caminhar” sobre o primeiro segmento da linha um padrão de localização deve estar à esquerda.

## 5. Máscaras

O mascaramento de informações é uma técnica aplicada aos dados codificados no QR Code, com o propósito de torná-los mais legíveis e evitar grandes proporções de *pixels* da mesma cor juntos. Existem oito padrões de máscaras disponíveis, cada um com o objetivo de modificar a aparência final do QR Code de diferentes formas. Cada máscara possui uma fórmula que determinará se o *pixel* será preto ou branco (veja a Tabela 3); se a fórmula funcionar, então o *pixel* será preto.

Máscara	Bits	Fórmula
0	000	$(i + j) \% 2 = 0$
1	001	$i \% 2 = 0$
2	010	$(j) \% 3 = 0$
3	011	$(i + j) \% 3 = 0$
4	100	$([(i/2) + [j/3]] \% 2 = 0$
5	101	$((i * j) \% 2) + ((i * j) \% 3) = 0$
6	110	$((((i * j) \% 2) + ((i * j) \% 3)) \% 2 = 0$
7	111	$((((i + j) \% 2) + ((i * j) \% 3)) \% 2 = 0$

Tabela 3: Fórmula e representação em *bits* das máscaras. Fonte: Produção dos próprios autores.

Na Tabela 3, o símbolo *i* representa a linha, o *j* representa a coluna, a % representa o resto da divisão e o símbolo [] representam o “maior inteiro menor que”.

Cada *pixel* da máscara possui uma função específica: o *pixel* preto inverte a cor do *pixel* original, enquanto o *pixel* branco mantém a cor do *pixel* original. Essa técnica pode ser compreendida como a sobreposição da máscara sobre a mensagem original, resultando na soma dos valores correspondentes a cada *pixel* na mensagem. Nesse contexto, o *pixel* preto representa o valor 1, e por isso

ocorre a inversão de cor, enquanto o *pixel* branco representa o valor 0, mantendo a cor original, lembrando que na base 2,  $1 + 1 = 0$ .

É importante ressaltar que os padrões de máscara devem ser aplicados exclusivamente na mensagem, essa restrição garante que os padrões relevantes para a interpretação e decodificação da mensagem não sejam afetados pelo mascaramento.

A Figura 16 mostra a aplicação da máscara 2 em uma parte da nossa mensagem e a Figura 17 mostra a posição onde o padrão de máscara deve ser colocado.

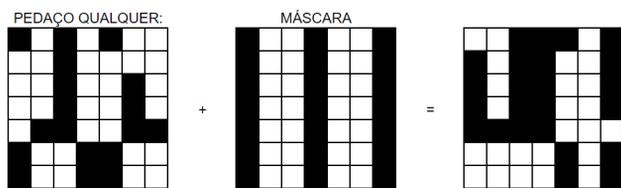


Figura 16: Exemplo de aplicação da máscara 010.  
Fonte: Produção dos próprios autores.

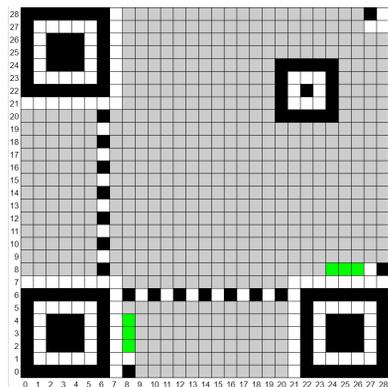


Figura 17: Posição do padrão de máscara. O padrão é definido pela coluna Bits da Tabela 3. Fonte: Produção dos próprios autores.

O gerador de QR Code seleciona a máscara mais adequada aplicando uma série de penalidades. Para determinar a melhor máscara, o gerador testará individualmente cada uma delas e escolherá aquela que apresentar a menor penalidade. A Tabela 4 apresenta essas penalidades.

Grau da penalidade	Característica
1	Grupo de cinco ou mais <i>bits</i> da mesma cor em uma linha (ou coluna).
2	Área $2 \times 2$ de módulos da mesma cor na matriz.
3	Padrões semelhantes aos padrões de localização.
4	Grande quantidade de <i>pixels</i> pretos ou brancos.

Tabela 4: Penalidades. Fonte: Produção dos próprios autores.

É importante destacar que as penalidades são aplicadas em todo o código, incluindo todos os padrões mencionados anteriormente, mesmo que a máscara não seja aplicada nesses padrões específicos. Isso significa que as penalidades são consideradas globalmente, levando em conta a estrutura completa do QR Code, a fim de garantir a melhor legibilidade e detecção do código pelos leitores.

A Figura 18 mostra o QR Code final da nossa mensagem. É possível fazer a leitura deste QR Code com um leitor e obter a mensagem “engraçadinho”.



Versão do QR Code: Versão 1;  
Canto inferior esquerdo dos padrões localizadores posicionados em  $(0,0)$ ,  $(14,0)$  e  $(0,14)$ ;  
Tipo de armazenamento de dados: *Byte*;  
*Dark module* posicionado em  $(13,8)$ ;  
Nível de correção de erro: M;  
Máscara: 110.

Figura 18: QR Code final da mensagem que construímos gerado por aplicativo [10].

## 6. Proposta didática

A proposta didática foi organizada em quatro partes, cada uma correspondendo a uma aula. A primeira aula aborda a conversão decimal-binário, a segunda aula trata da transformação binário-bytes, a terceira aula concentra-se na construção do QR Code, e a quarta aula aborda o mascaramento da mensagem. Ao fim da proposta, foi organizada uma atividade complementar opcional destinada ao aprofundamento do entendimento sobre matrizes com o auxílio do QR Code. Recomenda-se que as atividades sejam conduzidas com alunos do ensino médio, sendo aconselhável a divisão da turma em grupos para promover uma participação mais ativa e colaborativa durante as aulas.

### 6.1. Aula 1: Conversão decimal - binário

O objetivo dessa aula é compreender o processo de conversão de um número que está na base decimal para a base binária, onde serão apresentadas duas abordagens diferentes de conversão, a fim de enriquecer a compreensão do processo.

**Atividade disparadora para aula:** Escolha um número e transforme-o em binário.

#### • Método das divisões sucessivas

O método de conversão consiste em dividir o número, que está em base decimal, sucessivamente por 2 e analisando o resto resultante de cada divisão. A seguir, expomos o passo a passo usando o número decimal 101 como exemplo. Como mostrado na Figura 19, o número 101 será dividido por 2, de modo que obtemos quociente 50 e resto 1 (circulado em vermelho); em seguida, o número 50 será dividido por 2, gerando quociente 25 e resto 0; o método segue assim até chegarmos em um quociente igual a 0.

Agora, lemos os restos da divisão de baixo para cima, ou seja o resto da última divisão até a primeira, para obter o número binário equivalente:  $101 = (1100101)_2$ . Uma boa maneira de relembrar a direção em que o número deve ser lido é pensando na maior e menor potência. O resto da última divisão corresponde à maior potência de 2, logo faz sentido imaginar que esse resto equivale ao dígito mais à esquerda.

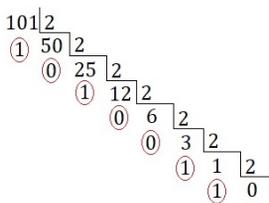


Figura 19: Método das divisões sucessivas. Fonte: Produção dos próprios autores.

• **Método de decomposição em potências de base 2**

Esse método consiste em decompor um número na base decimal em suas potências de 2, partindo da maior potência possível que ainda “caiba” no número e, em seguida, utilizando potências menores até alcançar o valor desejado.

Para o passo a passo usaremos o número na base decimal 101 como exemplo novamente. A potência de 2 mais próxima do decimal que será convertido é  $2^6 = 64$ . Agora pensaremos em outra potência menor que somado ao 64 chegue próximo ao 101,  $2^5 = 32$ . Assim, nós já temos  $64 + 32 = 96$ , porém ainda não alcançamos 101, que é nosso objetivo, então continuaremos fazendo o mesmo. Observe que não é possível utilizar  $2^4$  pois equivale a 16 e  $64 + 32 + 16 = 112$ , então teríamos que recorrer a potências menores. Repetindo o mesmo pensamento seria possível utilizar:  $2^6, 2^5, 2^2, 2^0$ . Dessa forma,  $64 + 32 + 4 + 1 = 101$ . Veja a Tabela 5.

$2^7$	$2^6$	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$
128	64	32	16	8	4	2	1
0	1	1	0	0	1	0	1

Tabela 5: Decomposição do decimal 101. Fonte: Produção dos próprios autores.

Esta atividade possibilita a apresentação da base binária de forma contextualizada. Esta linguagem é usada para gravar comandos no processador de um computador (EM13MAT405).

**6.2. Aula 2: Transformação binário - bytes**

Inicialmente, os alunos devem escolher uma mensagem para codificar e acessar o *site* [7] para identificar qual número na base decimal está associado a cada caractere selecionado.

**Atividade disparadora para aula:** Defina uma mensagem e transforme em *bytes* Figura 20.

LETRA	BINÁRIO	BYTE									

Figura 20: Exemplo de tabela suporte. Fonte: Produção dos próprios autores.

Já com a mensagem escrita em binário, preencha a tabela da Figura 20 lembrando da disposição dos *bits* em *bytes* como visto na Seção 4. A seguir temos um exemplo do que deve ser feito usando a mensagem “engraçadinho”.

LETRA	BINÁRIO	BYTE	LETRA	BINÁRIO	BYTE	LETRA	BINÁRIO	BYTE	LETRA	BINÁRIO	BYTE
e	1100101		r	1110010		a	1100001		n	1101110	
n	1101110		a	1100001		d	1100100		h	1101000	
g	1100111		ç	11100111		i	1101001		o	1101111	

Figura 21: Gabarito da atividade com a mensagem “engraçadinho”. Fonte: Produção dos próprios autores.

Esta atividade permite que os estudantes entendam como um computador organiza os *bits* em sua memória (EM13MAT405).

### 6.3. Aula 3: Construção do QR Code no plano.

Neste ponto da sequencia didática, veremos o QR Code tomando forma. Queremos preencher uma região plana limitada, cujo tamanho será definido pela versão do QR Code, com *pixels* pretos e brancos que levarão em consideração os padrões e a mensagem que temos.

**Atividade disparadora para aula:** Construa o QR Code no plano seguindo as coordenadas referentes a cada padrão, registre esses dados e estruture a mensagem no plano cartesiano.

A Tabela 6 contém informações de coordenadas de alguns padrões, onde V representa a versão do QR Code escolhida pelo aluno. Observe que algumas células estão em branco, no entanto, é possível inferir as coordenadas referentes a essas células a partir dos padrões que estão destacados, e para descobrir as coordenadas dos padrões de alinhamento basta seguir a Tabela 6.

Padrão	Coordenada
Canto inferior esquerdo do padrão localizador inferior esquerdo	(0,0)
Canto inferior esquerdo do padrão localizador inferior direito	$(\lfloor \frac{((V-1) \cdot 4) + 21}{2} \rfloor - 7, 0)$
Canto inferior esquerdo do padrão localizador superior	$(0, \lfloor \frac{(((V-1) * 4) + 21) - 7}{2} \rfloor)$
<i>Dark module</i>	$(\lfloor \frac{(4 * V) + 9}{2} \rfloor, 8)$
<i>Pixel</i> qualquer de cada separador	
<i>Pixel</i> qualquer de cada padrão de temporização	
<i>Pixels</i> do padrão de correção de erro	
<i>Pixels</i> do padrão de armazenamento de dados	
<i>Pixel</i> qualquer da <i>string</i> de formato	

Tabela 6: Tabela de coordenadas. Fonte: Produção dos próprios autores.

Em seguida, com tabela similar à da Figura 20 e a Tabela 6 preenchidas, estruture o QR Code no plano cartesiano da Figura 22. É importante lembrar das áreas reservadas e estruturação adequada da mensagem, como visto nas Seções 3.7 e 4, respectivamente.

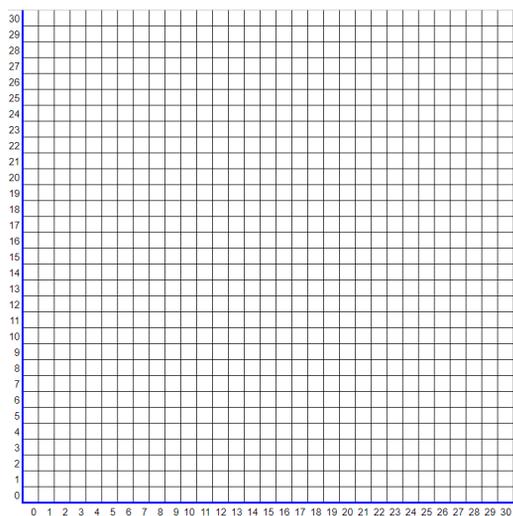


Figura 22: Exemplo do plano cartesiano. Fonte: Produção dos próprios autores.

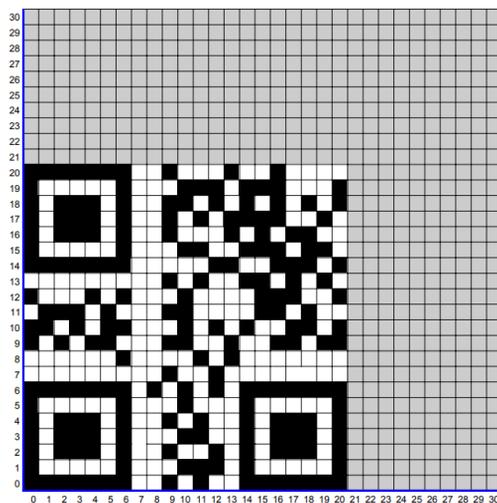


Figura 23: Gabarito da atividade com a mensagem “engraçadinho”. Fonte: Produção dos próprios autores.

Esta atividade exige que posicionemos os *bytes* correspondentes a cada caractere da mensagem no QR Code por meio de translações, reflexões e rotações (EM13MAT105).

#### 6.4. Aula 4: Mascaramento da mensagem

O último passo para finalizar a sequência didática será a aplicação de uma das máscaras apresentadas anteriormente na Tabela 3.

**Atividade disparadora para aula:** Aplique a máscara determinada ao seu grupo à sua mensagem.

Cada grupo receberá uma das oito máscaras presentes na Tabela 3 e deverá aplicá-la na estrutura montada no plano cartesiano seguindo as orientações da Seção 5. Para finalizar, adiciona-se as strings de formato e informação de versão.

Repare que o QR Code que construímos, presente na Figura 26 condiz com o QR Code da Figura 18.

Esta atividade estimula a realização de operações na base binária. Tais operações são realizadas rotineiramente pelos computadores em todos os seus processos (EM13MAT405).

A fim de promover a reprodutibilidade do nosso trabalho, disponibilizamos as planilhas usadas na construção dos QR Codes apresentados neste trabalho [11]. Desse modo, outros estudantes e professores poderão reproduzir e adaptar os QR Codes aos seus propósitos.

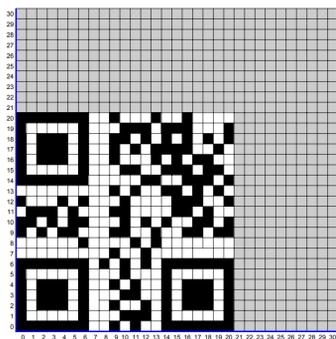


Figura 24: QR Code original.  
Fonte: Produção dos próprios autores.

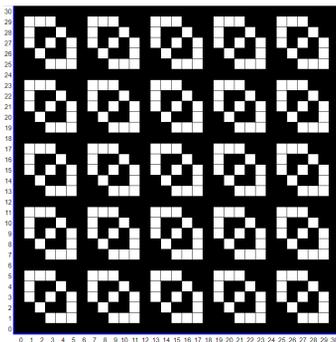


Figura 25: Máscara (110).  
Fonte: Produção dos próprios autores.

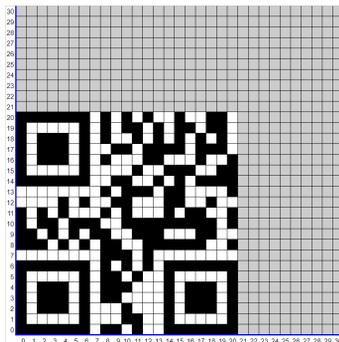
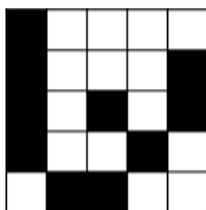


Figura 26: QR Code final.  
Fonte: Produção dos próprios autores.

### 6.5. Aula extra

Esta aula pode ser usada como uma aula complementar para que os alunos vejam outras funcionalidades das matrizes e de suas operações.

**Orientações:** Como sugestão de atividade complementar, podemos explorar a representação de um QR Code como uma matriz. Nessa atividade, cada *pixel* do QR Code será associado a uma entrada em uma matriz, em que o branco será representado pelo número 0 e o preto pelo número 1.



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 27: Matriz associada ao canto superior direito do QR Code da Figura 23. Fonte: Produção dos próprios autores.

Além disso, podemos aplicar o mascaramento do QR Code utilizando a soma de matrizes na base 2. No exemplo a seguir, a primeira matriz é a mesma da Figura 27, a segunda matriz é associada à máscara 110 e a terceira é o resultado do mascaramento.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 7. Conclusão

Nossa expectativa ao elaborar esse artigo foi de, por um lado, explicar como funciona um instrumento presente no nosso cotidiano, e, por outro lado, mostrar onde a Matemática encontra-se nesse assunto e como ela contribui para a eficácia e utilidade do QR Code. Ao explorar a interseção entre a tecnologia e a Matemática, pudemos perceber como os algoritmos e os princípios matemáticos contidos são essenciais para a criação e decodificação dos QR Codes. À medida que continuamos a avançar em um mundo cada vez mais digital, o QR Code certamente desempenhará um papel fundamental em nossa interação com a informação. Portanto, esperamos que com este artigo, tenhamos fornecido informações suficientes para cativar professores e estudantes.

## Referências

- [1] Answers to your questions about the QR Code. Disponível em: <<https://www.qrcode.com/en/>>. Acesso em: 11 de junho de 2023.
- [2] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018.
- [3] Código QR. Wikipédia. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/C%C3%B3digo\\_QR](https://pt.wikipedia.org/wiki/C%C3%B3digo_QR)>. Acesso em: 11 de junho de 2023.
- [4] Leitor de código QR. Google Play. Disponível em <<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.teacapps.barcodescanner>>. Acesso em: 20 de julho de 2023.
- [5] Scanner de QR Código de Barras. Google Play. Disponível em <<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.gamma.scan>>. Acesso em: 20 de julho de 2023.
- [6] ROUSSEAU.C; SAINT-AUBIN, Y. *Matemática e atualidade* volume 1. Rio de Janeiro: SBM, 2015 (Coleção PROFMAT).
- [7] Tabela ISO/IEC 8859-1. Wikipédia. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/ISO/IEC\\_8859-1](https://pt.wikipedia.org/wiki/ISO/IEC_8859-1)>. Acesso em: 11 de junho de 2023.
- [8] ISO/IEC 8859-1 (codificação de caracteres do alfabeto latino). Disponível em: <<https://www.iso.org/standard/28245.html>>. Acesso em: 02 de janeiro de 2024.
- [9] Format and Version String Tables. Thonky, 2023. Disponível em: <<https://www.thonky.com/qr-code-tutorial/format-version-table>>. Acesso em: 11 de junho de 2023.
- [10] QR Code Monkey. Disponível em: <<https://www.qrcode-monkey.com/pt/#text>>. Acesso em: 11 de junho de 2023.
- [11] Planilhas usadas na construção dos QR Codes. Disponível em: <<https://docs.google.com/spreadsheets/d/1ACuWwtCYjvtCrUIZNw4CeN7a2emljqKw7fXH22Q2X5E/edit?usp=sharing>>.
- [12] QR Code Tutorial. Disponível em: <<https://www.thonky.com/qr-code-tutorial/>>. Acesso em: 11 de junho de 2023.
- [13] Silva, Alberto Renan Dias. A matemática do código de barra e QR code. Orientador: Silas Fantin. 2021. 70f. Dissertação, Pós-graduação em matemática, Profmat, Unirio, Rio de Janeiro. 2021. Disponível em: <[https://sca.profmata-sbm.org.br/profmata\\_tcc.php?id1=6556&id2=171055699](https://sca.profmata-sbm.org.br/profmata_tcc.php?id1=6556&id2=171055699)>. Acesso em: 11 de junho de 2023.
- [14] Stroski, Pedro Ney. Código QR: O que é e como funciona? Electrical e library, 2019. Disponível em: <<https://www.electricalibrary.com/2019/11/22/codigo-qr-o-que-e-e-como-funciona/>>. Acesso em: 11 de junho de 2023.

Rodrigo Araujo de Souza  
Universidade Federal do Espírito Santo  
<[rodrigoaraujo8@live.com](mailto:rodrigoaraujo8@live.com)>

Thainá Lopes Ferreira  
Universidade Federal do Espírito Santo  
<[profathainafferreira@gmail.com](mailto:profathainafferreira@gmail.com)>

Weslaine Herzog Santos  
Universidade Federal do Espírito Santo  
<[weslainehs@outlook.com](mailto:weslainehs@outlook.com)>

Alcebiades Dal Col  
Universidade Federal do Espírito Santo  
<[alcebiades.col@ufes.br](mailto:alcebiades.col@ufes.br)>

Recebido: 20/04/2020  
Publicado: 08/03/2024

# Maximização Angular (revisitação ao problema de Regiomontanus)

Antonio Cardoso do Amaral 

Sandoel Vieira 

## Resumo

Este trabalho apresenta uma solução elementar para o problema de Regiomontanus, que consiste em encontrar a distância entre um observador e uma parede que tem um quadro (pintura) pendurado, de modo que o ângulo de visão seja máximo. A solução apresentada no artigo utiliza apenas conceitos básicos de geometria, em particular, a semelhança de triângulos. Além disso, o trabalho compara a solução elementar proposta com soluções mais sofisticadas que utilizam cálculo e otimização. O artigo apresenta uma solução simples e eficiente para um problema clássico de otimização em geometria. Para encerrar, trazemos uma reflexão acerca das abordagens de problemas na sala de aula de Matemática, sob a ótica do conceito de problematização, no escopo do que definimos como uma abordagem problematizada.

**Palavras-chave:** Otimização; Regiomontanus; Geometria Elementar; Problematização.

## Abstract

This paper presents an elementary solution to the Regiomontanus problem, which consists of finding the distance between an observer and a wall with a hanging frame (painting) in such a way that the viewing angle is maximized. The solution presented in the article uses only basic concepts of geometry, particularly the similarity of triangles. Furthermore, the paper compares the proposed elementary solution with more sophisticated ones that involve calculus and optimization. The article offers a simple and efficient solution to a classical optimization problem in geometry. Finally, we provide a reflection on problem-solving approaches in the mathematics classroom, from the perspective of the concept of problematization, within the scope of what we define as a problematized approach.

**Keywords:** Optimization; Regiomontanus; Elementary geometry

## 1. Introdução

O termo Regiomontanus vem da expressão “Montanha do Rei”, como era conhecida a antiga cidade de Königsberg (na antiga Prússia), hoje Kalinigrado, uma região exclave da Rússia, localizada na costa do Mar Báltico entre a Polônia e a Lituânia.

Foi nessa região montanhosa da antiga Prússia onde viveu, no século XV, o matemático e astrônomo Johann Müller von Königsberg (1436-1476). Certamente por isso, Johannes Müller passou a ser conhecido pela alcunha de Regiomontanus.

Regiomontanus [4] foi um dos matemáticos mais importantes do século XV, e pode ter sido o primeiro matemático a problematizar questões sobre máximos e mínimos. Um problema muito conhecido e atribuído a Regiomontanus trata da maximização de um ângulo segundo ver-se uma pintura pendurada em uma parede. Na página da *Wikipedia*, [6], traduzido para a língua portuguesa, encontra-se uma versão:

*Uma pintura está pendurada em uma parede. Dadas as alturas da parte superior e inferior da pintura acima do nível dos olhos do espectador, qual distância da parede o espectador deve ficar para maximizar o ângulo subtendido pela pintura e cujo vértice está aos olhos do espectador?*

(Wikipedia, 2023)

O problema sugere intuitivamente que o maior ângulo de visão não estará muito longe nem tão próximo da parede.

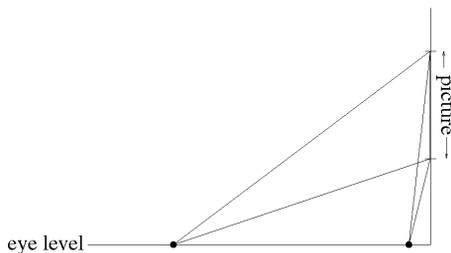


Figura 1: Representação Geométrica. Fonte: *Wikipedia* [6]

O problema de maximização do ângulo (de Regiomontanus) não é muito desconhecido, normalmente é utilizado como situação-problema em livros de Cálculo no estudo sobre Otimização. Em [5], exatamente na página 303, há uma interessante variação do problema:

71. Um observador permanece em um ponto  $P$ , distante uma unidade de uma pista. Dois corredores iniciam no ponto  $S$  da figura e correm ao longo da pista. Um corredor corre três vezes mais rápido que o outro. Encontre o valor máximo do ângulo  $\theta$  de visão do observador entre os corredores. [Dica: Maximize  $\tan \theta$ .]

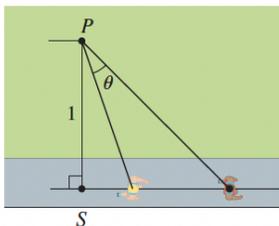


Figura 2: Variação do Problema de Regiomontanus. Fonte: Stewart [2017, p. 303]

O problema de maximização de um ângulo, frente a um anteparo fixado, pode se apresentar em diferentes aplicações da matemática, mas não precisa que a situação-problema tenha sua resolução restrita à matéria do ensino superior.

O interesse em olhar para essa questão bem particular foi motivado por uma lista de problemas apresentada na segunda versão do Programa de Aperfeiçoamento de Professores Olímpicos (Prolímpico) — Projeto organizado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Impa). O Prolímpico é um programa que “visa oferecer treinamento gratuito para professores de matemática de todo o Brasil, abordando assuntos relativos às olimpíadas de matemática do ensino básico” [3]. Em função da pandemia da Covid-19 suas atividades ocorreram de forma remota entre os dias 23 de fevereiro e 04 de março de 2021.

A ideia de escrever este texto partiu da tentativa de resolver o último problema da primeira lista do nível B. Essa lista de problemas é organizada para professores do Ensino Fundamental (anos finais) e Ensino Médio. Logo, um problema cuja resolução esperada privilegia, eventualmente, o uso dos recursos elementares de Geometria Plana.

## 2. O Problema apresentado no Prolímpico

O quinto problema da primeira lista de atividades causou estranhamento entre os participantes, pois a maneira mais trivial de abordá-lo sugeria o uso da trigonometria em sua resolução. No entanto, tradicionalmente, a trigonometria não faz parte das “ferramentas” comumente utilizadas pelos estudantes olímpicos. Isso levou à busca por uma solução que exigisse uma dose de engenhosidade mais ou menos incomum.

A seguir a versão apresentada na lista.

*Em uma parede há uma grande pintura. A borda inferior da pintura está a uma distância  $b$  do chão, e a borda superior está a uma distância  $a$  do chão. Um observador, do chão, quer maximizar o ângulo com o qual consegue ver a pintura. Em outras palavras, se  $P$  é um ponto no chão e  $A$  e  $B$  são os limites da pintura, quer-se maximizar o ângulo  $\widehat{APB}$ . A qual distância da parede deve ficar o observador? (Prolímpico, 2021)*

O problema é exatamente o de maximização do ângulo de Regiomontanus. Para melhor ilustrar, a figura a seguir expressa o observador em duas posições distintas ( $P_1$  e  $P_2$ ), e a pintura ( $AB$ ).

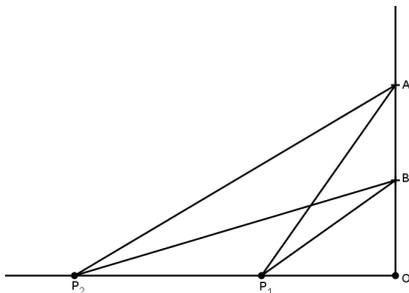


Figura 3: Problema 05 - Prolímpico - Nível B. Fonte: Construção Nossa

Elaboramos diferentes resoluções para o problema: desde a resolução com recurso ao uso de derivadas à solução considerada a mais engenhosa (aquela que recorre apenas ao uso de geometria elementar). Para encerrar apresentaremos uma solução que emerge da manipulação geométrica a partir do *software* Geogebra especialmente da exploração do conceito de Lugar Geométrico.

### 2.1. Resolução com recurso à trigonometria e uso de derivadas.

Na nossa abordagem, Figura 4, o observador está indicado por P, as alturas dos extremos inferior e superior, B e A, por b e a; e a distância do observador à parede, por x. Desse jeito, se  $\widehat{APO} = \alpha$ ,  $\widehat{BPO} = \beta$ , teremos, para cada valor de x no intervalo  $[0, \infty)$ , uma variação  $\theta(x) = \alpha - \beta$  no intervalo  $[0, \pi/2)$ .

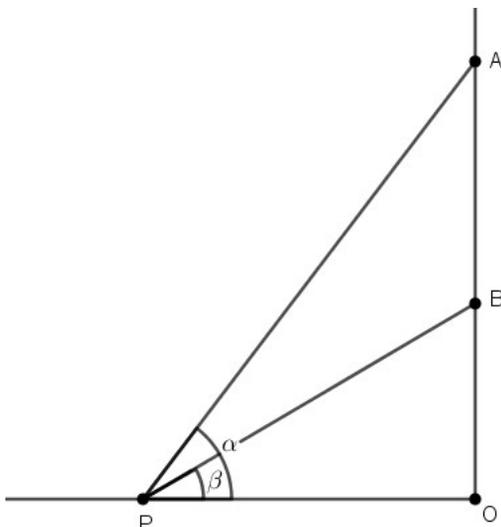


Figura 4: Resolução por derivada. Fonte: Construção Nossa

Pela figura, e pelo uso das relações trigonométricas,

$$\tan \theta(x) = \tan (\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{a}{x} - \frac{b}{x}}{1 + \frac{a}{x} \cdot \frac{b}{x}} = (a - b) \cdot \frac{x}{x^2 + ab}.$$

Ou seja, para  $x \in [0, \infty)$ , teremos

$$\tan \theta(x) = (a - b) \cdot f(x), \tag{1}$$

onde  $f(x) = x/(x^2 + ab)$ .

Uma vez que a função  $[0, \pi/2) \ni \theta \mapsto \tan \theta$  é crescente e  $0 \leq \theta(x) < \pi/2$ , maximizar  $\theta(x)$  equivale a maximizar  $\tan \theta(x)$ ; e como  $(a-b)$  é uma constante real, o problema reduz-se a maximizar  $f(x)$ .

Para otimizar a função  $[0, \infty) \ni x \mapsto f(x)$ , e para a melhor interpretação das regiões de monotonicidades de  $f$ , usaremos o cálculo da derivada de  $f$ . Ora,

$$f'(x) = \frac{ab - x^2}{(x^2 + ab)^2} \begin{cases} > 0, & \text{se } 0 \leq x < \sqrt{ab} \\ = 0, & \text{se } x = \sqrt{ab} \\ < 0, & \text{se } x > \sqrt{ab} \end{cases},$$

obtemos que  $f$  é crescente no intervalo  $[0, \sqrt{ab}]$  e decrescente no intervalo  $[\sqrt{ab}, \infty]$ , assumindo então o valor de máximo no ponto  $x = \sqrt{ab}$  tornando-se a medida  $x$  de OP para o ângulo máximo de Regiomontanus, veja a Figura 5. A saber, por (1) obtemos que o ângulo de maximização é dado por  $\theta = \arctan\left(\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}\right)$  no intervalo  $[0, \pi/2)$ .

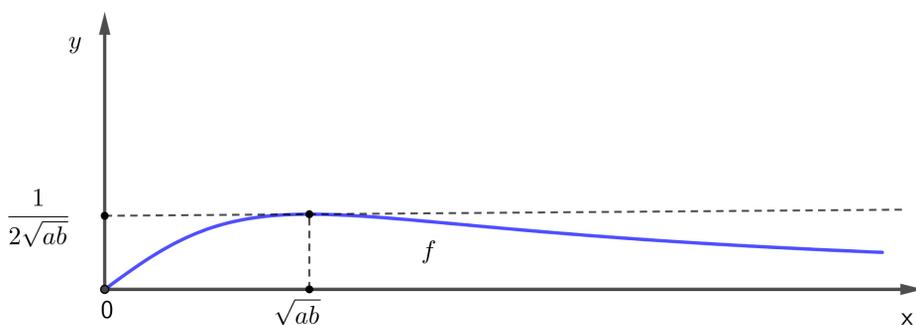


Figura 5: Comportamento da função  $f$ . Fonte: Construção Nossa

### 2.1.1 Com recurso à desigualdade das médias aritmética e geométrica.

Dados  $x$  e  $y$  reais a desigualdade  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$  resulta em  $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ , ocorrendo a igualdade se, e somente se,  $x = y$ . Temos, portanto, uma das identidades mais usadas em matemática para a solução de problemas: a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica com respeito a dois números reais  $x$  e  $y$ .

Desigualdades são um excelente recurso à resolução de problemas de máximos e mínimos. Por isso, queremos destacar uma solução, já conhecida para o problema de Regiomontanus, que usa a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. Nessa solução seguiremos a mesma linha de raciocínio do início da anterior.

Voltamos à Equação (1):  $\tan \theta(x) = (a-b) \cdot f(x)$ . Agora, em vez de recorrer ao cálculo de derivadas para o processo de maximização, recorreremos ao uso de desigualdades. Para tanto, reescrevemos a

função  $f$  como

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + ab} = \frac{1}{x + \frac{ab}{x}},$$

onde  $x > 0$  é a medida do segmento  $OP$ . (É claro que  $x = 0$  não é o caso de máxima visualização do ângulo de observação).

Novamente, para que  $\tan \theta(x)$  (respectivamente  $\theta(x)$ ) seja máximo, é suficiente que  $f(x)$  seja maximizado, e isso ocorre quando o denominador  $x + \frac{ab}{x}$  assume o menor valor possível. Para isso, considerando os termos  $x$  e  $\frac{ab}{x}$ , a desigualdade acima diz que:

$$\frac{x + \frac{ab}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{ab}{x}} \Rightarrow x + \frac{ab}{x} \geq 2\sqrt{ab}$$

E o menor valor da expressão  $x + \frac{ab}{x}$  ocorre quando  $x = \frac{ab}{x}$ . Isto é, quando  $x = \sqrt{ab}$ .

## 2.2. Resolução por Potência de Pontos.

Apresentaremos agora a resolução que usa conceitos ensinados no Ensino Fundamental — especialmente nos treinamentos olímpicos para o Nível 2 (8° e 9° anos). É uma solução geométrica considerada bastante elegante. E, depois de feita, considerada fácil, claro!

A rigor, alunos olímpicos são treinados para encontrar soluções para problemas difíceis utilizando a menor quantidade possível de conteúdos curriculares. Portanto, eles nos surpreendem com sua capacidade e sagacidade ao serem capazes de enxergar respostas que não são tão simples de identificar.

Com essa abordagem, podemos analisar um problema mais amplo do que aquele que foi inicialmente apresentado:

*Em uma parede há uma pintura. A borda inferior  $B$  da pintura está a uma distância  $b$  do chão, e a borda superior  $A$  está a uma distância  $a$  do chão. Um observador  $P$ , em uma reta  $L(\alpha)$  formando um ângulo  $\alpha \in (0, \pi)$  com a parede, quer maximizar o ângulo  $\widehat{APB}$  com o qual consegue ver a pintura, veja Figura 6. (Prolímpico adaptado, 2021)*

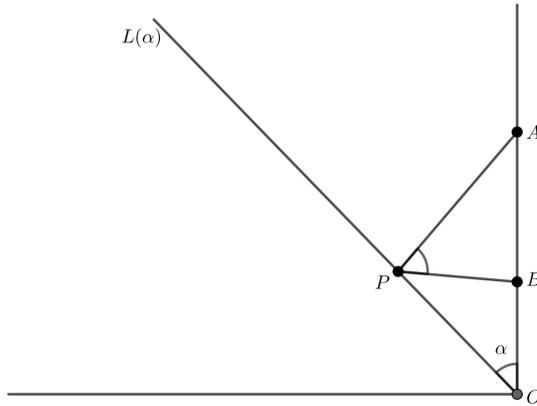


Figura 6: Problema de Regiomontanus adaptado. Fonte: Construção Nossa

A resposta ao problema surge inevitavelmente da construção de um círculo tangente à reta  $L(\alpha)$  no ponto  $P$ , passando pelos pontos  $A$  e  $B$ .

Para tal solução, provaremos que o ângulo  $\theta = \widehat{APB}$  de vértice  $P$ , ponto de tangência da reta  $L(\alpha)$  com o círculo, é o ângulo máximo de visualização do segmento  $AB$ . Ora, se  $P_1$  é um ponto à esquerda de  $P$  na reta  $L(\alpha)$ , Figura 7,  $\theta = \widehat{ACB}$  é um ângulo externo do triângulo  $BCP_1$  ( $\widehat{ACB}$  e  $\widehat{APB}$  são ângulos inscritos que “enxergam” o mesmo arco). Logo, pelo Teorema do Ângulo Externo,  $\theta$  é maior do que  $\widehat{AP_1B}$ . A verificação é análoga para o caso de um ponto à direita de  $P$ .

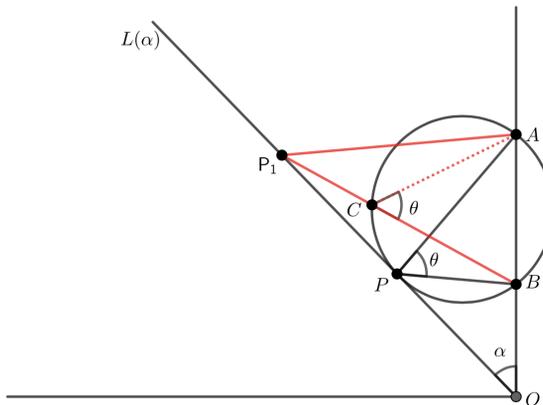


Figura 7: Ângulo Externo. Fonte: Construção Nossa

Com a certeza de que  $\theta$  é máximo exatamente no ponto  $P$  de tangência, precisamos apenas determinar a medida  $x$  do segmento  $OP$ . Para isso, usaremos a definição de Potência de Ponto de um

ponto dado  $O$ , Figura 8, em relação a uma circunferência.

**Definição 1.** Em um mesmo plano, dado um círculo  $\gamma$  de centro  $C$  e raio  $r$ , e um ponto  $O$  fora dele, denotaremos  $\text{Pot}_\gamma(O) = (OC)^2 - r^2$  como a **Potência de Ponto do ponto**  $O$  em relação a  $\gamma$ .

**Proposição 1.** Se  $t$  é uma reta que passa por  $O$  e corta  $\gamma$  em  $A$  e  $B$ , então  $\text{Pot}_\gamma(O) = OA \cdot OB$ .

*Demonstração.* Os ângulos  $\widehat{A'B'A}$  e  $\widehat{A'BA}$  são congruentes (compreendem o mesmo arco  $\widehat{A'A}$ ). Logo, teremos  $\triangle OB'A \sim \triangle OBA'$ . Portanto,

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{OA}{OA'} \Rightarrow OA \cdot OB = OA' \cdot OB' = (OC - r) \cdot (OC + r) = (OC)^2 - r^2.$$

Concluindo que  $\text{Pot}_\gamma(O) = OA \cdot OB$ . □

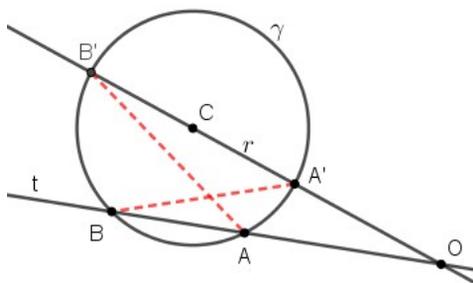


Figura 8: Potência de Pontos. Fonte: Construção Nossa

O que ocorre de fato aqui é que há uma importante invariante. Ora, a Potência de Ponto do ponto  $O$  em relação ao círculo  $\gamma$  é indiferente, independentemente da reta secante. Se  $t$  é tangente ao círculo,  $A \equiv B$ ,  $\text{Pot}_\gamma(O) = (OA)^2 = (OB)^2$ .

Voltando ao problema, especialmente na Figura 7, concluímos que  $(OP)^2 = OB \cdot OA$ , ou seja,  $x = \sqrt{ab}$ . Para calcularmos o ângulo de maximização  $\widehat{APB} = \theta(\alpha) \in (0, \pi)$  usaremos duas vezes a Lei dos Cossenos. Inicialmente nos triângulos  $\triangle OPB$  e  $\triangle OPA$ , obtendo  $(PB)^2 = ab + b^2 - 2b\sqrt{ab} \cos \alpha$  e  $(PA)^2 = ab + a^2 - 2a\sqrt{ab} \cos \alpha$ . E, finalmente, no triângulo  $\triangle APB$ , em que o ângulo  $\theta(\alpha)$  fica determinado como:

$$\cos \theta(\alpha) = \frac{4ab - 2\sqrt{ab}(a + b) \cos \alpha}{2\sqrt{b(a + b) - 2b\sqrt{ab} \cos \alpha} \cdot \sqrt{a(a + b) - 2a\sqrt{ab} \cos \alpha}}. \quad (2)$$

Para o problema de Regiomontanus inicial, onde o observador  $P$  está sobre o chão (eixo horizontal), ou seja, quando a inclinação da reta  $L(\alpha)$  é  $\alpha = \pi/2$ , temos que o ângulo de visualização máxima do observador é dado por

$$\theta(\pi/2) = \arccos \left( \frac{2\sqrt{ab}}{a + b} \right) \in [0, \pi).$$

Além disso, a partir da expressão (2), podemos inferir o ângulo  $\alpha \in (0, \pi)$  que a reta  $L(\alpha)$  deve formar com o eixo vertical, de modo que o ângulo de máxima visualização de um observador na reta  $L(\alpha)$  seja um ângulo reto, isto é,  $\theta(\alpha) = \pi/2$ . Vale destacar que o ângulo é dado por:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right) \in (0, \pi/2).$$

### 3. A solução elementar impulsionada por uma uma proposição

Outra forma de buscar a solução para o problema de Regiomontanus consiste em encontrar inicialmente a medida  $\theta$  do ângulo máximo de visão em termos de  $a$  e  $b$ , para depois encontrar a medida  $x$  de  $OP$ .

Nossa solução começa com a construção do círculo passando por  $P$ ,  $O$  e  $B$  — com o *software* GeoGebra. Ao ativar a função “rastros” do ponto  $Q$ , que é de intersecção do círculo com o segmento  $AP$ , e deslizar  $P$  na reta horizontal, emergem questões sobre a trajetória do ponto  $Q$ . Neste caso, a sugestão mais razoável é afirmar que o ponto  $Q$  tem sua trajetória sobre o semicírculo de diâmetro  $AB$ .

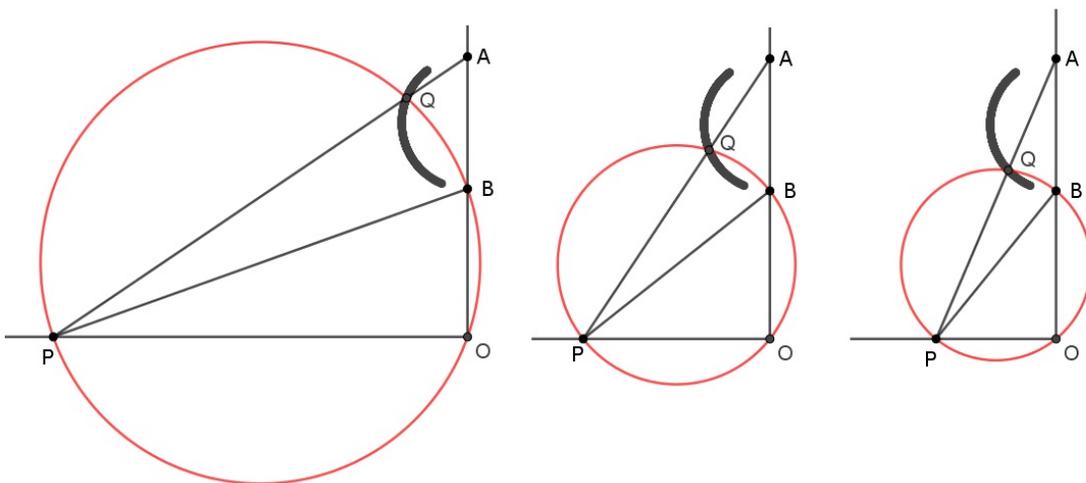


Figura 9: Lugar Geométrico do ponto Q. Fonte: Construção Nossa

Antes de prosseguir, cabe destacar a importância de questionar, conjecturar, indagar e, sobretudo, problematizar. Do ponto de vista do ensino, esse último termo engloba todos os processos que criam possibilidades para a construção de conhecimento, sem ignorar qualquer participação, erros ou a ausência de saberes especializados.

Há estudos que apontam a formação do professor que ensina matemática para os requisitos de um ensino que privilegia uma abordagem problematizada em detrimento àquela que segue um

circuito fechado de etapas preestabelecidas, colocando o estudante como espectador e, sobretudo, reproduzidor de conteúdos.

*Por matemática problematizada, entendemos uma concepção de possibilidades matemáticas, situadas em diversos contextos e práticas históricos e sociais de produção e de mobilização de saberes e de formas de estar no mundo. Uma abordagem de matemática de forma problematizada privilegia a produção de sentidos e de afetos, em lugar da exposição de fatos, procedimentos e informações.*

(GIRALDO, 2019)

A solução apresentada nesta seção oferece-se como uma possibilidade de abordagem capaz de criar condições para conjecturar, testar e pesquisar proposições auxiliares que sejam úteis para obter a resposta desejada. Portanto, é relevante para uma abordagem na sala de aula de matemática.

Para dar continuidade à resolução do problema de Regiomontanus, utilizando a geometria dinâmica como recurso, provaremos a conjectura percebida, de modo que uma simples proporção, originada da semelhança entre dois triângulos, forneça a solução desejada (Figura 10).

Já que  $PB$  é diâmetro do círculo (pois  $\widehat{POB}$  é reto), ou seja,  $\widehat{PQB}$  é reto, a verificação da afirmação de que o ponto  $Q$  tem sua trajetória sobre o semicírculo de diâmetro  $AB$  é verdadeira, porque o triângulo  $AQB$  é retângulo em  $Q$ .

Dessa construção, surge o ângulo  $\theta$  de maximização de Regiomontanus, como mostrado na Figura 10. Ora,  $\widehat{QPB}$  e  $\widehat{QOB}$  são ângulos inscritos que compreendem o mesmo arco ( $\widehat{BQ}$ ), logo, são congruentes. Como o círculo de diâmetro  $AB$  é fixo, o ângulo  $\theta$  é máximo exatamente quando a reta que contém  $OQ$  é tangente ao círculo, ou seja, no momento em que o triângulo  $\triangle MOQ$  é retângulo (em  $Q$ ).

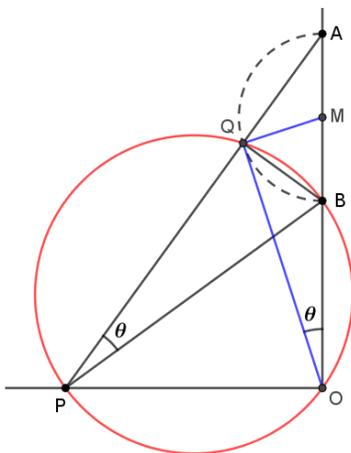


Figura 10: Maior Ângulo de Visão. Fonte: Construção Nossa

Observação: Se, de alguma maneira, o problema envolver o cálculo de  $\theta$  em termos de  $a$  e  $b$ , o

triângulo retângulo  $\triangle OQM$  fornece essa resposta, uma vez que as medidas de dois de seus lados são conhecidas.

Sendo  $\theta$  o ângulo máximo de Regiomontanus, para calcularmos a medida  $x$  de  $OP$ , mostraremos inicialmente que os triângulos retângulos  $\triangle APO$  e  $\triangle PBO$  são semelhantes. De fato, como

$$\widehat{BQO} + \widehat{BQM} = \widehat{OQM} = 90^\circ = \widehat{AQB} = \widehat{AQM} + \widehat{BQM},$$

temos  $\widehat{BQO} = \widehat{AQM} = \widehat{MAQ}$ . E, portanto,  $\widehat{BPO} = \widehat{OAP}$  (observe que  $\widehat{BQO}$  e  $\widehat{BPO}$  são ângulos inscritos que “enxergam” o mesmo arco). Logo,

$$\frac{OA}{OP} = \frac{OP}{OB} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = \sqrt{ab}$$

#### 4. Considerações Finais

O problema da maximização do ângulo de Regiomontanus, cuja abordagem foi escolhida para este trabalho, apresenta-se de tal forma que os objetos matemáticos aqui revisitados são importantes tanto do ponto de vista de suas funções quanto pelo potencial das possibilidades de uso e recursos matemáticos na resolução do problema. Embora não possamos afirmar com certeza o papel central do matemático Johannes Müller, que viveu no século XV, na resolução do problema do ângulo máximo de visão frente a um anteparo fixado, nem saibamos quem o resolveu pela primeira vez, temos certeza de que todo o conhecimento apresentado aqui para solucionar o problema foi construído levando em consideração contextos históricos e sociais. Portanto, foi um trabalho coletivo.

Essa compreensão da construção do conhecimento não pode ser dissociada da prática do professor na sala de aula, ou seja, criar oportunidades para discutir como os assuntos são abordados na sala de aula e tomar decisões coletivas como parte do papel do professor. Davis e Renert [1], *apud* Giraldo [2], estabelecem uma visão mais ampla do papel do docente:

*Professores não são agentes periféricos que têm como função transmitir passivamente uma matemática estabelecida. Ao contrário, são participantes vitais na produção de possibilidades matemáticas.*

(DAVIS e RENERT, 2009)

Essa visão enfatiza o alinhamento do trabalho do professor com a capacidade de tomar decisões que lhe é própria, ou que deve ser, como parte do reconhecimento profissional e do dever de reivindicação. Além disso, de acordo com Giraldo [2], uma abordagem não problematizada, que segue um ritual de etapas predefinidas, se distancia significativamente da verdadeira produção científica, que, rigorosamente, envolve incertezas e erros durante sua elaboração.

Esperamos sinceramente ter contribuído para a reflexão sobre as abordagens em sala de aula de diversos conteúdos de ensino. Escolhemos um problema clássico de otimização que se apresenta com potencial didático na aula de Matemática. As várias possibilidades de resolução, apoiadas em conceitos de diferentes áreas, dependendo da escolha para a solução, demonstram como problematizar, no sentido de desnaturalizar, e sair do padrão tradicional de abordagens, assemelhando-se mais aos problemas que surgiram ao longo do tempo e que puderam ser traduzidos em novos conhecimentos.

## Referências

- [1] Davis, Brent; Renert, M. *Mathematics for teaching as shared, dynamics participation*. For the Learning of Mathematics, Fredericton. v. 29, n, 3, p. 37-43, 2009.
- [2] Giraldo, V. *Que matemática para a formação de professores? Por uma matemática problematizada*. In: XIII Encontro Nacional de Educação Matemática (XIII ENEM) v. 1, p. 1-12. Cuiabá, SBEM, 2019.
- [3] Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Impa) *Programa de Aperfeiçoamento de Professores Olímpicos (Prolímpico)*. Rio de Janeiro, RJ: Impa, 2021.
- [4] Mello, J. L. P. *Trigonometria e Um Antigo Problema de Otimização*. RPM, n.52, 2006.
- [5] Stewart, J. *Cálculo*. Tradução de EZ2Translate. 7ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- [6] Wikipedia. *Regiomontanus' angle maximization problem*. In: Wikipedia: the free encyclopedia. Disponível em: <[https://en.wikipedia.org/wiki/Regiomontanus%27\\_angle\\_maximization\\_problem](https://en.wikipedia.org/wiki/Regiomontanus%27_angle_maximization_problem)>. Acesso em: 09 de abril de 2023.

Antonio Cardoso do Amaral  
Centro Estadual de Tempo Integral Augustinho Brandão  
Cocal dos Alves (PI)  
<[acadoamaral@gmail.com](mailto:acadoamaral@gmail.com)>

Sandoel Vieira  
Universidade Federal do Piauí-UFPI  
Teresina-PI  
<[sandoel.vieira@ufpi.edu.br](mailto:sandoel.vieira@ufpi.edu.br)>

Recebido: 24/09/2023  
Publicado: 20/03/2024

# Estudando funções e algoritmos por meio de origamis

Alice Kozakevicius<sup>1</sup> 

Maite Kulesza<sup>2</sup> 

## Resumo

Neste trabalho as dobraduras feitas em papel obtidas pela técnica japonesa de origami são consideradas como ponto inicial para definir e apresentar exemplos concretos de funções e suas compostas. Conceitos básicos como domínio, contradomínio e imagem de uma função são ilustrados via material concreto. A partir das dobraduras em origami, são explorados conceitos e definições como função injetora, função sobrejetora e função inversível. Além disso, observa-se que os origamis são exemplos naturais para composição de funções e para a obtenção da inversa dessas funções compostas. A contribuição da abordagem do conceito de função via origami aparece também na apresentação intuitiva e lúdica da definição de algoritmo, rotinas e sub rotinas.

**Palavras-chave:** origami; função composta; função inversível; algoritmo sequencial.

## Abstract

In this work, the paper folds obtained by the Japanese origami technique are considered as a starting point to define and present concrete examples of functions and their composites. Basic concepts like domain, range, direct and inverse image of a function are illustrated via concrete material. From the folds made via origami, concepts and definitions such as injective function, surjective function and invertible function are explored. In addition, origamis are natural examples for composition of functions and for obtaining the inverse of these composite functions. The contribution of the approach to the concept of function via origami is in the intuitive and playful presentation of the definition of algorithm, routines and subroutines.

**Keywords:** origami; composite function; invertible function, sequential algorithm

## 1. Introdução

O estudo de funções é um dos pontos centrais no Ensino de Matemática e é abordado desde o início da formalização e sistematização dos conteúdos, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio [11]. Uma parte relevante na abordagem sobre funções é a construção de exemplos nas mais variadas áreas de aplicação, assim como em situações do cotidiano [23].

Quanto ao ensino de algoritmos e lógica de programação nas escolas brasileiras, nas últimas três décadas muito tem sido pensado e feito para o desenvolvimento de metodologias de ensino adequadas para esses e outros tópicos referentes à computação [10]. Segundo [10], as primeiras experiências

<sup>1</sup>Parcialmente apoiado por UFSM

<sup>2</sup>Parcialmente apoiado pela UFRPE

educacionais com a linguagem LOGO remetem aos anos 90, seguidas pelas interfaces amigáveis e o desenvolvimento de ferramentas computacionais visando o perfil do usuário no início dos anos 2000, até uma ampla inserção da disciplina de programação em escolas de Ensino Fundamental e Médio após 2015. A busca por abordagens lúdicas para a apresentação de conceitos da área de computação tem sido frequente tanto em disciplinas de programação de cursos superiores [26], quanto em escolas de Ensino Médio e Fundamental [2], [24].

Neste sentido, o primeiro objetivo deste texto é propor uma apresentação dos conceitos e definições fundamentais envolvendo funções a partir de exemplos concretos, construídos de forma lúdica por meio de origamis. Em especial, os conceitos de domínio e imagem de uma função tornam-se palpáveis pela percepção da transformação da folha plana no início do processo e o origami obtido como resultado de todas as dobras realizadas. Como segundo objetivo, consideram-se os origamis como exemplos-chave para a definição do conceito de algoritmo. Novamente, a natureza sequencial das dobras feitas em papel ilustra de forma imediata o conceito de algoritmos sequenciais, nos quais o resultado em um passo intermediário é utilizado para a obtenção de um novo resultado no passo seguinte, até a obtenção do resultado final que caracteriza o passo final do algoritmo.

Origami (do japonês: *ori*, “dobrar”e, *kami*, “papel”) é a tradicional e secular arte japonesa de dobrar o papel, criando representações de determinados seres ou objetos com as dobras geométricas de um pedaço de papel. Há registros de que o origami tradicional japonês tenha sido praticado desde o Período Edo (1603-1868). Originalmente, não havia convenções ou restrições quanto à forma ou dimensões do papel utilizado, sendo permitido até mesmo o corte do papel durante a criação do objeto. No entanto, a partir da década de 1950, houve uma divisão entre a abordagem tradicional e uma abordagem criativa e sistematizada, proposta por Akira Yoshizawa [21], o que deu início a uma formalização e axiomatização das ações envolvidas nas dobras.

Além disso, a percepção de regras e propriedades matemáticas envolvidas nas construções via origami não é algo recente. Um trabalho relevante nesta linha data de 1893, quando T. Sundara Rao publicou *Geometric Exercises in Paper Folding*, no qual ele utilizava dobraduras em papel para ilustrar demonstrações de construções geométricas, originalmente desenvolvidas pelo uso de régua e compasso. A utilização de origamis para a verificação de propriedades geométricas e resultados matemáticos remete a estudos iniciais do século 19. Já em 1936, Margharita P. Beloch mostrou que certos tipos de dobraduras permitiam a resolução de uma equação cúbica qualquer por meio de origamis [15].

No entanto, foi apenas na década de 1980 que Humiaki Huzita constatou que todas as dobraduras feitas no papel poderiam ser formuladas apenas com um conjunto de 6 operações básicas, dando origem à formulação axiomática para origamis, denominados Axiomas de Huzita. Em 2021, um sétimo axioma foi adicionado por Koshiro Hatori [16], reformulando a denominação para Axiomas de Huzita-Hatori. Essa axiomatização abriu as portas para uma formulação algébrica e lógica das dobraduras em termos de operações matemáticas, ou seja, funções. Mais especificamente, funções polinomiais [12].

Para aqueles que fazem origami é natural o surgimento de perguntas que, em última análise, são de natureza matemática [15]. Existe um procedimento mais simples para dobrar uma determinada figura? De que parte do papel quadrado original formam-se as asas de um inseto obtido via dobraduras? Qual o tamanho de papel para se fazer uma cadeira que se encaixe a uma mesa que também foi feita de origami? É possível fazer um besouro de origami com seis pernas e duas antenas a partir de uma única folha de papel quadrada? Existe um procedimento preciso para dobrar um papel em cinco tiras iguais?

Questões como essas impulsionaram (e seguem impulsionando) o desenvolvimento de uma abordagem computacional para os problemas de dobraduras em papel. No início da década de 1990, o trabalho seminal de Robert Lang [7] revolucionou a maneira que o processo de idealização das dobraduras vinha sendo realizado até então. Lang propôs técnicas computacionais para se projetar objetos ricos em detalhes, de tal modo que esses pudessem ser construídos via origami, ou seja, dobraduras a partir de uma única folha de papel, seguindo apenas os 6 axiomas de Huzita. Além disso, questões ainda mais sofisticadas foram propostas por Lang em relação a dobraduras e suas propriedades computacionais. Ele desenvolveu um programa de computador que pode projetar toda a sequência de dobras necessárias para se construir uma figura “qualquer” via origami. Isso fez com que Robert Lang conseguisse criar animais de origami que eram considerados impossíveis anteriormente [18].

Recentemente, a teoria matemática envolvendo origamis tem sido aplicada para produzir uma incrível variedade de aplicações práticas. As novas tecnologias que estão sendo desenvolvidas incluem projetos de produtos de papel que não envolvem adesivos, melhores formas de dobrar mapas, desdobrar telescópios espaciais e velas solares, sistemas de *software* que testam a segurança de embalagens de *airbag* para fabricantes de automóveis e sistemas de inteligência artificial auto-organizados [21].

Este trabalho introdutório tem como objetivo utilizar origamis simples e seus diagramas na apresentação de conceitos sobre funções, de tal maneira que as dobraduras possam servir de fonte de inspiração para a compreensão e classificação de funções e operações com funções, como composição e inversão. Além disso, exploram-se conceitos iniciais de programação, como algoritmos sequenciais, formulados via rotinas e subrotinas.

## 2. Um pouco da história do Origami

O Origami é conhecido mundialmente como uma arte japonesa e, de fato, foi no Japão que essa técnica foi desenvolvida e, através de sua cultura e tradições, difundida e consagrada como expressão artística e religiosa. No entanto, de acordo com vários levantamentos históricos [14], sabe-se hoje que o origami desenvolveu-se paralelamente em muitas partes do mundo, e que a origem das dobraduras confunde-se com a própria história do papel [8].

O papel foi inventado na China por volta de 105 d.C e durante muito tempo seu uso ficou restrito a essa região. Foram monges budistas que levaram o papel para o Japão, onde, inicialmente, como papel era um artigo muito caro, ficou restrito a uma pequena parte da aristocracia samurai. No século 14, seguiram-se os primeiros registros de origami, com dobraduras utilizadas como oferendas aos deuses e colocadas em altares ou ainda como envelopes de presente nos nascimentos, casamentos e mortes.

Por outro lado, o papel, juntamente com as especiarias, foi levado pelos mouros para o Ocidente, e, chegando na Espanha, foi também dobrado virando uma arte conhecida como papiroflexia [14]. Dessa forma, o origami foi se espalhando pelo mundo ao longo dos séculos como uma cultura oral, muitas vezes associada a brincadeiras e jogos infantis ou como uma ferramenta pedagógica. Um dos pioneiros em utilizar dobraduras para estimular a aprendizagem foi Friedrich Froebel, na Alemanha, no século XIX [6]. Ele, além de ter criado o conceito de jardim de infância (*kindergarten*), utilizou as dobraduras como método para ajudar na compreensão de elementos da geometria e ensino por meio de jogos.

Na América Latina, a porta de entrada do origami foi através da imigração espanhola [13]. No Brasil, ainda que se imagine que o origami tenha chegado por meio da imigração japonesa, prova-

velmente as primeiras dobraduras foram trazidas pela imigração espanhola, via regiões de fronteira com a Argentina [17]. Além disso, várias outras técnicas de dobraduras de papel foram trazidas por imigrantes alemães e italianos no século XIX.

Assim, muitas das brincadeiras com papel que permanecem vivas ainda hoje são heranças culturais esculpidas e forjadas em séculos de interação. Quem nunca pegou um papel, um guardanapo e fez dobras neles? Quem nunca dobrou um chapéu ou um barquinho? Ou jogou “Céu e Inferno” [1]? Esse jogo que é uma dobradura de papel com faces marcadas com números, cores e figuras é utilizado aqui no Brasil para fazer uma adivinhação, mas, no Japão, além de ser o brinquedo *pakupaku* [5], esse origami é também usado como um porta-doces. Na verdade, é surpreendente pensar que a mesma dobradura tenha talvez outro significado ou aplicação dependendo do local, ou mesmo que tenha sido inventada em momentos completamente diferentes da história ou em locais diferentes, por indivíduos que nunca interagiram entre si. E esse é mais um ponto em comum do origami com a matemática que se desenvolve independentemente em lugares diferentes, estabelecendo os mesmos resultados.

No entanto, até o início dos anos 50, faltava ao origami uma linguagem mais padronizada e que pudesse fazer com que seus modelos chegassem a todos. Foi Akira Yoshizawa quem sistematizou uma simbologia e procedimentos para o origami que permitiram que os modelos fossem diagramados e colocados em livros [9]. Também foi ele quem criou o *wet folding*, uma técnica na qual dobramos um papel umedecido, o que permitiu fazer dobras mais arredondadas e orgânicas as quais deram mais realismo aos origamis de animais e pássaros. As borboletas de Yoshizawa, por exemplo, são as dobraduras mais icônicas do mestre com dobras aparentemente simples e que traduzem a essência do origami. Os diagramas com as instruções para a confecção de origamis foram apenas sistematizados em 1954 por Yoshizawa, e publicados em 1955 em seu livro *Atarashi Origami Geijutsu* (New Art of Origami) [14]. Dessa forma, cada dobra e movimento feito com a folha de papel foram representados simbolicamente, possibilitando que cada passo na construção do origami fosse representado de forma padronizada. A padronização e sistematização propostas por Yoshizawa deu origem à atual abordagem do origami, que usa como ponto de partida uma folha quadrada de papel e considera apenas um pequeno número de dobras e movimentos diferentes, que, no entanto, podem ser combinados de diversas maneiras, para formar objetos com diferentes níveis de complexidade. Esta abordagem atual do origami exclui construções nas quais o papel seja cortado ou colado.

### 3. Origami: Regras e Simbologia

O origami como se conhece hoje em dia está sistematizado por meio de regras e simbologias bem estabelecidas ao longo dos últimos 60 anos. As regras (condições iniciais) para que se possa classificar uma sequência de dobras no papel como sendo, de fato, um origami são:

- Toma-se inicialmente uma folha de papel quadrada;
- As dobras e movimentos realizados não rasgam a folha;
- Não são realizados recortes, nem colagens na folha de papel.

Os diferentes tipos de dobras e movimentos feitos com o papel durante a execução de um origami são geralmente representados em diagramas seguindo uma simbologia já padronizada e consagrada internacionalmente, que utiliza diferentes tipos de setas, marcações para diferentes tipos de linhas,

entre outros. Na Figura 1 são ilustradas algumas das dobras mais usuais, assim como a simbologia que as representa. Os diagramas a serem considerados nas próximas sessões terão seus passos descritos sucintamente, e algumas dobras indicadas por esta simbologia. No entanto, este texto introdutório não tem como objetivo aprofundar-se em construções sofisticadas. Para os leitores interessados em origamis com diferentes graus de dificuldade, recomendam-se [21, 14, 18].

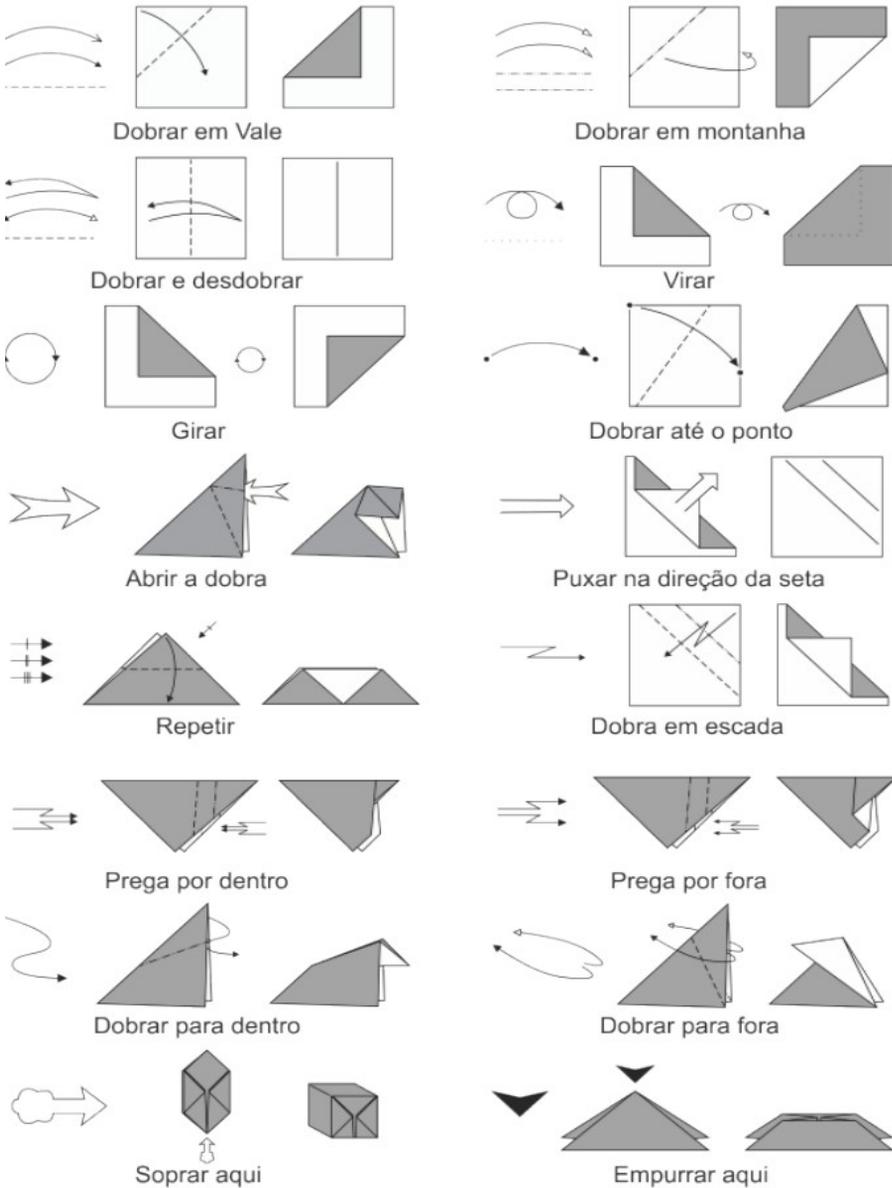


Figura 1: Simbologia de dobras mais frequentes. Fonte [27].

No topo da Figura 1, na coluna da esquerda está uma representação para a dobra em vale. Na coluna da direita, a dobra em montanha. Ambas diferem apenas pelo lado com que o papel é dobrado, independentemente do ângulo e comprimento da parte dobrada. Na dobra em vale a porção dobrada do papel fica para o lado de quem o dobra. Na dobra do tipo montanha, a parte dobrada fica para o lado de trás do papel. Cada ação feita é representada no diagrama por um tipo diferente de símbolo, que pode ser uma seta, um arranjo de setas, linhas tracejadas etc, como ilustrado na Figura 1. A seguir, apresenta-se um exemplo de diagrama disponível *on-line* [3] para a obtenção da face de um gato, no qual as setas consideradas na descrição das dobras seguem a simbologia apresentada na Figura 1.

### 3.1. Face do gato: uma primeira experiência com origami

Como primeiro exemplo de origami, apresenta-se, na Figura 2, o diagrama para construção da face de um gato, disponível no site [3]. Após o término das dobras, são desenhados olhos, nariz, boca e bigodes para se ter a sensação de que o origami criado trata-se da face de um gato.

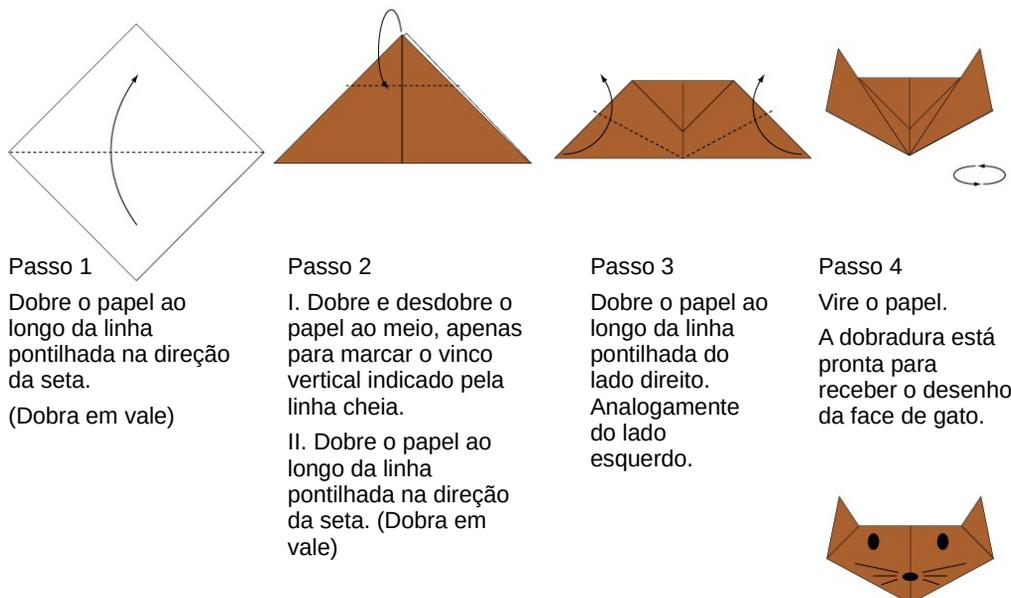


Figura 2: Diagrama simplificado para obtenção da face de um gato, disponível *on-line* [3]. Os olhos e demais elementos da face são desenhados após o término do origami.

O diagrama da Figura 2, disponível *on line* em [3], descreve 4 passos e apenas utiliza representações simplificadas de algumas setas da simbologia dada na Figura 1. Pelo fato de cada um dos passos 2 e 3 envolverem duas ações distintas no papel, o diagrama pode ser descrito mais detalhadamente em 6 etapas referentes às dobras e aos movimentos no papel, além da etapa complementar para se desenhar a face do gato no origami obtido. Desta feita, a partir da folha de papel quadrada, os passos indicados pelo diagrama da Figura 2 são descritos a seguir:

- (Passo 1) Dobre o papel para frente (dobra em vale), na diagonal, formando um triângulo;

- (Passo 2) A partir do triângulo obtido, dobre o papel para frente, unindo as duas pontas da base do triângulo, e desdobre. Assim o papel fica com um vinco na altura do triângulo, ilustrado por uma linha contínua na ilustração do passo 2;
- (Passo 2) Dobre em vale a ponta do papel (na direção de quem dobra) ao longo da linha pontilhada paralela à base do triângulo do passo 2. Essa dobra forma um outro triângulo pequeno de cabeça para baixo, como mostra a ilustração no passo 3 ;
- (Passo 3) Dobre em vale a ponta direita da base do triângulo maior, conforme a linha pontilhada na etapa 3 do diagrama. Repita a etapa anterior para a ponta esquerda do triângulo, formando assim as orelhas do gato;
- (Passo 4) Gire o papel para que o seu verso fique agora para frente.
- Finalmente, desenhe a face do gato.

Cabe observar que, em cada etapa, o papel modificado por uma ação será o ponto de partida para a ação da próxima etapa. É precisamente esta característica que faz com que as dobraduras sejam um exemplo natural para se definir função e composição de funções, como apresentado nas próximas seções.

## 4. Função: definições e exemplos via dobras

### 4.1. Definição de função

Nesta seção, apresenta-se inicialmente a definição usual de função encontrada na maioria dos textos de matemática.

**Definição 1.** Uma **função**  $f$  é uma regra que relaciona cada elemento  $x$  do conjunto  $A$  com um único elemento  $f(x)$  do conjunto  $C$ .

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow C \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned} \tag{1}$$

O conjunto  $A$  é dito **domínio**, o conjunto  $C$  é dito **contradomínio** e cada elemento  $f(x)$  contido em  $C$  é dito imagem de  $x$  pela função  $f$ . Quando se diz que cada elemento  $x$  de  $A$  é associado a um único elemento  $f(x)$ , fica implícito que todo elemento do domínio possui uma imagem.

O conjunto  $C$  pode conter também outros elementos que não sejam imagem de nenhum valor  $x$  do domínio. Neste caso, define-se  $B = \text{Im}(f)$ , chamado de **conjunto imagem** da função  $f$ , ou **imagem** de  $f$ , que contém apenas os elementos  $f(x)$  que são os valores imagem dos elementos do domínio. Portanto, o conjunto imagem é sempre um subconjunto (próprio ou não) do contradomínio da função,  $B \subseteq C$ . Dessa forma, o conjunto  $B$  pode ser escrito como

$$B = \text{Im}(f) = \{b \in C : \text{existe algum elemento } a \in A, \text{ tal que } f(a) = b\}.$$

A Definição 1 contém um grau de abstração e formalização inicialmente de difícil compreensão para os alunos, o que torna a apresentação de exemplos de fundamental importância para auxiliar no processo de compreensão e assimilação dos conceitos envolvidos [28].

## 4.2. Exemplos via dobras

Inicialmente, as dobras ilustradas na Figura 1 são consideradas como exemplos de funções, uma vez que intuitivamente uma função pode ser vista não apenas como uma regra de associação entre valores numéricos, mas também como uma ação, um movimento ou uma transformação executada a partir de um elemento inicial ( $x \in A$ ) e que produz algum resultado (elemento modificado  $f(x) \in B$ ).

Nesta seção, o elemento  $x$  a ser considerado no domínio  $A$  deixa de ser um valor numérico, como usualmente, e passa a ser um material concreto, uma folha quadrada de papel. Além disso, não se apresenta uma definição matemática para função  $f$ , que neste exemplo será uma regra de associação entre os elementos do domínio (folhas de papel) e contradomínio. Desse modo, considera-se apenas a descrição da dobra que irá modificar o papel como sendo a função  $f$ . O objetivo, portanto, é deixar explícito que o resultado obtido pela ação que modifica a folha quadrada de papel é a imagem dessa ação, portanto imagem de uma função.

Uma distinção entre imagem e contradomínio no contexto de origami seria interpretar o contradomínio  $C$  como sendo o conjunto de todas as possíveis dobraduras a serem obtidas a partir de uma folha de papel. No entanto, o conjunto imagem contém apenas o resultado concreto da dobra realizada.

### 4.2.1 Exemplo 1: cada dobra como uma função

Considera-se  $A$  o conjunto que contém uma folha quadrada de papel (elemento  $x$ ):

$$A = \{ \text{folha de papel quadrada} \}.$$

Dentre todas as possibilidades de dobras e movimentos apresentadas na Figura 1, são escolhidas quatro ações distintas, denotadas por  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  e  $f_4$ . Cada uma delas é executada separadamente a partir de uma folha quadrada de papel (elemento do conjunto  $A$ ).

- $f_1$  = dobre o papel para frente - dobrar em vale,
- $f_2$  = dobre o papel para trás - dobrar em montanha,
- $f_3$  = dobre o papel para frente e desdobre - vinco,
- $f_4$  = vire o papel - frente/verso ou verso/frente,

Cada uma dessas dobras produz um resultado diferente como imagem de uma função, o que fica evidente pela transformação realizada na folha de papel ( $x \in A$ ). Assim, definem-se os conjuntos  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  e  $B_4$  contidos na folha de papel modificada pela respectiva ação.

- $B_1$  = {folha quadrada com uma dobra em vale},
- $B_2$  = {folha quadrada com uma dobra em montanha},
- $B_3$  = {folha quadrada com um vinco},
- $B_4$  = {folha quadrada com verso para cima ou frente pra cima, dependendo de  $f_4$ }

Dessa forma, denota-se  $f_1 : A \rightarrow B_1$  como sendo a ação que modifica a folha quadrada ( $x$ ) em  $A$ , transformando-a no elemento em  $B_1$  ( $B_1 = \{f_1(x)\}$ ). De forma análoga, denotam-se as demais ações:  $f_2 : A \rightarrow B_2$ ,  $f_3 : A \rightarrow B_3$  e  $f_4 : A \rightarrow B_4$ , nas quais a folha quadrada (que é o elemento do conjunto  $A$ ) é modificada pela ação correspondente. O resultado produzido é a imagem do elemento pela aplicação. Assim, os conjuntos  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  e  $B_4$  são os respectivos conjuntos imagem de cada uma das funções.

Todas as dobras da Figura 1 podem ser vistas como uma função  $f$  e, portanto, podem ser escritas conforme a notação dada pela Definição 1:  $f : A \rightarrow B$ , sendo  $A = \{x\}$  o domínio da função  $f$ .  $E B = \{f(x)\}$ , o conjunto imagem de  $f$ . Neste exemplo, pode-se dizer ainda que cada um dos conjuntos imagem  $B$  é igual ao contradomínio  $C$ , pois nada foi informado ao contrário.

### Domínio da função com um ou mais elementos

Caso o conjunto  $A$  contenha mais do que um elemento, por exemplo,  $A = \{x_1, x_2, x_3\}$  contendo 3 folhas quadradas de cores diferentes ( $\#A = 3$ ), então  $f : A \rightarrow B$ , significa que a ação  $f$  será aplicada a cada um dos elementos de  $A$  e assim  $B = \{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\}$  será o conjunto com os respectivos resultados. Dessa forma o número de elementos dos conjuntos  $A$  e  $B$  será igual ( $\#A = \#B = 3$ ).

Caso as três folhas quadradas iniciais sejam de mesma dimensão e mesma cor, ou seja,  $x_1 = x_2 = x_3 = x$ , essas poderiam ser interpretadas como sendo um único elemento abstrato  $x$  e a formulação inicial dada para o conjunto imagem como sendo apenas  $B = \{f(x)\}$  segue válida.

Os exemplos a seguir propõem a interpretação (percepção) do diagrama de origami da face de um gato (2) também como sendo uma função, ou como sendo a composição das diversas ações sucessivas do diagrama até que o origami da face do gato seja obtido. O objetivo, então, é identificar e expressar essas ações com a notação e o formalismo dados pela Definição 1. Para isso, são considerados dois cenários: (a) origami como sendo uma única função; e (b) origami como sendo uma sequência de funções aplicadas sequencialmente até a construção completa da face do gato, Figura 2.

#### 4.2.2 Exemplo 2: origami como uma função

Uma possibilidade de se expressar o origami da Figura 2 como sendo uma função  $f$  é considerar a ação que associa a folha de papel inicial (denotada por  $x$ ) com a folha de papel após realizadas todas as dobras do diagrama, ou seja, o origami completo da face do gato (denotada por  $f(x)$ ), obtido como um "passe de mágica" por esta transformação  $f$ . Essa ação, ou transformação, satisfaz a Definição 1, uma vez que, para cada folha de papel ( $x \in A$ ), apenas um origami com face de gato ( $f(x) \in B$ ) é obtido por meio das dobras indicadas no diagrama.

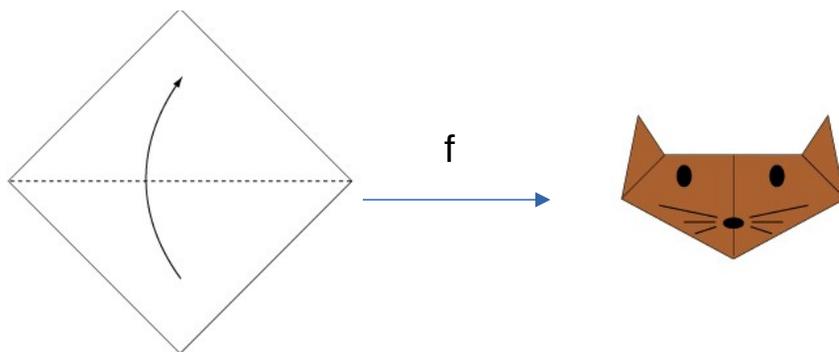


Figura 3: Origami como uma função  $f$  que leva o elemento  $x$  do domínio  $A$  (folha quadrada) no elemento  $f(x)$  do conjunto imagem  $B$  (face do gato).

Não há como ser produzido outro tipo de origami a partir do mesmo diagrama, e tão pouco é possível que a mesma folha gere uma quantidade maior do que um origami. Assim, trata-se o origami como sendo uma função  $f$  que transforma  $x$  (folha quadrada) em sua imagem  $f(x)$  (a face de gato). E, neste caso, o domínio  $A$  pode ser considerado como sendo formado apenas por uma folha quadrada de papel  $x$ , e o conjunto imagem de  $f$  contendo apenas o origami com a face de gato  $f(x)$ . De acordo com a Definição 1, pode-se escrever a função como segue:

$$\begin{aligned}
 f: \quad A &\longrightarrow C \\
 x &\longmapsto f(x).
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Novamente, o contradomínio  $C$  pode ser considerado como sendo qualquer conjunto que contenha o conjunto imagem de  $f$ , independentemente de quantos elementos sejam considerados no domínio  $A$ . Assim, assume-se neste exemplo que o contradomínio  $C$  seja igual ao conjunto imagem de  $f$ ,  $B = \text{Im}(f)$ . Na Figura 3, tal situação é ilustrada, para o exemplo quando o domínio  $A$  contém apenas 1 elemento. Mesmo que o contradomínio seja um conjunto com mais elementos, como observado anteriormente, sempre  $B \subseteq C$ .

### 4.2.3 Exemplo 3 - o origami como composta de funções

Como visto no Exemplo 1, cada dobra ilustrada na Figura 1 pode ser considerada como uma ação sobre a folha de papel quadrada, e, portanto, uma função, cujo domínio é denotado pelo conjunto  $A$ . A questão interessante e relevante aqui é que as dobras seguem uma seqüência para se formar um origami. Ou seja, cada nova dobra será realizada no papel que já foi dobrado ou marcado pelas dobras ou vincos anteriores.

Há, então, uma dependência entre passos consecutivos. Cada etapa anterior é o ponto de partida para o passo seguinte. Ou seja, a imagem obtida pela dobra anterior será o elemento inicial para a dobra seguinte. Matematicamente, esse processo é denominado composição de funções. No caso em que são compostas duas funções, a definição é a seguinte:

**Definição 2.** Sejam  $f : D \rightarrow E$  e  $g : E \rightarrow T$ . A composição de duas funções, ou, a **composta** da função  $g$  com a função  $f$  é uma nova função  $h : D \rightarrow T$ , tal que  $h(x) = g(f(x))$ , para todo  $x \in D$ , sendo que o conjunto imagem da função  $f$  deve estar contido no domínio da função  $g$ ,  $\text{Im}(f) \subseteq E$ .

Cabe observar que:

- A função composta  $h$  também é denominada  $g \circ f$  e sua imagem é dada por:  $h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$ , para cada  $x$  em  $D$ ;
- Na definição (2), o conjunto imagem de  $f$  deve ser igual ou estar contido no domínio da função  $g$ ,  $\text{Im}(f) \subseteq E$ , para que a função composta  $g \circ f$  esteja bem definida, ou seja, para que o valor imagem  $g(f(x))$  exista, para cada elemento  $x \in D$ ;
- Pode-se fazer a composição de mais do que duas funções, desde que se mantenha a restrição imposta pela Definição 2 entre conjunto imagem e domínio para cada duas funções consecutivas no processo de composição;
- A composição de funções depende da ordem com que as ações são realizadas. Assim, em geral,  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \neq (g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

A Figura 4 a seguir apresenta um exemplo via dobraduras para ilustrar um caso no qual a ordem com que duas funções são compostas altera o resultado obtido,  $f \circ g \neq g \circ f$ . Neste exemplo a função  $f$  é a ação de dobrar o papel ao meio no sentido vertical.

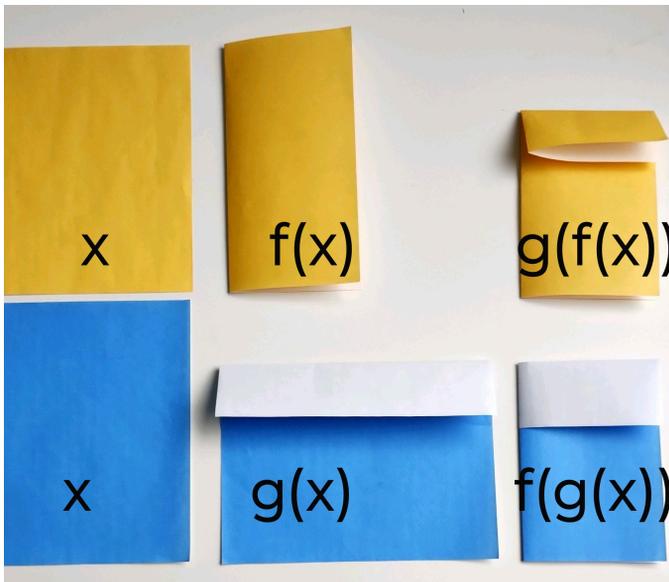


Figura 4: Exemplo  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \neq (g \circ f)(x) = g(f(x))$ . A função  $f$  é a ação de se dobrar ao meio a folha de papel no sentido vertical. A função  $g$  é a ação de se dobrar em uma quarta parte do papel no sentido horizontal.

A função  $g$  é a ação de dobrar o papel no sentido horizontal de tal forma que uma quarta parte da folha fique apontando na direção de quem fez a dobra.

A folha com a legenda  $g \circ f$  é obtida quando primeiro se dobrar a folha ao meio verticalmente (ação de  $f$ ) seguido pela dobra horizontal de uma quarta parte do papel, de tal forma que a parte dobrada fique para o lado de quem fez a dobra (ação de  $g$ ). Já a aplicação da ação  $g$  primeiro, seguida pela ação  $f$  (de dobrar ao meio) produz um outro origami,  $f \circ g$ .

Nesse sentido, um origami pode ser interpretado com uma composição de muitas funções, tantas quantas forem as dobras ou movimentos necessários para se formar o objeto final. No caso do origami da face do gato, diagrama da Figura (2), denotam-se cada um dos passos do diagrama por uma função  $f_1, f_2, f_3$  e  $f_4$ . Assim, a composição dessas funções é a maneira natural de se expressar que o resultado de uma função em um passo intermediário será modificado no passo seguinte pela ação de uma nova função. E assim sucessivamente, até que o origami seja finalizado.

Na Figura (5), os passos desse processo de composição de diversas funções são ilustrados. O elemento inicial  $x$  é uma folha quadrada. Após a primeira dobra, obtém-se como resultado  $f_1(x)$ , que é o triângulo maior. A função  $f_2$  representa as duas ações descritas no passo 2. Assim, o elemento  $f_2(f_1(x))$  é o papel que teve um vinco marcado na posição da altura além da sua ponta dobrada para baixo, transformando o triângulo em um trapézio. A função  $f_3$  é a responsável pela modificação do trapézio para o que será a cabeça do gato,  $f_3(f_2(f_1(x)))$ . A função  $f_4$  apenas vira o papel, de tal modo que a face do gato possa ser desenhada, gerando o resultado final  $f_4(f_3(f_2(f_1(x))))$ . Assim a função  $f$  do "passe de mágica" do Exemplo 2 é igual à função composta  $f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ . E para cada folha quadrada  $x \in A$ , tem-se  $f(x) = f_4(f_3(f_2(f_1(x))))$  o origami da face de gato.

O origami da face do gato dado como uma função composta é escrito como segue:

$$f: A \longrightarrow C$$

$$x \longmapsto f(x) = f_4(f_3(f_2(f_1(x)))) \tag{3}$$

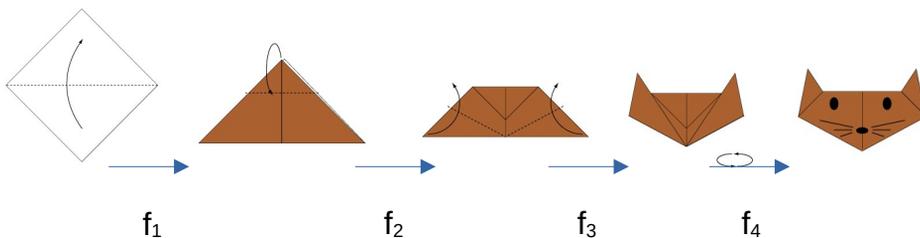


Figura 5: Origami como a função composta  $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$

### 5. Função Inversa: definições e exemplos via dobras

Uma questão relevante é saber se uma determinada ação, função, pode ou não ser revertida ou desfeita, ou seja, se a função é inversível. Essa pergunta no contexto de um origami pode ser formulada como: É possível desdobrar um origami de tal forma que se obtenha novamente a folha quadrada original?

Intuitivamente a resposta para esta questão é sim, pois as dobras feitas ao longo do processo de construção do origami são todas reversíveis, como ilustra a Figura 1. Além disso, conforme a classificação assumida inicialmente para um origami, não se pode nem colar, nem cortar a folha

quadrada de papel em nenhum dos passos da sequência de dobras. Ou seja, pode-se dobrar e desdobrar o papel a qualquer momento, sem destruí-lo, recuperando-se a folha no estado anterior à dobra. Conseqüentemente, é possível seguir este processo inverso até que se obtenha a folha quadrada originalmente considerada.

No entanto, uma resposta mais precisa para esta questão depende não apenas de como a função é definida, mas também da definição e propriedades do contradomínio e da imagem da função. As duas propriedades fundamentais a serem verificadas para que se possa determinar se uma função é ou não inversível são:

1. Quaisquer dois elementos diferentes no domínio são associados a elementos diferentes do contradomínio, ou seja, possuem imagens diferentes;  
Analogamente:  
Quaisquer elementos do conjunto imagem que forem iguais estão obrigatoriamente associados a elementos iguais do domínio.
2. Todos os elementos do contradomínio  $C$  estão no conjunto  $B$  imagem da função. Ou seja,  $C = B = \text{Im}(f)$ .

Matematicamente as propriedades acima são definidas da seguinte maneira:

**Definição 3.** Uma função  $f : A \rightarrow C$  é **injetora** (ou **injetiva**) quando  $x \neq y \in A \Rightarrow f(x) \neq f(y) \in C$ . Ou equivalentemente, quando  $f(x) = f(y) \in B = \text{Im}(f) \Rightarrow x = y$ .

**Definição 4.** Uma função  $f : A \rightarrow C$  é dita **sobrejetora** (ou **sobrejetiva**) quando  $C = \text{Im}(f)$ . Ou seja, dado qualquer elemento  $b \in C$ , sempre **existe pelo menos um elemento**  $x \in A$ , tal que  $f(x) = b$ .

Assim, uma função pode ainda ser classificada como segue:

**Definição 5.** Uma função  $f : A \rightarrow C$  é dita **bijetora** (ou **bijetiva**) se for simultaneamente injetora e sobrejetora.

E com isso, uma função inversível é definida como a seguir:

**Definição 6.** Uma função  $f : A \rightarrow C$  é dita **inversível** se, e somente se, ela for bijetora. Com isso, existe a função inversa de  $f$ , denotada por  $f^{-1} : C \rightarrow A$ , tal que  $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$ , para cada elemento  $y \in C$ .

A seguir, verificam-se em quais condições os exemplos da seção anterior são funções inversíveis.

### 5.1. Origami como uma função inversível

A propriedade 1, descrita na Definição 3, referente à função ser injetora é naturalmente satisfeita por um origami quando visto como função, pois duas folhas quadradas quaisquer vistas como dois elementos distintos do domínio, produzem dois origamis e que por sua vez também serão elementos diferentes da imagem.

Já a propriedade referente à função ser ou não sobrejetora, dada pela Definição 4, é verdadeira para a função origami dos exemplos anteriores, se o contradomínio for considerado igual ao conjunto imagem. A seguir, essas situações são ilustradas com mais detalhes.

### 5.1.1 Inversa do exemplo 2

No Exemplo 2 (4.2.2), a função  $f$  associa a folha quadrada ao origami como em um "passe de mágica". Dessa forma, pode-se considerar que a sua função inversa  $f^{-1}$  associa, também como em um "passe de mágica", cada origami da face de gato à sua folha de papel originalmente quadrada.

Cabe observar que agora o domínio da função inversa  $f^{-1}$  passa a ser o conjunto  $C$  que é o contradomínio da função  $f$ . Como a função  $f$  modelada no Exemplo 2 é também sobrejetora, seu contradomínio e sua imagem são conjuntos iguais,  $C = B = \text{Im}(f)$ . Assim, cada elemento  $y$  do conjunto  $C$  passa a ser o elemento de partida que é associado a algum elemento do conjunto  $A$ . E é a função inversa  $f^{-1}$  que faz exatamente essa associação entre  $y = f(x) \in C$  e  $x \in A$ :  $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1} \circ f(x) = x$ . Ou seja,  $f^{-1} \circ f$  é a função identidade  $I$ , tal que  $I(x) = x$ , seja qual for o valor de  $x$ .

$$\begin{aligned}
 f^{-1}: C &\longrightarrow A \\
 y &\longmapsto f^{-1}(y) = x.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

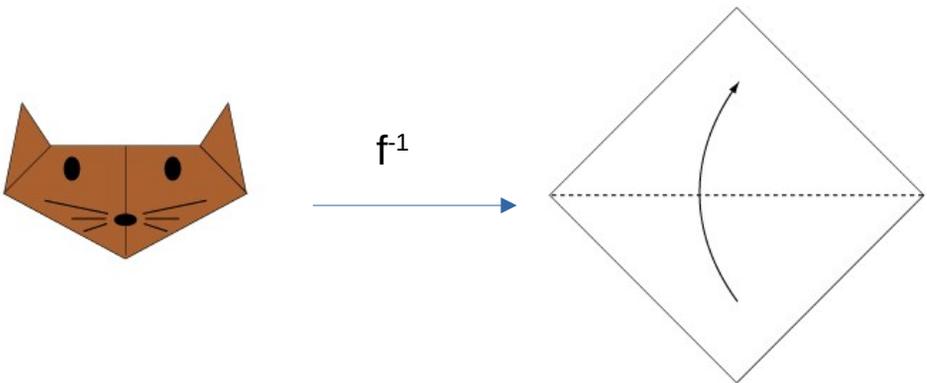


Figura 6: Inversa da função origami, Cenário 1. Associação entre origami da face de gato com sua respectiva folha quadrada original.

Quando o domínio de uma função injetora  $f : A \rightarrow C$  contiver mais do que um elemento, isso implica que o conjunto imagem da função também conterà mais do que um elemento. Na verdade, o número de elementos tanto no conjunto imagem quanto no domínio será igual,  $\#\text{Im}(f) = \#A$ , como na situação apresentada no final da Seção 4.2.1. Neste texto introdutório não se explora esta questão de cardinalidade [30], mas intuitivamente este é um resultado natural para um conjuntos com um número finito de elementos.

Assim, na construção de vários origamis com material concreto, a propriedade de ser injetora é algo intrínscico, e a propriedade de ser sobrejetora obtém-se quando o contradomínio for igual ao conjunto imagem,  $C = B = \text{Im}(f)$ . Com isso, preserva-se a associação tanto direta quanto inversa entre cada uma das diferentes folhas de papel e os diferentes origamis obtidos após as dobras. Ou seja, a formulação da função inversa ilustrada na Figura 6 também segue válida quando  $\#C = \#A > 1$  e  $C = B = \text{Im}(f)$ .

### 5.1.2 Exemplo de uma formulação não inversível

Caso o contradomínio de uma função injetiva  $f : A \rightarrow C$  contenha mais elementos do que no seu conjunto imagem, a função não será sobrejetiva e, por consequência, também não será inversível. Essa é a situação ilustrada na Figura 7 a seguir, quando  $\text{Im}(f) \subset C$  e  $C \neq \text{Im}(f)$ .

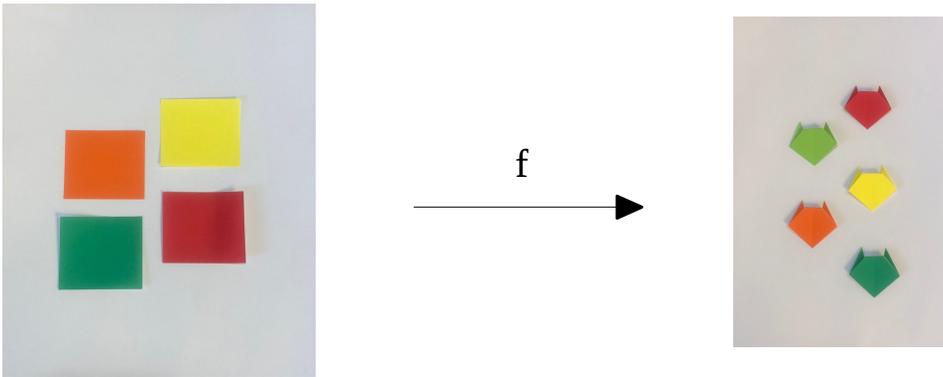


Figura 7: Exemplo de uma função  $f$  que é injetora mas não é sobrejetora.

Neste exemplo, a função  $f$  associa os elementos do domínio  $A$  a elementos no contradomínio  $C$  de tal modo que a cor da folha em  $A$  seja igual à cor do origami em  $C$ . Porém, neste exemplo a função deixa de ser sobrejetora, pois  $\#C = 5 > \#\text{Im}(f) = 4 = \#A$ . Isso também pode ser concluído pelo fato de não haver nenhuma folha quadrada da cor verde-claro em  $A$ . Com isso, o origami da face de gato na cor verde-claro que está no contradomínio  $C$  não está no conjunto  $B = \text{Im}(f)$  imagem da aplicação  $f$ .

Ou seja, neste exemplo a função não é bijetora. E consequentemente, não pode ser inversível. Isso significa que não se pode definir uma função inversa que associe elementos de  $C$  aos elementos de  $A$  e que satisfaça a definição 1. Essa impossibilidade ocorre porque ao se tentar definir uma operação inversa cujo domínio fosse  $C$ , essa operação ficaria mal definida. Quer dizer, existiria um elemento (a face do gato na cor verde-claro) no domínio  $C$  sem imagem (pois a folha verde-claro não está contida no conjunto  $A$ ). E isso não satisfaz a definição de função.

Para que a função deste exemplo possa ser inversível, existem algumas alternativas para se redefinir a função com o objetivo de transformá-la em uma aplicação injetora e sobrejetora: ou a folha quadrada verde-claro é incluída em  $A$  (redefinição do domínio de  $f$ ). Ou se retira o origami de gato na cor verde-claro do conjunto  $C$  (redefinição do contradomínio de  $f$  para que  $C = B = \text{Im}(f)$ ).

Esta estratégia de se redefinir uma função para deixá-la bijetora (e, portanto, inversível) em pelo menos algum subconjunto do seu domínio original é muito útil e muito utilizada. Um exemplo é o caso das funções trigonométricas e a construção de suas inversas [29].

### 5.1.3 Inversa de função composta

No Exemplo 3, (4.2.3), a função origami da face do gato  $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$  é formulada como sendo a composta de quatro funções que descrevem dobras e movimentos no papel,  $f_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 4$ . Desta forma, fica intuitivo pensar que para se desdobrar a face de gato por completo até se obter novamente a folha quadrada, cada dobra deve ser desfeita na ordem reversa com que foi executada. A figura 8 ilustra a sequência de funções a serem compostas para a obtenção da folha quadrada como resultado do processo inverso das dobraduras, tendo como início o origami da face de gato.

A Figura (5) ilustra a ordem direta das operações e a Figura (8) ilustra a ordem reversa com que cada dobra deve ser desfeita. Com isso, fica evidenciado que a função inversa  $f^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_4^{-1}$  também é uma função composta. Além disso, a Figura (8) ilustra ainda que a composição das inversas de cada ação intermediária é feita na ordem reversa. Portanto, a última dobra feita na face do gato será a primeira a ser desfeita para se iniciar o processo de inversão, e assim sucessivamente, até a obtenção da folha quadrada  $x: y = f(x)$  é levado para  $f_4^{-1}(y)$ , que é levado para  $f_3^{-1}(f_4^{-1}(y))$ , até que  $f^{-1}(y) = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_4^{-1}(f(x)) = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_4^{-1}(f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(x)) = x$

$$\begin{aligned}
 f^{-1}: \quad C &\longrightarrow A \\
 y &\longmapsto f^{-1}(y) = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_4^{-1}(y) = x.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

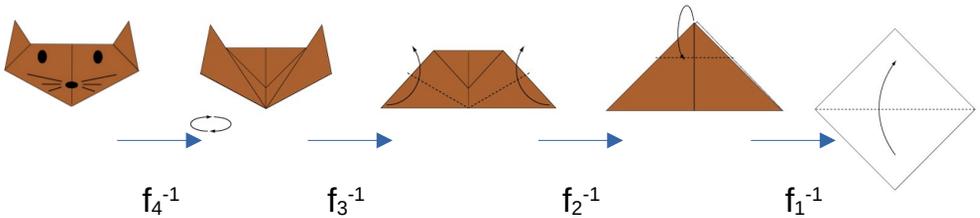


Figura 8: Função inversa: obtenção da folha quadrada partindo do origami da face de gato. Reversão das dobraduras.

Dessa forma, a função vista no Exemplo 3 (4.2.3) é um exemplo natural e intuitivo para se explicitar a relevância da ordem com que cada função inversa  $f_k^{-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, 4$  deve ser considerada para a obtenção de  $f^{-1}$ , inversa da função  $f$ . Da mesma forma como as dobras feitas ao longo de uma receita de origami servem de exemplo natural para a apresentação do conceito de função relacionado à modelagem de ações e transformações, pode-se explorar estas mesmas receitas do ponto de vista de algoritmos sequenciais, nos quais as instruções (ações) seguem uma ordenação e possuem uma interdependência até que o resultado final seja obtido. Na próxima seção, os Exemplos 2 e 3, 4.2.2 e 4.2.3, são considerados como ponto de partida para se explorar o conceito de algoritmo sequencial.

## 6. Algoritmo: definição e exemplos via origami

Dentre as várias versões dadas para a definição de algoritmo encontradas na literatura ou em sites especializados em Ciência da Computação, uma delas, conforme [25], é:

**Definição 7.** Um **algoritmo** é um conjunto de listas de instruções, usado para resolver problemas ou realizar tarefas, com base no entendimento das alternativas disponíveis.

Ou ainda, como apresentado em [22], um algoritmo seria como uma sequência finita de regras, raciocínios ou operações que, aplicada a um número finito de dados, permite solucionar classes semelhantes de problemas. Um algoritmo, portanto, conta com a entrada (*input*) e saída (*output*) de informações mediadas pelas instruções, como ressaltado em [22],

De forma geral, algoritmos são muito mais do que instruções traduzidas em alguma linguagem de programação, eles são especificações para realizar cálculos, processamento de dados, raciocínio automatizado, tomada de decisão, dentre uma infinidade de exemplos, nos quais uma estruturação lógica dos passos de resolução é considerada de forma indispensável.

Segundo [25], “os algoritmos surgiram como auxiliares para se descrever as regras para a elaboração de equações matemáticas, mas atualmente eles são aplicados em quaisquer sequências de ações para se resolver um problema”. Todas as atividades do cotidiano podem, de alguma forma, ser convertidas em um conjunto de ações, que podem ser vistas como passos lógicos e, portanto, instruções, cujo objetivo é a conclusão da atividade proposta.

No clássico exemplo com as receitas culinárias, dado em [25], é natural pensar nos ingredientes como sendo os dados de entrada. O modo de preparo são exatamente as instruções que mediam o processo de execução da receita e que são, portanto, as instruções lógicas do algoritmo. E por fim, há o prato pronto, que é o resultado do algoritmo.

Na verdade, a busca de exemplos e motivações que possam facilitar o ensino de algoritmos e lógica de programação é um tópico pertinente e atual [2]. Uma alternativa recente é a de propor o estudo de tópicos de programação via jogos e ambientes virtuais [20], uma vez que tanto alunos de graduação [26], quanto alunos do Ensino Médio [24] apresentam dificuldades em assimilar todos os conceitos e ferramentas computacionais em um primeiro momento.

Neste sentido, este texto propõe o uso de origamis como uma ferramenta concreta e lúdica para se compreender conceitos relevantes na formulação de algoritmos.

## 6.1. Algoritmo 1 para o Exemplo 2

O origami da face do gato, com diagrama de instruções dado na Figura 2 e que foi expresso como função no Cenário 4.2.2, encaixa-se na definição de algoritmo. Assim, uma primeira versão do algoritmo para o origami poderia ser formulado com três partes essenciais identificadas (dados de entrada, processo principal, dados de saída), como ilustrado a seguir:

### Algoritmo 1: Origami

- *Inputs*: entrada  $\leftarrow$  folha quadrada
- *Process (Instruções)*: dobras  $\leftarrow$  sequência de ações do diagrama dado na Figura 2, dependendo da entrada.
- *Outputs*: saída  $\leftarrow$  face do gato  $\leftarrow$  dobras

A folha de papel quadrada é o dado inicial. A sequência finita de dobras são as instruções e ações do processo de resolução. A face do gato obtida no final da execução é o resultado do algoritmo. Nesta primeira formulação não foram detalhadas as etapas que compõem o processo de resolução, denominado “dobras”.

## 6.2. Algoritmo 2 para o Exemplo 3

A seguir, são descritas as ações que compõem o processo descrito de forma genérica pelo Algoritmo 1. Na verdade, o Algoritmo 2 é o detalhamento do processo do Algoritmo 1, sendo também dividido em subtarefas. Isso muitas vezes é denominado como sendo uma subrotina (ou várias) da rotina principal.

Nesta subrotina, procura-se identificar as diferentes ações e operações contidas nas instruções. Neste exemplo, estas ações são os processos denominados por p1, p2, p3, p4 e p5, de tal forma que os valores de entrada fiquem evidentes, dados pelas variáveis entre parênteses. As setas indicam que o resultado da ação executada será guardado na variável de saída, que são as variáveis do destino da seta.

Outro ponto a ser observado é a dependência entre os dados de saída de cada uma das ações com os dados de entrada das ações seguintes. Essa dependência indica que o origami (e, portanto, o processo que o representa) tem uma natureza sequencial de execução das tarefas.

### Algoritmo 2: Sequência das Dobras(entrada)

- *Inputs:*  $x \leftarrow$  entrada
- *Process:* **Dobras(x)**
  - **p1:**  $a \leftarrow$  dobrar a diagonal(x)
  - **p2:**  $b \leftarrow$  marcar a altura do triângulo retângulo(a)
  - **p3:**  $c \leftarrow$  dobrar orelhas do gato(b)
  - **p4:**  $d \leftarrow$  dobrar cabeça do gato(c)
  - **p5:**  $y \leftarrow$  virar a dobradura (d)
- *Outputs:* Dobras(entrada)  $\leftarrow$  face do gato  $\leftarrow$  y

O Algoritmo 2 é, então, um exemplo do que se define como sendo um Algoritmo Sequencial, pois todas as suas etapas de execução ocorrem uma após a outra, seguindo a ordenação ditada pelas dobras.

Nesta formulação genérica das instruções, os passos intermediários ainda não estão formulados com rigor em termos de fórmulas, nem mesmo focados na sintaxe da linguagem de programação a ser considerada na implementação. No entanto, a natureza sequencial do processo de resolução fica evidenciada nesta formulação.

O algoritmo para a sequência de dobras ainda necessita ser detalhado, de tal modo que para cada etapa intermediária do seu processo (p1, p2, p3, p4 e p5) um novo algoritmo seja construído. Assim é necessário que sejam formuladas várias subrotinas para expressarem cada uma destas novas ações. Este texto inicial propõe-se a formular esta estrutura geral dos algoritmos, sem que aspectos referentes à implementação sejam sugeridos ou discutidos.

## 7. Conclusões

O conceito “Learning by doing” foi criado pelo educador e filósofo John Dewey, em 1938, e traz a proposta de que a aprendizagem deve ser relevante e prática. Desde então, as ideias de Dewey têm inspirado e motivado pesquisadores, educadores, professores e profissionais de inúmeras áreas de atuação por todo o mundo. Nesse sentido, a proposta pedagógica apresentada neste trabalho está em sintonia com esse conceito, pois a partir da experiência com material concreto elaboram-se e compreendem-se vários conceitos abstratos relacionados com as dobraduras.

Neste texto introdutório foram apresentados exemplos de origamis como forma de motivar a apresentação e definição do conceito de funções e de algoritmos. Aqui, os origamis por sua essência sistemática e sequencial encaixam-se naturalmente nas definições apresentadas e possibilitam que novas questões teóricas sejam motivadas por problemas práticos relacionados às diferentes dobras feitas em papel.

As seqüências de dobras e movimentos que compõem os objetos feitos pela técnica de origami possibilitam, de forma muito intuitiva, a abordagem e a formulação do conceito de função composta e função inversível. Desta forma, uma contribuição deste texto é a apresentação de um exemplo concreto para a formulação da inversa de uma função composta, cujo número de componentes é geralmente maior do que dois. Além disso, o fato de se poder desdobrar o papel na ordem reversa até finalmente a obtenção da folha quadrada original motiva a formulação da inversa de uma função composta como sendo formada pela inversa de cada uma das componentes da composta na ordem contrária.

Outra contribuição deste texto é evidenciar a relação entre origamis e processos sequenciais que podem ser traduzidos por meio de algoritmos. Assim, a seqüência de dobras que compõem um origami está diretamente ligada à seqüência de instruções de um algoritmo sequencial. E consequentemente, diretamente relacionada com os conceitos de rotina e subrotina quando os algoritmos são traduzidos em alguma linguagem de programação.

## Agradecimentos

A primeira autora gostaria de agradecer a Mio Nakamura do ateliê Fábrica Japônica, Gotemburgo, Suécia.

A segunda autoria gostaria de agradecer a Eva Duarte do Dobrinhas, Arcoverde, Pernambuco, Brasil.

## Referências

- [1] *Come-come*, Construção disponível em: <[https://www.youtube.com/watch?v=1\\_lm0XVL4Y4](https://www.youtube.com/watch?v=1_lm0XVL4Y4)>. Acesso em: 20 de junho de 2022.
- [2] Costa, J. and Ribeiro Júnior, S. “Aplicação de ferramentas didáticas e lúdicas, associadas ao ensino e aprendizagem de algoritmo e lógica de programação”. *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento*, 2021. Disponível em: <DOI = [10.32749/nucleodoconhecimento.com.br/educacao/logica-de-programacao](https://doi.org/10.32749/nucleodoconhecimento.com.br/educacao/logica-de-programacao)>. Acesso em: 24 de maio de 2022.
- [3] *Diagrama simplificado da face do gato*. Origami Japan. Disponível em: <<https://origamijapan.net/cat-face/>>. Acesso em: 19 dezembro de 2023.

- [4] *Diagrama da face do gato*. Origami club. Disponível em: <<https://en.origami-club.com/easy/animal-face/cat/index.html>>. Acesso em: 20 junho de 2022.
- [5] *Diagrama do Pakupaku*. Origami club. Disponível em: <<https://en.origami-club.com/fun/pakupaku/>> Acesso em: 20 de junho de 2022.
- [6] Duarte, E. *Froebel, Friedrich*. Adedobra, 2020. Disponível em: <<https://adedobra.wordpress.com/2020/05/26/froebel-friedrich/>> Acesso em: 20 de junho de 2022.
- [7] Duarte, E. *Lang, Robert*. Adedobra, 2020. Disponível em: <<https://adedobra.wordpress.com/2020/06/09/lang-robert/>> Acesso em: 20 de junho de 2022.
- [8] Duarte, E. *Origami*. Dobrinhas. Disponível em: <<https://dobrinhas.wordpress.com/origami/>> Acesso em: 20 de junho de 2022.
- [9] Duarte, E. *Yoshizawa, Akira*. Adedobra, 2020. Disponível em: <<https://adedobra.wordpress.com/category/akira-yoshizawa/>> Acesso em: 20 de junho de 2022.
- [10] Ferreira, R. e Duarte, S. “Ensino de programação: trajetória histórico-social e os avanços na cultura digital do Brasil”. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, v. 12, n. 1, p. 386-408, 2019. <DOI= 10.3895/rbect.v12n1.7532>
- [11] Gonçalves, A. C. *Aspectos da história do conceito de funções e suas representações por diagramas, linguagem algébrica e gráficos cartesianos*. Dissertação de Mestrado Profissionalizante, ProfMat, Imecc-USP-São Carlos, 2015. Disponível em <[https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-01072015-113421/publico/Dissertacao\\_AlexsandraGoncalves\\_revisada.pdf](https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-01072015-113421/publico/Dissertacao_AlexsandraGoncalves_revisada.pdf)>. Acesso em: 20 junho de 2022.
- [12] Hernandes, M. E. *Sistemas polinomiais, mapas e origamis*. 1º Colóquio de Matemática da região Sul, UFSM, Santa Maria, RS, 2010. Disponível em <<https://doczz.com.br/doc/714578/sistemas-polinomiais--mapas-e-origamis>>. Acesso em: 20 junho de 2022.
- [13] *História do Origami - A história de desenvolvimento e difusão de origami*. Origami-Paper.ru. <[https://origami-paper.ru/origami/portuguese/istoriya\\_origami/istoriya\\_razvitiya\\_i\\_rasprostraneniya\\_origami.html](https://origami-paper.ru/origami/portuguese/istoriya_origami/istoriya_razvitiya_i_rasprostraneniya_origami.html)>. Acesso em: 26 de maio de 2022.
- [14] *History of origami*. EMOZ - Educational Museum Origami Zaragoza. <[http://www.emoz.es/QR/sala\\_leng.html](http://www.emoz.es/QR/sala_leng.html)>. Acesso em: 20 junho de 2022.
- [15] Hull, T. C. “Solving Cubics with creases: The work of Beloch and Lill”. *The American Mathematical Monthly*, v. 118, n. 4 , p. 307-315, 2011.
- [16] *Huzita-Hatori Axioms*. Wikipedia. <[https://en.wikipedia.org/wiki/Huzita%E2%80%93Hatori\\_axioms](https://en.wikipedia.org/wiki/Huzita%E2%80%93Hatori_axioms)>. Acesso em: 20 de junho de 2022.
- [17] Kanegae, M. *Breve Histórico do Origami no Brasil*. <<http://www.kamiarte.com.br/breve-historico2.htm>>. Acesso em: 20 de junho de 2022.
- [18] Lang, R. J. *A computational algorithm for origami design*. SCG '96: Proceedings of the twelfth annual symposium on Computational geometry, p. 98-105, 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/237218.237249>>. Acesso em: 20 junho de 2022.
- [19] Lister, D. *Is the origin of origami chinese or japanese?*. British Origami, 2003. <<https://www.britishorigami.org/cp-lister-list/origins-of-origami/>>. Acesso em: 20 de junho de 2022.
- [20] Nalia, J. V. and Begosso, L. C. *Gamificação de algoritmos*. Intelecto, Fema, Assis, ISSN: 2596-0806, v. 2, 2019.

- [21] O'Carroll, E. *Akira Yoshizawa: Why origami matters*. The Christian Science Monitor, 2012. Disponível em: <<https://www.csmonitor.com/Technology/Horizons/2012/0314/Akira-Yoshizawa-Why-origami-matters>>. Acesso em: 24 de maio de 2022.
- [22] Sousa, P. *Conceito de algoritmo*, <<https://conceito.de/algoritmo>>. Acesso em: 28 de maio de 2022.
- [23] Souza, R. P. *A construção do conceito de função através de atividades baseadas em situações do dia a dia*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, 2016. Disponível em: <<https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/23112016Rebeca-Pereira-de-Souza.pdf>>. Acesso em: 20 junho de 2022.
- [24] Teixeira, A. C.; Martins, J. A. R.; Batistela, F. e Oro, N. T., *Programação de computadores para alunos do ensino fundamental: A Escola de Hackers*. XXI Workshop de Informática na Escola, 2015, <DOI = "10.5753/cbie.wie.2015.112", >. Acesso em: 24 de maio de 2022.
- [25] *Understanding algorithms in Computer Science*. International University of Geneva, 2022, Disponível em: <<https://www.iun.ch/en-en/blog/computer-science/algorithm-computer-science-definition-and-understanding>>. Acesso em: 26 de maio de 2022.
- [26] Vahldick, A. *Uma Experiência Lúdica no Ensino de Programação Orientada a Objetos*. XVIII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 2007.
- [27] Vieira, M. F. *A arte do origami no ensino de geometria: um estudo de caso no PROJÓVEM adolescente*. Trabalho de Conclusão de Curso, Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual da Paraíba, 2012.
- [28] ANDRADE, Jael Miriam; SARAIVA, Manuel Joaquim. *Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de função*. Relime, Ciudad de México, v. 15, n. 2, p. 137-169, jul. 2012. Disponível em: <[http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1665-24362012000200002&lng=es&nrm=iso](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362012000200002&lng=es&nrm=iso)>. Acesso em 18 dez. 2023.
- [29] Alves, Diego. *A trigonometria do Ensino Fundamental para o Ensino Médio: Uma proposta didática*. IMPA, TCC, orientação: Imbuzeiro, Roberto. 2017. <[https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/TCC\\_2017\\_diego\\_aAlves.pdf](https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/TCC_2017_diego_aAlves.pdf)>. Acesso em 01 jan. 2024.
- [30] Lima, Elon Lages. *Análise Real - vol. 1 - Funções de uma Variável*, 13ª edição, Impa, 2020. ISBN: 978-65-990528-5-9

Alice Kozakevicius  
Universidade Federal de Santa Maria  
<[alicek@ufsm.br](mailto:alicek@ufsm.br)>

Maite Kulesza  
Universidade Federal Rural de Pernambuco  
<[maite.kulesza@ufrpe.br](mailto:maite.kulesza@ufrpe.br)>

Recebido: 20/06/2022  
Publicado: 01/04/2024

# Algumas Propriedades dos Ternos Quase Pitagóricos

Jessé Garcia de Faria

Martinho da Costa Araujo

## Resumo

Neste trabalho apresentamos o conjunto  $\mathbb{T}_m$ , formado por ternos  $(x, y, z)$ , onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  são números inteiros que satisfazem a equação  $x^2 + my^2 = z^2$ , com  $z > 0$  e  $m$  um inteiro positivo livre de quadrado. Os ternos  $(x, y, z) \in \mathbb{T}_m$  são chamados ternos quase pitagóricos. Temos como objetivo, determinar algumas propriedades dos elementos pertencentes a  $\mathbb{T}_m$ . Para isso, definimos uma relação de equivalência  $\sim$  sobre  $\mathbb{T}_m$  e tomamos suas classes de equivalências, para formar um novo conjunto  $\mathbb{T}_{[m]}$ , conhecido como conjunto quociente de  $\mathbb{T}_m$  por  $\sim$ , ou seja,  $\mathbb{T}_{[m]} = \mathbb{T}_m / \sim$ . Em  $\mathbb{T}_{[m]}$ , consideramos as classes de equivalências  $[(a, b, c)]$  tais que  $a$  e  $b$  sejam primos entre si. E também definimos uma operação sobre  $\mathbb{T}_{[m]}$ . Mostramos que  $\mathbb{T}_{[m]}$ , munido dessa operação, é um grupo abeliano. Por fim, identificamos cada elemento de  $\mathbb{T}_{[m]}$  por um número complexo da forma

$w = \frac{x}{z} + i \frac{y\sqrt{m}}{z}$  sobre circunferência unitária com centro na origem no plano complexo.

**Palavras-chave:** Grupo abeliano; números complexos; terno quase pitagórico; classes de equivalências.

## Abstract

In this work, we present the set  $\mathbb{T}_m$ , consisting of triples  $(x, y, z)$ , where  $x$ ,  $y$ , and  $z$  are integers that satisfy the equation  $x^2 + my^2 = z^2$ , with  $z > 0$ , and  $m$  is a square-free positive integer. The triples  $(x, y, z) \in \mathbb{T}_m$  are called almost pythagorean triples. Our goal is to determine some properties of the elements belonging to  $\mathbb{T}_m$ . To do so, we define an equivalence relation  $\sim$  on  $\mathbb{T}_m$  and take its equivalence classes to form a new set  $\mathbb{T}[m]$ , known as the quotient set of  $\mathbb{T}_m$  by  $\sim$ , that is,  $\mathbb{T}[m] = \mathbb{T}_m / \sim$ . In  $\mathbb{T}[m]$ , we consider the equivalence classes  $[(a, b, c)]$  such that  $a$  and  $b$  are coprime. And we also define an operation on  $\mathbb{T}[m]$ . Show that  $\mathbb{T}[m]$ , equipped with this operation, is an abelian group. Finally, we represent each element of  $\mathbb{T}[m]$  as a complex number

in the form  $w = \frac{x}{z} + i \frac{y\sqrt{m}}{z}$  on the unit circle centered at the origin in the complex plane.

**Keywords:** Abelian group; complex numbers; Almost Pythagorean Triple; equivalence classes.

## 1. Introdução

Neste trabalho estudaremos o conjunto solução da equação  $x^2 + my^2 = z^2$  com  $m$  um inteiro positivo livre de quadrados. Tal equação é obtida a partir de uma pequena modificação na equação de Pitágoras para triângulo retângulos ( $x^2 + y^2 = z^2$ ). Uma tripla de inteiros  $(x, y, z)$  que satisfaz a equação  $x^2 + my^2 = z^2$ , com  $m$  um inteiro positivo livre de quadrados, é chamada de terno

quase pitagórico (veja a observação 1). Embora sejam chamados de terno quase pitagórico um terno  $(x, y, z)$ , com  $x, y$  e  $z$  inteiros, tais que  $x^2 + my^2 = z^2$ , não encontramos evidências de que Pitágoras tenha estudado esse tipo de equação. A justificativa para essa denominação é o fato de tal equação assemelhar-se à equação do Teorema de Pitágoras. Além disso, em nossas pesquisas, não encontramos referências bibliográficas sobre o assunto, a não ser [2] e grande parte do teor deste trabalho segue de maneira específica o que foi feito no artigo [1], o que justifica a terminologia e a notação que adotamos neste texto. Outro fato que vale destacar é que algumas das propriedades que identificamos foram enunciadas e provadas sem evidências de já terem sido estudadas anteriormente. O objetivo deste trabalho é estudar o conjunto solução da equação  $x^2 + my^2 = z^2$  com  $x, y, z$  inteiros, com  $z > 0$  e  $m$  livre de quadrados, apresentando uma expressão que representa alguns elementos deste conjunto solução e também algumas de suas propriedades. Cabe dizer que não há prejuízos neste estudo em admitir a condição  $z > 0$  acima, conforme será justificado na próxima seção.

## 2. Definição e Algumas Propriedades

**Definição 1.** Um número inteiro livre de quadrados é um inteiro que não é divisível por nenhum número ao quadrado diferente de 1.

**Definição 2.** Sejam  $x, y, z \in \mathbb{Z}$ . O terno  $(x, y, z)$  é chamado terno quase pitagórico quando satisfaz a equação

$$x^2 + my^2 = z^2 \tag{1}$$

com  $m$  um inteiro positivo fixo livre de quadrados.

*Observação 1.* Note que esta equação assemelha-se à equação de Pitágoras associada a triângulos retângulos, o que difere é apenas o coeficiente natural  $m$  livre de quadrados. Adotamos essa condição sobre  $m$ , caso contrário, em  $m = k^2n$ , com  $k, n \in \mathbb{Z}$  e  $n$  livre de quadrados, basta escrever  $m$  usando o teorema fundamental da aritmética e agrupando os termos de potência par. Dessa forma, obtemos

$$x^2 + my^2 = z^2 \Leftrightarrow x^2 + nk^2y^2 = z^2 \Leftrightarrow x^2 + n(k^2y^2) = z^2.$$

Esta última equação é uma equação quase pitagórica com  $n$  livre de quadrados.

**Exemplo 1.** O terno  $(1, 2, 3)$ , satisfaz a equação  $x^2 + 2y^2 = z^2$ . Portanto é um terno quase pitagórico, bem como os ternos  $(2, 4, 6)$  e  $(3, 6, 9)$  também o são.

**Proposição 1.** *Seja  $(x, y, z)$  um terno quase pitagórico.*

1. Se  $x = 0$ , então  $y = z = 0$ .
2. Se  $z = 0$ , então  $x = y = 0$ .

*Demonstração.* Seja  $(x, y, z)$  um terno quase pitagórico.

1. De fato, se  $x = 0$ , então

$$x^2 + my^2 = z^2 \Rightarrow my^2 = z^2 \Rightarrow my^2 - z^2 = 0 \Rightarrow m \left( y^2 - \frac{z^2}{m} \right) = 0.$$

Como  $m$  é um inteiro positivo livre de quadrados ( $m > 1$ ), temos

$$m \left( y^2 - \frac{z^2}{m} \right) = 0 \Rightarrow y^2 - \frac{z^2}{m} = 0 \Rightarrow \left( y + \frac{z}{\sqrt{m}} \right) \cdot \left( y - \frac{z}{\sqrt{m}} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y - \frac{z}{\sqrt{m}} = 0 \\ y + \frac{z}{\sqrt{m}} = 0 \end{cases}.$$

Somando as duas equações do sistema acima, obtemos  $y = 0$ , e subtraindo uma equação pela outra, obtemos  $z = 0$ .

2. Se  $z = 0$  então,  $x^2 + my^2 = z^2 \Rightarrow x^2 + my^2 = 0$ . Mas como  $m \in \mathbb{N}$  é livre de quadrados ( $m > 1$ ), temos  $x^2 + my^2 \neq 0$ , a não ser que  $x = y = 0$ .

□

No exemplo a seguir atribuímos alguns valores para  $z$ , a fim de analisar o comportamento da equação  $x^2 + my^2 = z^2$ .

**Exemplo 2.** Para  $z = 0$ , a equação (1) reduz-se a  $x^2 + my^2 = 0$ , que pela proposição (1) só admite a solução  $(0, 0)$ .

Para  $z = c > 0$ , onde  $c$  é uma constante, temos que a equação (1) torna-se

$$x^2 + my^2 = c^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{c^2} + m \frac{y^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{\frac{c^2}{m}} = 1,$$

que é a equação de uma elipse de eixo maior  $2c$  e eixo menor  $\frac{2c}{\sqrt{m}}$ .

O exemplo acima permite perceber que todas essas equações referem-se a equações de elipses centradas na origem do plano cartesiano, e os ternos quase pitagóricos com  $z < 0$  estão associados a pontos de uma elipse que é formada pela mesma equação determinada no caso em que é  $z > 0$ . Já quando  $z = 0$ , a proposição (1) diz-nos que única solução para a equação (1) é o terno  $(0, 0, 0)$ .

Daqui por diante, vamos considerar o conjunto  $\mathbb{T}_m$  abaixo

$$\mathbb{T}_m = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3; \ x^2 + my^2 = z^2 \text{ e } z > 0\}$$

como o conjunto dos ternos quase pitagóricos.

A seguir apresentamos uma proposição que garante a existência de uma infinidade de ternos quase pitagóricos.

**Proposição 2.** Se  $(x_0, y_0, z_0)$  é um terno quase pitagórico, então  $(ax_0, ay_0, az_0)$  também o é, para todo  $a \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* De fato, se  $(x_0, y_0, z_0)$  é um terno quase pitagórico, então pela definição 1 temos  $x_0^2 + my_0^2 = z_0^2$ .

Logo, para qualquer inteiro  $a$ , temos

$$(ax_0)^2 + m \cdot (ay_0)^2 = a^2(x_0^2 + m \cdot y_0^2) = a^2z_0^2 = (az_0)^2.$$

Portanto  $(ax_0, ay_0, az_0)$  é um terno quase pitagórico, para todo  $a \in \mathbb{Z}$ .

□

Desse modo se conseguirmos encontrar um terno quase pitagórico, então podemos, através deste, gerar infinitos outros ternos que satisfazem a equação (1).

**Proposição 3.** *Seja  $(x, y, z)$  um terno quase pitagórico. Se  $d = \text{mdc}(x, y)$  então  $(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d})$  é um terno quase pitagórico.*

*Demonstração.* De fato, se  $(x, y, z)$  é um terno quase pitagórico, então  $x^2 + my^2 = z^2$ .

Agora supondo  $d = \text{mdc}(x, y)$ , temos que

$$d \mid x \Rightarrow d^2 \mid x^2$$

e também que

$$d \mid y \Rightarrow d^2 \mid my^2.$$

Logo  $d^2 \mid (x^2 + my^2) \Rightarrow d^2 \mid z^2 \Rightarrow d \mid z$ .

Isto é, existem  $x', y', z' \in \mathbb{Z}$  tais que

$$x = x'd, \quad y = y'd, \quad z = z'd \quad \text{e} \quad \text{mdc}(x', y') = 1.$$

Substituindo as igualdades acima em  $x^2 + my^2 = z^2$ , obtemos

$$\begin{aligned} x^2 + my^2 = z^2 &\Leftrightarrow x'^2 d^2 + my'^2 d^2 = z'^2 d^2 \\ &\Leftrightarrow x'^2 + my'^2 = z'^2. \end{aligned}$$

Como  $x' = \frac{x}{d}$ ,  $y' = \frac{y}{d}$ ,  $z' = \frac{z}{d}$ , concluímos que  $(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}, \frac{z}{d})$  é um terno quase pitagórico, onde  $\text{mdc}(x', y') = 1$ . □

Esta proposição motiva-nos a introduzir a seguinte definição.

**Definição 3.** *Sejam  $x, y, z \in \mathbb{Z}$  satisfazendo  $x^2 + my^2 = z^2$ . Quando  $\text{mdc}(x, y) = 1$ , o terno  $(x, y, z)$  é denominado terno quase pitagórico primitivo.*

Com isso podemos pensar na possibilidade de estudar o conjunto de todos os ternos quase pitagóricos, utilizando apenas os ternos quase pitagóricos primitivos, pois pelas proposições anteriores podemos gerar qualquer terno quase pitagórico, a partir de um terno quase pitagórico primitivo.

**Exemplo 3.** No Exemplo 1 temos que  $(1, 2, 3)$  é um terno quase pitagórico primitivo para a equação  $x^2 + 2y^2 = z^2$ , e tal terno gera os outros ternos quase pitagóricos:

$$(2, 4, 6) = (2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3) \quad \text{e} \quad (3, 6, 9) = (3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3).$$

Pela Proposição 2, concluímos que  $(t, 2t, 3t)$  é um terno quase pitagórico, para todo  $t \in \mathbb{Z}$ .

A seguir, vamos determinar uma expressão que caracteriza alguns ternos quase pitagóricos. Para isso faremos a seguinte observação.

Se  $z \neq 0$ , então

$$x^2 + my^2 = z^2 \Rightarrow \left(\frac{x}{z}\right)^2 + m \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1 \Rightarrow u^2 + mv^2 = 1.$$

Onde  $u = \frac{x}{z}$  e  $v = \frac{y}{z}$ .

Desse modo, encontrar ternos quase pitagóricos é equivalente a encontrar soluções racionais da equação

$$u^2 + mv^2 = 1,$$

que representa uma elipse com o centro na origem do plano cartesiano.

**Teorema 1.** *Dados  $a$  e  $b$  números reais não simultaneamente nulos e  $m > 0$  um número real, o par ordenado*

$$(u, v) = \left( \frac{a^2 - mb^2}{a^2 + mb^2}, \frac{2ab}{a^2 + mb^2} \right)$$

*descreve todos os pontos da elipse de equação  $u^2 + mv^2 = 1$ .*

*Demonstração.* Inicialmente, note que  $(1, 0)$  é solução da equação  $u^2 + mv^2 = 1$ , para todo  $m \in \mathbb{R}$  e também, que  $(1, 0)$  é da forma escrita no enunciado acima; para isso basta fazer  $b = 0$ .

Agora observe que os pontos pertencentes à reta  $r$  que passa pelos pontos  $(1, 0)$  e  $(a, b)$  qualquer, são do tipo

$$(1, 0) + t(a, b) = (1 + ta, tb).$$

Se  $t \neq 0$ , então a interseção da reta  $r$  com a elipse em questão possui dois pontos, um deles é  $(1, 0)$  e o segundo é um ponto  $P(1 + ta, tb)$  tal que  $(1 + ta)^2 + m(tb)^2 = 1$ , como na Figura 1.

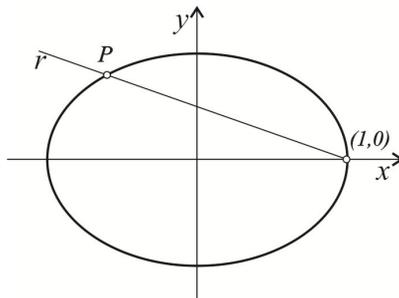


Figura 1: Ponto sobre uma elipse  $u^2 + mv^2 = 1$

Assim,

$$\begin{aligned}
 (1 + ta)^2 + m(tb)^2 = 1 &\Leftrightarrow 1 + 2ta + t^2a^2 + mt^2b^2 = 1 \\
 &\Leftrightarrow 2ta + t^2a^2 + mt^2b^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow t(2a + ta^2 + mtb^2) = 0.
 \end{aligned}$$

Logo  $t = 0$  ou  $2a + ta^2 + mtb^2 = 0$ .

Dessa última expressão obtemos

$$\begin{aligned}
 2a + ta^2 + mtb^2 = 0 &\Leftrightarrow t(a^2 + mb^2) = -2a \\
 &\Leftrightarrow t = \frac{-2a}{a^2 + mb^2}.
 \end{aligned}$$

Substituindo  $t = \frac{-2a}{a^2 + mb^2}$  em  $P(1 + ta, tb)$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 P(1 + ta, tb) &= P\left(1 - \frac{2a^2}{a^2 + mb^2}, -\frac{2ab}{a^2 + mb^2}\right) \\
 &= P\left(\frac{-a^2 + mb^2}{a^2 + mb^2}, \frac{-2ab}{a^2 + mb^2}\right).
 \end{aligned}$$

Como esses pontos são simétricos em relação ao eixo- $x$  e ao eixo- $y$ , podemos considerar os pontos representado pelo par ordenado

$$\left(\frac{a^2 - mb^2}{a^2 + mb^2}, \frac{2ab}{a^2 + mb^2}\right), \quad (2)$$

tais que

$$\left(\frac{a^2 - mb^2}{a^2 + mb^2}\right)^2 + m\left(\frac{2ab}{a^2 + mb^2}\right)^2 = \frac{(a^2 + mb^2)^2}{(a^2 + mb^2)^2} = 1.$$

Portanto, a expressão (2) representa os pontos pertencentes à elipse de equação  $u^2 + mv^2 = 1$ .  $\square$

*Observação 2.* Tomando  $a, b \in \mathbb{Z}$  não simultaneamente nulos e  $m > 0$  um inteiro, temos que  $(a^2 - mb^2)$ ,  $(2ab)$  são inteiros, e  $(a^2 + mb^2)$  um inteiro positivo, logo as coordenadas dos pontos representados por (2) são racionais, ou seja,

$$\left(\frac{a^2 - mb^2}{a^2 + mb^2}, \frac{2ab}{a^2 + mb^2}\right) \in \mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}.$$

**Teorema 2.** *Se  $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$ , então o terço  $(a^2 - mb^2, 2ab, a^2 + mb^2)$  é um terço quase pitagórico, para todo  $m \in \mathbb{N}$  livre de quadrados.*

*Demonstração.* De fato,

$$\begin{aligned}
 (a^2 - mb^2)^2 + m(2ab)^2 &= a^4 - 2ma^2b^2 + m^2b^4 + 4ma^2b^2 \\
 &= (a^2)^2 + 2ma^2b^2 + (mb^2)^2 \\
 &= (a^2 + mb^2)^2
 \end{aligned}$$

O que implica que  $(a^2 - mb^2, 2ab, a^2 + mb^2)$  é um terço quase pitagórico.  $\square$

A expressão enunciada no teorema anterior sugere que, se  $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$ , então os ternos do tipo

$$(a^2 - mb^2, 2ab, a^2 + mb^2), \quad (3)$$

são soluções de uma equação do tipo  $x^2 + my^2 = z^2$ . Mas recíproca deste teorema não é verdadeira, pois podemos encontrar diversos ternos quase pitagóricos que não podem ser descritos pela expressão acima com  $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$ .

Veja que o terço  $(1, 2, 3)$  é solução da equação  $x^2 + 2y^2 = z^2$ , mas este terço não pode ser representado pela tripla dada em (3), pois não encontramos valores inteiros para  $a, b, c$  que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} a^2 - 2b^2 = 1 \\ a^2 + 2b^2 = 3 \end{cases}.$$

A saber  $a = \pm\sqrt{2}$  e  $b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$  são as soluções para este sistema.

### 3. Classe de Ternos Quase Pitagóricos

As proposições demonstradas na seção anterior permitem-nos pensar em particionar o conjunto  $\mathbb{T}_m$  em um conjunto de classes, onde cada classe é gerada por um terno quase pitagórico primitivo. Para isso, definimos a seguinte relação.

**Definição 4.** Dizemos que  $(x, y, z), (a, b, c) \in \mathbb{T}_m$  estão relacionados pela relação binária  $\sim$  sobre  $\mathbb{T}_m$  e escrevemos  $(x, y, z) \sim (a, b, c)$  quando existirem  $r, s \in \mathbb{Z}^*$  tais que  $r(x, y, z) = s(a, b, c)$ .

**Proposição 4.** A Relação  $\sim$  definida sobre  $\mathbb{T}_m$  é uma relação de equivalência.

*Demonstração.* Sejam  $(a, b, c), (d, e, f), (u, v, w) \in \mathbb{T}_m$ , temos que

1. ( $\sim$  é reflexiva). Com efeito,

$$(a, b, c) = 1 \cdot (a, b, c) \Rightarrow (a, b, c) \sim (a, b, c).$$

2. ( $\sim$  é simétrica). De fato, se  $(a, b, c) \sim (d, e, f)$ , então, pela definição existem  $r, s \in \mathbb{Z}^*$  tais que

$$r(a, b, c) = s(d, e, f)$$

e como a relação de igualdade é uma relação simétrica temos que  $s(d, e, f) = r(a, b, c)$ .

Logo  $(d, e, f) \sim (a, b, c)$ .

3. ( $\sim$  é transitiva).

Se  $(a, b, c) \sim (d, e, f)$  e  $(d, e, f) \sim (u, v, w)$  então pela definição da relação  $\sim$ , existem  $p, q, r, s \in \mathbb{Z}^*$  tais que

$$p(a, b, c) = q(d, e, f) \quad \text{e} \quad r(d, e, f) = s(u, v, w).$$

Multiplicando membro a membro a primeira igualdade por  $r$  e a segunda por  $q$ , obtemos

$$pr(a, b, c) = qr(d, e, f) \quad \text{e} \quad qr(d, e, f) = qs(u, v, w).$$

Logo  $pr(a, b, c) = qs(u, v, w)$ , o que significa que

$$(a, b, c) \sim (u, v, w).$$

Desse modo concluímos que a relação  $\sim$  é uma relação de equivalência sobre  $\mathbb{T}_m$ . □

Uma vez que a relação  $\sim$  é uma relação de equivalência sobre  $\mathbb{T}_m$ , faz sentido considerarmos o conjunto quociente de  $\mathbb{T}_m$  pela relação  $\sim$ . Denotaremos esse conjunto quociente por  $\mathbb{T}_{[m]}$  e cada elemento de  $\mathbb{T}_{[m]}$  será denominado classe de ternos quase pitagóricos.

Dado  $(a, b, c) \in \mathbb{T}_m$ , a classe de ternos quase pitagóricos determinada por  $(a, b, c)$  consiste no conjunto

$$[(a, b, c)] = \{(x, y, z) \in \mathbb{T}_m : (x, y, z) \sim (a, b, c)\}.$$

Dizemos que cada elemento  $(a, b, c)$  é um representante da classe  $[(a, b, c)]$ . É evidente que cada classe  $[(a, b, c)]$  possui uma infinidade de representantes, porém pelas proposições 2 e 3 podemos escolher um terno quase pitagórico primitivo dessa classe para a sua representação.

**Proposição 5.** Para cada classe

$$[(a, b, c)] = \{(x, y, z) \in \mathbb{T}_m; (x, y, z) \sim (a, b, c)\}$$

existe apenas um único terno quase pitagórico primitivo.

*Demonstração.* Seja  $(a, b, c)$  um terno quase pitagórico primitivo, que por definição  $\text{mdc}(a, b) = 1$ .

Note inicialmente que os ternos quase pitagóricos primitivos com  $b = 0$  são  $(1, 0, 1)$  e  $(-1, 0, 1)$  apenas e pertencem a classes diferentes, além disso não é difícil ver que são os únicos primitivos de suas classes.

Agora, se  $b \neq 0$ , então  $a \neq 0$  também, pois  $a^2 + mb^2 = z^2$  e  $\text{mdc}(a, b) = 1$ .

Logo, se  $(d, e, f) \in [(a, b, c)]$  é um terno quase pitagórico primitivo, então pela definição 4 existem  $r, s \in \mathbb{Z}^*$  tais que  $(rd, re, rf) = (sa, sb, sc)$ , isto é,

$$\begin{cases} rd = sa \\ re = sb \\ rf = sc \end{cases} \implies \begin{cases} rdb = sab \\ rea = sba \\ rf = sc \end{cases} .$$

Subtraindo membro a membro a segunda equação da primeira (última chave), temos  $rdb - rea = 0$ , o que implica  $db = ea$ . Assim  $d \mid ea$ , e como  $\text{mdc}(d, e) = 1$  temos  $d \mid a$ , do mesmo modo obtemos  $a \mid bd$  e como  $\text{mdc}(a, b) = 1$  afirmamos que  $a \mid d$ . Neste caso temos  $d \mid a$  e  $a \mid d$  e pelas propriedades da divisibilidade concluímos que  $d = \pm a$ . Analogamente se obtém  $e = \pm b$ .

Logo, se  $a^2 + mb^2 = d^2 + me^2$ , então  $c^2 = f^2$ , e como estamos considerando apenas os ternos com a terceira componente positiva, concluímos que  $c = f$ .

Portanto o terno  $(d, e, f)$  pode ser um dos ternos  $(-a, -b, c)$ ,  $(-a, b, c)$ ,  $(a, -b, c)$  ou  $(a, b, c)$ . Mas os três primeiros ternos não pertencem à classe de  $[(a, b, c)]$  e como  $(d, e, f) \in [(a, b, c)]$ , concluímos que  $(d, e, f) = (a, b, c)$  como queríamos.  $\square$

**Proposição 6.** Seja  $[(a, b, c)] \in \mathbb{T}_{[m]}$ , com  $a$  e  $b$  primos entre si. Se  $(x, y, z) \in [(a, b, c)]$  então  $(x, y, z) = t(a, b, c)$ , para algum  $t \in \mathbb{Z}^*$ .

*Demonstração.* De fato, sejam  $(x, y, z) \in [(a, b, c)]$  com  $\text{mdc}(a, b) = 1$ , temos pela definição da relação  $\sim$  que existem  $r, s \in \mathbb{Z}^*$  tais que

$$r(x, y, z) = s(a, b, c).$$

Seja  $d = \text{mdc}(r, s)$ , logo existe  $t, u \in \mathbb{Z}^*$  tais que  $r = du$  e  $s = dt$ .

Note que  $\text{mdc}(u, t) = 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} r(x, y, z) = s(a, b, c) &\implies du(x, y, z) = dt(a, b, c) \\ &\implies u(x, y, z) = t(a, b, c) \\ &\implies (ux, uy, uz) = (ta, tb, tc). \end{aligned}$$

Em consequência disso temos  $ux = ta$  e  $uy = tb$ . Desse modo  $u \mid ta$ , mas como  $u$  e  $t$  são primos entre si, temos  $u \mid a$ . Analogamente obtemos que  $u \mid b$ . Concluindo que  $u = 1$ , pois  $a$  e  $b$  são primos entre si.

Portanto, se  $u(x, y, z) = t(a, b, c)$ , então  $(x, y, z) = t(a, b, c)$ , para algum  $t \in \mathbb{Z}^*$ .  $\square$

Assim, se  $(a, b, c)$  é um terço quase pitagórico primitivo, então podemos representar sua classe por

$$[(a, b, c)] = \{(x, y, z) \in \mathbb{T}_m; (x, y, z) = (ta, tb, tc), \forall t \in \mathbb{Z}^*\}.$$

### 3.1. Operação em $\mathbb{T}_m$

**Lema 1.** Se  $(x, y, z)$  e  $(a, b, c)$  são ternos quase pitagóricos, então

$$(zc)^2 = (xa - myb)^2 + m(xb + ya)^2.$$

*Demonstração.* Observe inicialmente que, se  $(x, y, z)$  e  $(a, b, c)$  são ternos quase pitagóricos, então

$$x^2 + my^2 = z^2 \quad \text{e} \quad a^2 + mb^2 = c^2.$$

Multiplicando essas duas igualdades membro a membro, temos

$$\begin{aligned} (zc)^2 = z^2 \cdot c^2 &= (x^2 + my^2) \cdot (a^2 + mb^2) \\ &= x^2a^2 + mx^2b^2 + my^2a^2 + m^2y^2b^2. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo  $(2xamyb)$ , adequadamente, na última expressão obtemos

$$x^2a^2 - 2xamyb + m^2y^2b^2 + mx^2b^2 + 2xamyb + my^2a^2.$$

Fatorando esta última expressão temos  $(xa - myb)^2 + m(xb + ya)^2 = (zc)^2$ . □

Tal resultado mostra-nos que o produto de dois inteiros da forma  $x^2 + my^2$  é também dessa forma. Podemos então definir uma operação sobre  $\mathbb{T}_{[m]}$ , que denotaremos por  $\star$  da seguinte forma.

**Definição 5.** Dadas  $[(x, y, z)]$  e  $[(a, b, c)]$  duas classes do conjunto  $\mathbb{T}_{[m]}$ , definimos a operação  $\star$  da seguinte maneira

$$[(x, y, z)] \star [(a, b, c)] := [(xa - myb, xb + ya, zc)].$$

Mostraremos agora que essa operação está bem definida no conjunto  $\mathbb{T}_{[m]}$ , ou seja, a operação

$$[(x, y, z)] \star [(a, b, c)]$$

independe dos representantes das classes, mais precisamente temos a seguinte

**Proposição 7.** Sejam  $(x, y, z)$ ,  $(a, b, c)$ ,  $(x', y', z')$  e  $(a', b', c')$  são ternos quase pitagóricos tais que  $\text{mdc}(x, y) = \text{mdc}(a, b) = 1$ . Se,

$$[(x, y, z)] = [(x', y', z')] \quad \text{e} \quad [(a, b, c)] = [(a', b', c')],$$

então

$$[(x, y, z)] \star [(a, b, c)] = [(x', y', z')] \star [(a', b', c')].$$

*Demonstração.* Sejam  $(x, y, z)$ ,  $(a, b, c)$ ,  $(x', y', z')$  e  $(a', b', c')$  ternos quase pitagóricos como nas hipóteses do enunciado. Então existem  $r, s \in \mathbb{Z}^*$  tais que

$(x', y', z') = (rx, ry, rz)$  e  $(a', b', c') = (sa, sb, sc)$ , assim

$$\begin{aligned} [(x', y', z')] \star [(a', b', c')] &= [(rx, ry, rz)] \star [(sa, sb, sc)] \\ &= [(rxsa - mrysb, rxsb + rysa, rzsc)] \\ &= [(rs(xa - myb), rs(xb + ya), rs(zc))] \\ &= [(x\tilde{a} - myb, xb + ya, zc)] \\ &= [(x, y, z)] \star [(a, b, c)]. \end{aligned}$$

□

Esse resultado garante que a operação  $\star$  está bem definida no conjunto  $\mathbb{T}_{[m]}$  e encerraremos esta seção demonstrando que  $(\mathbb{T}_{[m]}, \star)$  é um grupo abeliano.

**Teorema 3.**  $(\mathbb{T}_{[m]}, \star)$  é um Grupo Abeliano, isto é, a operação  $\star$  é associativa, comutativa, existe um elemento neutro para a operação  $\star$  em  $\mathbb{T}_{[m]}$ , e cada elemento de  $\mathbb{T}_{[m]}$  possui um simétrico em relação a operação  $\star$ .

*Demonstração.* Sejam então  $[(x, y, z)]$ ,  $[(a, b, c)]$  e  $[(p, q, r)]$  classes de ternos pertencente a  $\mathbb{T}_{[m]}$ .

i) A operação  $\star$  é associativa. De fato,

$$\begin{aligned} \{[(x, y, z)] \star [(a, b, c)]\} \star [(p, q, r)] &= [(xa - myb, xb - ya, zc)] \star [(p, q, r)] \\ &= [((xa - myb)p - m(xb + ya)q, (xa - myb)q + (xb + ya)p, zcr)] \\ &= [(xap - mybp - mx bq - myaq, xaq - mybq + xbp + yap, zcr)] \\ &= [(x(ap - mpq) - my(bp + aq), x(aq + bp) + y(ap - mbq), zcr)] \\ &= [(x, y, z)] \star [(ap - mpq, bp + aq, cr)] \\ &= [(x, y, z)] \star \{[(a, b, c)] \star [(p, q, r)]\}. \end{aligned}$$

ii) A operação  $\star$  é comutativa. Com efeito,

$$\begin{aligned} [(x, y, z)] \star [(a, b, c)] &= [(xa - myb, xb - ya, zc)] \\ &= [(ax - mby, bx - ay, cz)] \\ &= [(a, b, c)] \star [(x, y, z)]. \end{aligned}$$

iii) A existência do elemento neutro: Existe em  $\mathbb{T}_{[m]}$  um elemento  $[(x, y, z)]$  tal que para todo  $[(a, b, c)]$  em  $\mathbb{T}_{[m]}$  temos

$$[(a, b, c)] \star [(x, y, z)] = [(a, b, c)] \Leftrightarrow [(ax - mby, ay + bx, cz)] = [(a, b, c)].$$

A partir da última equação acima, obtemos o sistema

$$\begin{cases} ax - mby = a \\ bx + ay = b \\ cz = c \end{cases}.$$

Como  $c > 0$ , da última equação segue que  $z = 1$ .

Agora usando a regra de Cramer para resolver o sistema

$$\begin{cases} ax - mby = a \\ bx + ay = b \end{cases}$$

temos,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -mb \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + mb^2 = c^2.$$

E como  $c > 0$ , o sistema é possível e determinado. Assim,

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a & -mb \\ b & a \end{vmatrix} = c^2 \quad \text{e} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0.$$

Portanto,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{c^2}{c^2} = 1 \quad \text{e} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{c^2} = 0.$$

Logo, o elemento neutro é a classe  $[(x, y, z)] = [(1, 0, 1)]$ .

iv) Existência de simétricos: Para cada  $[(a, b, c)] \in \mathbb{T}_{[m]}$  existe  $[(x, y, z)] \in \mathbb{T}_{[m]}$  tal que

$$[(a, b, c)] \star [(x, y, z)] = [(1, 0, 1)] \Leftrightarrow [(ax - mby, ay + bx, cz)] = [(1, 0, 1)].$$

A partir da última equação acima, obtemos o sistema

$$\begin{cases} ax - mby = 1 \\ bx + ay = 0 \\ cz = 1 \end{cases}.$$

Como  $c > 0$ , da última equação segue que  $f = \frac{1}{z}$ .

Agora usando a regra de Cramer para resolver o sistema

$$\begin{cases} ax - mby = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

temos,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -mb \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + mb^2 = c^2.$$

E como  $c > 0$ , o sistema é possível e determinado.

Logo,

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -mb \\ 0 & a \end{vmatrix} = a \quad \text{e} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b.$$

Assim,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{a}{c^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-b}{c^2}.$$

Portanto,

$$\left[ \left( \frac{a}{c^2}, \frac{-b}{c^2}, \frac{1}{c} \right) \right] = \left[ \frac{1}{c^2} [(a, -b, c)] \in [(a, -b, c)]. \right.$$

Desse modo,  $[(a, -b, c)]$  é o simétrico que procuramos. □

#### 4. Ternos Quase Pitagóricos e os Números Complexos

Nesta seção apresentaremos uma relação entre um elemento de  $\mathbb{T}_m$  e um número complexo, mais especificamente um número complexo pertencente à circunferência unitária centrada na origem do plano complexo. Tal relação permite-nos visualizar geometricamente algumas propriedades de uma classe  $[(a, b, c)] \in \mathbb{T}_{[m]}$ .

Para isso, é necessário definir uma função cujo domínio é  $\mathbb{C}$ , e que toma valores em  $\mathbb{R}^+$ , a chamada Função Norma. Também apresentaremos algumas de suas propriedades.

**Definição 6** (Função Norma). A função  $\mathcal{N}$  definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{N} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ a+bi &\longmapsto a^2+b^2 \end{aligned}$$

é chamada de Função Norma em  $\mathbb{C}$ .

A proposição seguinte contém propriedades importantes da Função Norma, que utilizaremos no transcorrer deste texto.

**Proposição 8.** *Seja  $\mathcal{N}$  a Função Norma em  $\mathbb{C}$ . Então,*

- (i)  $\mathcal{N}(\alpha) \geq 0, \forall \alpha \in \mathbb{C}$ ;
- (ii)  $\mathcal{N}(\alpha) = 0$ , se, e somente se,  $\alpha = 0$ ;
- (iii)  $\mathcal{N}(\alpha) = \alpha\bar{\alpha}$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{C}$ , onde  $\bar{\alpha}$  denota o conjugado de  $\alpha$ ;
- (iv)  $\mathcal{N}(\alpha\beta) = \mathcal{N}(\alpha)\mathcal{N}(\beta), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ; isto é, a Função Norma preserva a multiplicação.

*Demonstração.* Para que este texto não fique extenso, e o leitor não se canse com demonstrações que não são o objetivo central deste trabalho, provaremos aqui apenas a afirmação (iv), pois é a propriedade que será de mais importância neste trabalho. As demais propriedades podem ser demonstradas sem muito esforço pelo leitor, ou então consultar [3] e [4].

(iv) Dados dois números complexos  $\alpha = a + bi$  e  $\beta = c + di$  quaisquer, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\alpha\beta) &= \mathcal{N}((a + bi)(c + di)) \\ &= \mathcal{N}((ac - bd) + (bc + ad)i) \\ &= (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 \\ &= a^2c^2 - 2acbd + b^2d^2 + b^2c^2 + 2bcad + a^2d^2 \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2 \\ &= a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2) \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ &= \mathcal{N}(\alpha) \cdot \mathcal{N}(\beta) \end{aligned}$$

□

Utilizaremos a função norma como uma importante ferramenta para associar um terno quase pitagórico a um número complexo, pois tomando  $(x, y, z) \in \mathbb{T}_m$ , temos

$$z^2 = x^2 + my^2 = (x + iy\sqrt{m})(x - iy\sqrt{m}) = \mathcal{N}(x + iy\sqrt{m}).$$

Assim podemos associar cada terno quase pitagórico  $(x, y, z)$  a um número complexo pertencente ao conjunto

$$\mathbb{Z}[i\sqrt{m}] = \{x + iy\sqrt{m} / x, y \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

O leitor mais interessado pode verificar que  $\mathbb{Z}[i\sqrt{m}]$  é um subanel do anel  $\mathbb{C}$ , munido das operações de adição e multiplicação usuais de números complexos.

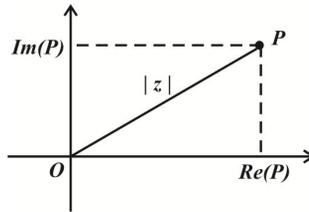


Figura 2: Representação no plano complexo

Na figura 2 temos a representação geométrica de um ponto  $P = x + iy\sqrt{m}$ , onde  $\text{Re}(P) = x$ ,  $\text{Im}(P) = y\sqrt{m}$  e

$$|z| = \sqrt{\mathcal{N}(x + iy\sqrt{m})} = \sqrt{x^2 + my^2}.$$

**Exemplo 4.** De acordo com o exemplo 1, o terno  $(1, 2, 3)$  é uma solução da equação  $x^2 + 2y^2 = z^2$ , logo podemos associá-lo ao número complexo  $1 + i2\sqrt{2}$ . Desse mesmo modo associamos  $(2, 4, 6)$  e  $(3, 6, 9)$  a

$$2 + i4\sqrt{2} = 2(1 + i2\sqrt{2}) \quad \text{e} \quad 3 + i6\sqrt{2} = 3(1 + i2\sqrt{2}),$$

respectivamente.

Generalizando este exemplo, identificamos que os elementos de uma classe  $[(a, b, c)] \in \mathbb{T}_{[m]}$  estão dispostos geometricamente sobre a reta que passa pelo segmento  $\overline{OP}$  no plano complexo, onde  $O$  é a origem do plano complexo e  $P = a + ib\sqrt{m}$ .

Consideremos agora a circunferência  $S_1 = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1\}$ , centrada no ponto  $O = 0 + i0\sqrt{m}$ . Afirmar que  $S_1$  é um grupo multiplicativo segue de que  $S_1$  é um subgrupo de  $\mathbb{C}^*$  e do item iv) da Proposição 8, visto que, dados  $u, v \in S_1$  temos

1.  $\mathcal{N}(1) = 1^2 = 1 \in S_1$ .
2.  $\mathcal{N}(uv) = \mathcal{N}(u)\mathcal{N}(v) = 1.1 = 1$ , logo  $uv \in S_1$ .
3.  $\mathcal{N}(u^{-1}u) = \mathcal{N}(u^{-1})\mathcal{N}(u) = \mathcal{N}(1) = 1$ , então  $\mathcal{N}(u^{-1}) = 1$ , então  $u^{-1} \in S_1$ .

Observamos que os números complexos  $x + iy\sqrt{m}$  referentes aos ternos quase pitagóricos  $(x, y, z)$  estão no exterior de  $S_1$ , com exceção do terno  $(1, 0, 1)$ , que pertence a  $S_1$ . Logo, se  $x$  e  $y$  são diferentes de zero, então  $P = x + iy\sqrt{m}$  pode ser associado a um ponto  $W$  sobre a circunferência unitária  $S_1$  no plano complexo, onde  $W = \overline{OP} \cap S_1$  é representado pelo número complexo  $W = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$ , sendo  $\theta$  o ângulo com vértice em  $O$ , formado pelo eixo  $OX$  e o segmento  $\overline{OP}$ , tal que  $0 < \theta \leq 2\pi$ , como na figura a seguir.

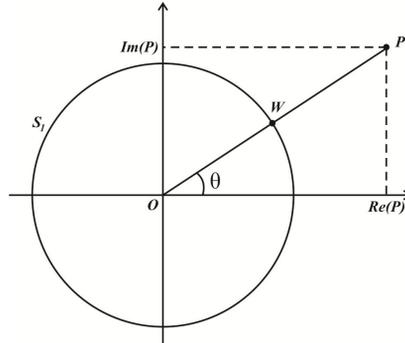


Figura 3: Representação de um terno quase pitagórico na circunferência unitária  $S_1$

Como  $W$  é um número complexo representado por um ponto de  $S_1$ , temos  $|W| = 1$ . Logo, se  $P = x + iy\sqrt{m}$  é um número complexo associado pelo terno quase pitagórico  $(x, y, z)$ , então  $P$  é múltiplo de  $W$ , isto é,  $P = x + iy\sqrt{m} = W \cdot k$ , para algum  $k \in \mathbb{Z}^+$ , pois  $P$  e  $W$  pertencem à mesma classe. Aplicando a função norma em  $P$  e utilizando o fato de que esta função preserva a multiplicação, obtemos

$$\begin{aligned} z^2 = x^2 + my^2 = \mathcal{N}(P) &= \mathcal{N}(W \cdot k) \\ &= \mathcal{N}(W) \cdot \mathcal{N}(k) = 1 \cdot k^2 = k^2. \end{aligned}$$

Implicando assim que  $|k| = |z|$ . E como  $z > 0$ , obtemos  $k = z$ .

Note que, se não tivéssemos a condição  $z > 0$ , então  $W_1 = -\frac{x}{z} - i\frac{y\sqrt{m}}{z}$  e  $W_2 = \frac{x}{z} + i\frac{y\sqrt{m}}{z}$  seriam os dois pontos de interseção entre a reta que passa por  $\overline{OP}$  e a circunferência  $S_1$ . Mas como  $z > 0$ , temos um único número complexo pertencente a  $S_1$  que representa uma classe de ternos quase pitagóricos. Portanto usaremos  $W = e^{i\theta} = \frac{x}{z} + i\frac{y\sqrt{m}}{z}$  como número complexo associado ao terno quase pitagórico  $(x, y, z)$ , onde  $\theta$  é o ângulo formado entre o eixo  $OX$  e o segmento  $\overline{OP}$  no sentido anti-horário.

Observe agora que, se  $(x, y, z) \in [(a, b, c)]$ , onde  $(a, b, c)$  é o terno quase pitagórico primitivo desta classe, então  $(x, y, z) = (ta, tb, tc)$ , para algum  $t \in \mathbb{Z}^+$ . Pelo feito acima, associamos o terno  $(x, y, z)$  ao seguinte número complexo em  $S_1$ .

$$W = \frac{x}{z} + i\frac{y\sqrt{m}}{z} = \frac{ta}{tc} + i\frac{tb\sqrt{m}}{tc} = \frac{a}{c} + i\frac{b\sqrt{m}}{c}.$$

Em outras palavras, podemos associar todos os ternos da classe ao número complexo em  $W \in S_1$ , associado ao terno quase pitagórico primitivo representante da classe.

Ao enunciar o próximo resultado (que é o resultado principal desta seção), admitimos que  $S_1$  é um subgrupo multiplicativo de  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ . E identificamos a relação entre uma classe de ternos quase pitagóricos com um número complexo de  $S_1$ , definindo uma função  $\phi : \mathbb{T}_{[m]} \rightarrow S_1$ . Mostraremos que esta função é injetora e que preserva as operações definidas em  $\mathbb{T}_{[m]}$  e  $S_1$ , ou seja, a função  $\phi$  é um homomorfismo de grupo.

**Teorema 4.** *Seja  $S_1$  o conjunto dos números complexos que formam a circunferência unitária centrada na origem do plano complexo. Então a função  $\phi : \mathbb{T}_{[m]} \rightarrow S_1$ , definida por*

$$\phi\left([(x, y, z)]\right) = e^{i\theta} = \frac{x}{z} + i \frac{y\sqrt{m}}{z}$$

é um homomorfismo de grupo injetivo.

*Demonstração.* Sejam  $[(a, b, c)]$  e  $[(x, y, z)]$  classes de ternos pertencentes a  $\mathbb{T}_{[m]}$  de modo que  $\text{mdc}(x, y) = 1$  e  $\text{mdc}(a, b) = 1$ . Temos que

$$\phi\left([(a, b, c)]\right) = e^{i\alpha} = \frac{a}{c} + i \frac{b\sqrt{m}}{c} \quad \text{e} \quad \phi\left([(x, y, z)]\right) = e^{i\beta} = \frac{x}{z} + i \frac{y\sqrt{m}}{z}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \phi\left([(x, y, z)] \star [(a, b, c)]\right) &= \phi[(xa - myb, xb + ya, zc)] \\ &= \frac{xa - myb}{zc} + i \frac{(xb + ya)\sqrt{m}}{zc} \\ &= \frac{xa - myb + ix b\sqrt{m} + iya\sqrt{m}}{zc} \\ &= \frac{x(a + ib\sqrt{m}) + iy\sqrt{m}(ib\sqrt{m} + a)}{zc} \\ &= \frac{(x + iy\sqrt{m})(a + ib\sqrt{m})}{zc} \\ &= \frac{(x + iy\sqrt{m})}{z} \cdot \frac{(a + ib\sqrt{m})}{c} \\ &= \phi\left([(x, y, z)]\right) \cdot \phi\left([(a, b, c)]\right). \end{aligned}$$

Logo, a função  $\phi$  é um homomorfismo. Além disso, se  $\phi\left([(x, y, z)]\right) = \phi\left([(a, b, c)]\right)$ , então

$$\frac{x}{z} + i \frac{y\sqrt{m}}{z} = \frac{a}{c} + i \frac{b\sqrt{m}}{c}.$$

Pela igualdade de números complexos temos

$$\frac{x}{z} = \frac{a}{c} \quad \text{e} \quad \frac{y\sqrt{m}}{z} = \frac{b\sqrt{m}}{c}.$$

Logo,  $xc = za$  e  $yc = zb$ .

Isolando  $z$  na primeira igualdade e substituindo na segunda obtemos  $ya = xb$ . Agora, como  $\text{mdc}(x, y) = 1$ , existem  $r, s \in \mathbb{Z}$ , tais que  $1 = xr + ys$ . Daí obtemos

$$a = a(xr + ys) = (ax)r + (ay)s = (ax)r + (xb)s,$$

implicando que

$$a = x(ar + bs). \tag{4}$$

Do mesmo modo

$$c = c(xr + ys) = (cx)r + (cy)s = (za)r + (zb)s.$$

Assim

$$c = z(ar + bs). \tag{5}$$

Da última igualdade e do fato de que  $yc = zb$ , segue que

$$yc = zb \Rightarrow yz(ar + bs) = zb \Rightarrow y(ar + bs) = b. \tag{6}$$

Portanto

$$(ar + bs) \mid a \quad \text{e} \quad (ar + bs) \mid b.$$

Mas como  $\text{mdc}(a, b) = 1$ , chegamos à conclusão de que  $ar + bs = 1$ . Tendo em vista as igualdades (4), (5) e (6) acima, isso implica que  $a = x$ ,  $c = z$ ,  $y = b$ , isto é

$$(x, y, z) = (a, b, c).$$

Logo  $\phi$  também é injetiva. □

Portanto, efetuar a operação  $[(x, y, z)] \star [(a, b, c)]$  em  $\mathbb{T}_{[m]}$  é equivalente a multiplicar os seus respectivos elementos associados em  $S_1$  e assim podemos ter uma interpretação geométrica dessa operação, pois se

$$\phi\left([(x, y, z)]\right) = \frac{x}{z} + i\frac{y\sqrt{m}}{z} = e^{i\alpha} \quad \text{e} \quad \phi\left([(a, b, c)]\right) = \frac{a}{c} + i\frac{b\sqrt{m}}{c} = e^{i\beta},$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são os seus respectivos argumentos, então

$$\phi\left([(x, y, z)] \star [(a, b, c)]\right) = \phi\left([(x, y, z)]\right) \cdot \phi\left([(a, b, c)]\right) = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}.$$

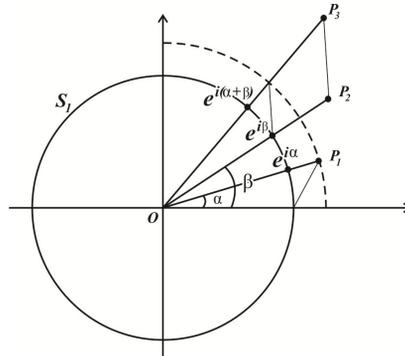


Figura 4: Produto de números complexos

Mostramos que  $(\mathbb{T}_{[m]}, \star)$  é um grupo abeliano. Consideramos a possibilidade de associar um terno quase pitagórico a um número complexo do conjunto  $\mathbb{Z}[i\sqrt{m}]$ . Essa associação foi possível após visualizar uma forma de escrever a equação  $x^2 + my^2 = z^2$  como produto de dois números complexos, a saber  $z^2 = (x + iy\sqrt{m})(x - iy\sqrt{m})$ . Essa forma determina a norma do número complexo  $x + iy\sqrt{m}$ . Com isso obtemos outra maneira de representar cada classe  $[(a, b, c)]$  de ternos quase pitagóricos por um número complexo, através do homomorfismo injetivo  $\phi$ , apresentado no teorema 4.

## 5. Conclusões

O estudo dos ternos quase pitagóricos é interessante por algumas razões, sendo uma delas proveniente da importância da relevância histórica dos ternos pitagóricos, oriundos do famoso Teorema de Pitágoras, amplamente utilizado na matemática e com significativas contribuições para educação básica, na resolução de problemas e compreensão de alguns princípios matemáticos. Notadamente, os ternos quase pitagóricos ampliam ainda mais a nossa compreensão dos conceitos relacionados ao Teorema de Pitágoras. Nesse sentido a investigação desses ternos direciona-nos a um entendimento mais profundo dos números inteiros. Esse estudo, que é um pré-requisito para o estudo da álgebra e da teoria dos números, pode incentivar os alunos da educação básica a explorarem as propriedades algébricas e geométricas, questionando de forma investigativa alguns problemas matemáticos já conhecidos em sua formação no ensino básico, bem como prepará-los para estudos mais avançados em níveis superiores.

## Referências

- [1] Araujo, Martinho C. and Nascimento, Thais S. *Propriedades dos Ternos Pitagóricos*. V Bienal de Matemática. SBM. Rio de Janeiro. 2010.
- [2] *Almost Pythagorean Triples*. Mathematics Magazine, Vol.60, n<sup>o</sup>4 pp 234-236, 1987.
- [3] Domingues, Hygino H. and Iezzi, Gelson. *Álgebra Moderna*. 4th edição. Atual Editora. São Paulo. 2003.
- [4] Garcia, Arnaldo and Lequain, Yves. *Elementos de Álgebra*. Projeto Euclides. 5th edição. Instituto de Matemática Pura e Aplicada- Impa. Rio de Janeiro. 1988.

Jessé Garcia de Faria  
Instituto Federal do Mato Grosso  
<[jesse.faria@ifmt.edu.br](mailto:jesse.faria@ifmt.edu.br)>

Martinho da Costa Araujo  
Universidade Federal do Mato Grosso  
<[martinhofmt@gmail.com](mailto:martinhoufmt@gmail.com)>

Recebido: 20/10/2023  
Publicado: 12/04/2024

# A análise matemática do jogo da velha: conceitos, estratégias e aplicações

Lucas Machado Fernandes 

## Resumo

Este artigo apresenta uma formulação matemática para o jogo da velha, utilizando conceitos e propriedades das matrizes. Serão apresentados resultados qualitativos relacionados à previsibilidade do jogo, obtidos a partir da análise da tomada de decisão inicial.

**Palavras-chave:** Jogo da Velha; Teoria Matricial; Previsibilidade.

## Abstract

This article presents a mathematical formulation for Tic-Tac-Toe, using concepts and properties of matrices. Qualitative results related to the predictability of the game will be presented, obtained from the analysis of the initial decision making.

**Keywords:** Tic-Tac-Toe; Matrix Theory; Predictability.

## 1. Introdução

O jogo da velha, também conhecido como “jogo do galo”, é um dos jogos mais antigos e populares da história. Jogado em um tabuleiro de nove casas dispostas  $3 \times 3$ , o objetivo do jogo é alinhar três símbolos iguais ( $X$  ou  $O$ ) em uma linha horizontal, vertical ou diagonal. Embora pareça simples, esse jogo tem uma rica história e teoria matemática que remonta a mais de 3.000 anos atrás. As evidências mostram que o jogo era jogado pelos romanos e egípcios, e há referências a ele em vários textos antigos, como o Livro dos Mortos egípcio e os escritos de Ovídio, um poeta romano do século I a.C.

Ao longo dos anos, o jogo da velha ganhou muitas variações e adaptações, tornando-se um tema popular em diversas áreas, como a matemática, a inteligência artificial e a teoria dos jogos. Na matemática, o jogo da velha é usado para ensinar conceitos como estratégia, combinações e permutações (Berlekamp, Conway e Guy, [1]). Na inteligência artificial, o jogo da velha é frequentemente usado como um problema de teste para algoritmos de aprendizado de máquina e agentes autônomos (Knuth, [2]). Na teoria dos jogos, o jogo da velha é um exemplo clássico de um jogo de soma zero, em que o ganho de um jogador é igual à perda do outro jogador (Osborne e Rubinstein, [4]; Morgenstern e Von Neumann, [3]).

<sup>1</sup>Discente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPB e parcialmente apoiado pela fundação estadual de pesquisa da Paraíba (Fapesq-PB) #1159/2021-07, Brasil.

Este artigo será dividido em duas partes. Na primeira parte, apresentaremos uma axiomatização das regras básicas do jogo e uma descrição formal de uma partida utilizando um modelo matricial.

Na segunda parte, abordaremos o processo de simetrização e o axioma do bloqueio. Em seguida, apresentaremos os resultados relacionados à previsibilidade dos cantos e bordas, bem como a imprevisibilidade do centro.

## 2. Preliminares

Nesta seção, serão apresentadas as regras básicas do jogo da velha e uma descrição de uma partida. Na primeira subseção, serão abordados os princípios fundamentais do jogo, como a disposição do tabuleiro, os símbolos utilizados e o objetivo do jogo. Já na segunda subseção, será feita uma descrição detalhada de uma partida, desde a escolha dos símbolos até sua conclusão, com exemplos práticos de jogadas.

### 2.1. Regras Básicas

O jogo da velha é um passatempo secular bastante conhecido, com regras amplamente difundidas. No entanto, é importante apresentar os princípios fundamentais que regem as regras básicas para o funcionamento do mesmo.

**Axioma 1.** *O ambiente do jogo da velha é representado por uma matriz quadrada de ordem 3. Durante o jogo, as nove entradas da matriz são preenchidas exclusivamente com os símbolos  $X$  ou  $O$ .*

**Axioma 2.** *Durante o jogo da velha, quando é a vez de um participante jogar, ele deve escolher uma das entradas da matriz e marcá-la com o seu símbolo ( $X$  ou  $O$ ). Este processo de escolha e marcação de uma casa vazia é chamado de jogada.*

**Axioma 3.** *Os participantes alternam suas jogadas, começando pelo jogador que escolheu o símbolo  $X$ . Em resumo, as jogadas de ordem ímpar possuem marcação  $X$ , enquanto as de ordem par são marcadas com  $O$ .*

**Axioma 4.** *O objetivo de cada jogador é formar uma linha, uma coluna ou uma diagonal desta matriz somente com o seu símbolo. O participante que conseguir fazer isso primeiro vence.*

**Axioma 5.** *Se todas as entradas da matriz estiverem preenchidas e nenhum jogador tiver conseguido formar uma linha, uma coluna ou uma diagonal somente com o seu símbolo, o jogo termina empatado.*

A seguir, apresenta-se um exemplo prático de uma partida que segue os cinco axiomas anteriormente descritos:

**Exemplo 1.** A representação a seguir

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} X & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X & - & - \\ - & O & - \\ - & - & - \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X & - & - \\ - & O & - \\ - & - & X \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X & - & - \\ - & O & O \\ - & - & X \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X & - & - \\ X & O & O \\ - & - & X \end{pmatrix} \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} X & - & - \\ X & O & O \\ O & - & X \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X & - & X \\ X & O & O \\ O & - & X \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X & O & X \\ X & O & O \\ O & - & X \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X & O & X \\ X & O & O \\ O & X & X \end{pmatrix} \end{aligned}$$

indica nove jogadas de uma partida de jogo da velha.

## 2.2. Descrição sobre uma partida

Notacionalmente, para descrever os movimentos de uma partida como propostos no axioma 3, adicionamos um índice acima do símbolo correspondente a cada rodada completa composta por uma jogada de  $X$  seguida por  $O$ . Dessa forma, as representações

$$X^1, O^1, X^2, O^2, X^3, O^3, X^4, O^4 \text{ e } X^5$$

indicam a ordem em que as jogadas foram realizadas, permitindo que sejam facilmente identificadas e acompanhadas ao longo da partida. Para que essa otimização fique mais clara, as jogadas do **Exemplo 1** seriam resumidas pela matriz:

$$\begin{pmatrix} X^1 & O^4 & X^4 \\ X^3 & O^1 & O^2 \\ O^3 & X^5 & X^2 \end{pmatrix}.$$

## 3. Resultados

Para dar início à nossa discussão, é importante estabelecermos algumas definições básicas que recorreremos ao longo deste texto. Tais conceitos serão fundamentais para a compreensão de resultados que iremos descrever posteriormente.

**Definição 1.** Seja  $(\mathcal{A}_{ij})_{3 \times 3}$  uma matriz qualquer. Para nossos propósitos, denominamos as entradas  $a_{ij}$  da seguinte forma:

1. As posições  $\mathcal{A}_{11}$ ,  $\mathcal{A}_{13}$ ,  $\mathcal{A}_{31}$  e  $\mathcal{A}_{33}$  são chamadas de *cantos*;
2. As posições  $\mathcal{A}_{12}$ ,  $\mathcal{A}_{21}$ ,  $\mathcal{A}_{23}$  e  $\mathcal{A}_{32}$  são chamadas de *bordas*;
3. A posição  $\mathcal{A}_{22}$  é chamada de *centro*.

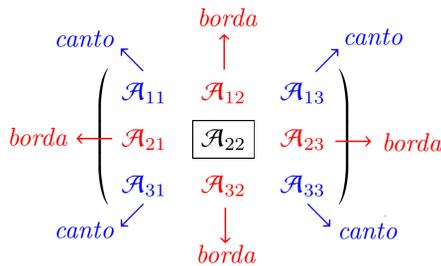


Figura 1: Representação dos cantos, bordas e centro.

Podemos imaginar dois eixos imaginários que se interceptam no centro  $\mathcal{A}_{22}$ , e assim adicionar as nomenclaturas inferior, superior, esquerda e direita aos conceitos de bordas e cantos. Por exemplo, podemos dizer que  $\mathcal{A}_{11}$  é o canto superior esquerdo, enquanto  $\mathcal{A}_{23}$  é a borda direita. Essas denominações serão importantes para a nossa discussão, permitindo-nos fazer referência precisa às diferentes posições da matriz.

**Definição 2.** Uma situação em que é impossível para um jogador impedir que seu oponente complete uma linha, coluna ou diagonal com seus símbolos é chamada *armadilha*.

Em outras palavras, quando um jogador encontra-se em uma armadilha, não há mais movimentos que possa fazer para evitar a vitória do adversário. Vejamos um exemplo:

**Exemplo 2.** A situação descrita abaixo

$$\begin{pmatrix} X^1 & - & X^3 \\ - & X^2 & O^1 \\ - & - & O^2 \end{pmatrix}$$

é uma armadilha, pois independentemente do posicionamento de  $O^3$ , o jogador com o símbolo  $X$  completará uma linha ou coluna.

Nas próximas subseções, descreveremos os resultados que ocorrem ao iniciar o jogo a partir dos cantos. É importante ressaltar que, salvo em casos de simetria, podemos supor sem perda de generalidade que o símbolo  $X^1$  estará no canto superior esquerdo da matriz (ver a figura ao lado). As funções de simetrização  $S_1$  e  $S_2$  são responsáveis por esse comportamento e podem ser definidas como segue:

$$1. \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{13} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} & \mathcal{A}_{23} \\ \mathcal{A}_{31} & \mathcal{A}_{32} & \mathcal{A}_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{13} & \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{11} \\ \mathcal{A}_{23} & \mathcal{A}_{22} & \mathcal{A}_{21} \\ \mathcal{A}_{33} & \mathcal{A}_{32} & \mathcal{A}_{31} \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{13} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} & \mathcal{A}_{23} \\ \mathcal{A}_{31} & \mathcal{A}_{32} & \mathcal{A}_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{31} & \mathcal{A}_{32} & \mathcal{A}_{33} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} & \mathcal{A}_{23} \\ \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{13} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X^1 & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix} \xrightarrow{S_1} \begin{pmatrix} - & - & X^1 \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

$S_2 \uparrow$

$\downarrow S_2$

$$\begin{pmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ X^1 & - & - \end{pmatrix} \xleftarrow{S_1^{-1}} \begin{pmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & X^1 \end{pmatrix}$$

Figura 2: Simetrização.

Para garantir uma compreensão clara e consistente das discussões que se seguem, é de extrema importância destacar que, a partir deste ponto, sempre partiremos do seguinte pressuposto:

**Axioma 6** (Axioma do Bloqueio). *Se o oponente tiver dois elementos na mesma linha, coluna ou diagonal, é necessário colocar o terceiro elemento para bloqueá-lo.*

Este axioma é fundamental para garantir o equilíbrio de Nash (ver [5]) durante a partida. Ele estabelece uma estratégia básica para bloquear, sempre que possível, a obtenção da vitória do oponente.

### 3.1. Previsibilidade dos cantos e bordas

A seguir, apresentaremos um resultado que demonstra uma estratégia eficaz para garantir a vitória no jogo da velha, levando em consideração as duas primeiras jogadas da partida.

**Teorema 1.** *Se  $X^1$  está posicionado no canto superior esquerdo e  $O^1$  ocupa qualquer outra posição da matriz, exceto o centro, então é sempre possível que o jogador com o símbolo  $X$  vença utilizando uma armadilha.*

*Demonstração.* Com efeito, supondo válido o axioma do bloqueio, basta notar que em cada uma das situações a seguir

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & \mathcal{O}^1 & - \\ \mathcal{O}^2 & - & - \\ \mathcal{X}^2 & - & \mathcal{X}^3 \end{pmatrix} \quad
 \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & \mathcal{O}^1 \\ - & \mathcal{O}^2 & - \\ \mathcal{X}^3 & - & \mathcal{X}^2 \end{pmatrix} \quad
 \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & \mathcal{O}^2 & \mathcal{X}^2 \\ \mathcal{O}^1 & - & - \\ - & - & \mathcal{X}^3 \end{pmatrix} \quad
 \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & \mathcal{X}^3 \\ - & \mathcal{X}^2 & \mathcal{O}^1 \\ - & - & \mathcal{O}^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & \mathcal{X}^3 \\ - & \mathcal{O}^2 & - \\ \mathcal{O}^1 & - & \mathcal{X}^2 \end{pmatrix} \quad
 \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & \mathcal{X}^3 \\ \mathcal{O}^2 & - & - \\ \mathcal{X}^2 & \mathcal{O}^1 & - \end{pmatrix} \quad
 \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & \mathcal{O}^2 & \mathcal{X}^2 \\ - & - & - \\ \mathcal{X}^3 & - & \mathcal{O}^1 \end{pmatrix}$$

garantem-nos que sempre é possível que o participante com o símbolo  $\mathcal{X}$  vença utilizando uma armadilha, desde que  $\mathcal{X}^1$  esteja posicionado no canto superior esquerdo e  $\mathcal{O}^1$  não ocupe o centro.  $\square$

Em resumo, levando em conta o axioma do bloqueio, o teorema indica que se o jogador iniciar a partida posicionando o símbolo  $\mathcal{X}$  em qualquer um dos cantos da matriz e o oponente não ocupar o centro, então a vitória do participante que iniciou o jogo da velha depende exclusivamente de seguir um dos padrões destacados na prova, fazendo as devidas simetrizações, se necessário, do caso superior esquerdo.

### 3.2. Imprevisibilidade do centro

Nesta subseção, estamos interessados em analisar os casos em que  $\mathcal{X}^1$  está posicionado no canto superior esquerdo e  $\mathcal{O}^1$  ocupa o centro. A ideia básica é permutar  $\mathcal{X}^2$  nas entradas restantes da matriz e analisar os casos:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & \mathcal{X}^2 & - \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ - & - & - \end{pmatrix}, \quad
 \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & \mathcal{X}^2 \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ - & - & - \end{pmatrix}, \quad
 \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & - \\ \mathcal{X}^2 & \mathcal{O}^1 & - \\ - & - & - \end{pmatrix}, \quad
 \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & - \\ - & \mathcal{O}^1 & \mathcal{X}^2 \\ - & - & - \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & - \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ \mathcal{X}^2 & - & - \end{pmatrix}, \quad
 \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & - \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ - & \mathcal{X}^2 & - \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad
 \begin{pmatrix} \mathcal{X}^1 & - & - \\ - & \mathcal{O}^1 & - \\ - & - & \mathcal{X}^2 \end{pmatrix}.$$

Para dar início à discussão, vamos apresentar a seguinte definição:

**Definição 3.** Sejam A, B e C entradas de uma matriz qualquer. Dizemos que  $\Delta(ABC)$  é a *triangulação* desta matriz quando B está na mesma linha (coluna) de A e na mesma coluna (linha) de C, e nenhum outro elemento da matriz pode estar entre A e B, nem entre B e C.

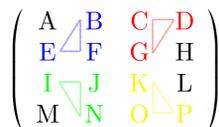


Figura 3: Exemplos de Triangulações

Compreender o conceito anterior torna-se fundamental para a compreensão de dois dos casos mencionados no início desta subseção. Esses casos, por sua vez, podem ser descritos a partir do seguinte teorema:

**Teorema 2** (Teorema da Triangulação). *Se  $X^1$  está posicionado no canto superior esquerdo,  $O^1$  ocupa o centro e  $\Delta(X^1X^2O^1)$  é uma triangulação, então a partida terminará empatada.*

*Demonstração.* Uma vez que  $X^1$  está posicionado no canto superior esquerdo,  $O^1$  ocupa o centro e  $\Delta(X^1X^2O^1)$  é uma triangulação, temos os casos:

$$\begin{pmatrix} X^1 & - & - \\ X^2 & O^1 & - \\ - & - & - \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} X^1 & X^2 & - \\ - & O^1 & - \\ - & - & - \end{pmatrix}.$$

Portanto, de acordo com o axioma do bloqueio, podemos afirmar que

$$\begin{pmatrix} X^1 & O^3 & X^3 \\ X^2 & O^1 & - \\ O^2 & X^4 & - \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} X^1 & X^2 & O^2 \\ O^3 & O^1 & X^4 \\ X^3 & - & - \end{pmatrix},$$

ou seja, a partida terminará empatada. □

Antes de prosseguirmos para o próximo teorema, é necessário demonstrar um lema técnico e apresentar uma nova definição.

**Lema 1.** *O resultado em uma partida de jogo da velha é invariante pela transposta da matriz associada.*

*Demonstração.* Seja  $M$  uma matriz qualquer. Pela definição de matriz transposta, valem as seguintes propriedades:

1. Linha de  $M \rightarrow$  Coluna de  $M^t$ ;
2. Coluna de  $M \rightarrow$  Linha de  $M^t$ ;
3. Diagonal Principal de  $M \rightarrow$  Diagonal Principal de  $M^t$ ;
4. Diagonal Secundária de  $M \rightarrow$  Diagonal Secundária de  $M^t$ ,

onde a seta  $\rightarrow$  representa a expressão “leva em” e  $M^t$  é a matriz transposta de  $M$ . Dessa forma, com base nos resultados obtidos em 1-4, podemos concluir imediatamente que é impossível que a vitória de um jogador (ou empate) em uma partida resulte em um empate (ou vitória de um jogador) no jogo da velha associado a matriz transposta. Resta agora analisar os seguintes casos:

1º caso: Suponha que um participante com o símbolo  $X$  vença em apenas 5 jogadas com relação à matriz  $M$  associada ao jogo da velha. É importante ressaltar que é impossível que  $O$  vença com a matriz transposta  $M^t$ , pois essa matriz terá apenas duas posições marcadas com tal símbolo, o que mostra que não é possível obter uma vitória nessa configuração.

2º caso: Suponha que um participante com o símbolo  $O$  vença em 6 jogadas (ou 8 jogadas) em relação a uma matriz  $M$  associada ao jogo da velha, enquanto  $X$  vença em apenas 5 jogadas (ou

5 ou 7 jogadas) com a matriz transposta  $M^t$  associada. No entanto, como  $M = (M^t)^t$ , segundo as propriedades 1-4 acima,  $X$  deveria vencer em 5 jogadas (ou 5 ou 7 jogadas) com relação a  $M$ , o que é claramente absurdo.

3º caso: Suponha que um participante com o símbolo  $X$  vença em 7 jogadas (ou 9 jogadas) em relação a uma matriz  $M$  associada ao jogo da velha, enquanto  $O$  vença em apenas 6 jogadas (ou 6 ou 8 jogadas) com a matriz transposta  $M^t$  associada. No entanto, como  $M = (M^t)^t$ , segundo as propriedades 1-4 acima,  $O$  deveria vencer em 6 jogadas (ou 6 ou 8 jogadas) com relação a  $M$ , o que é impossível.  $\square$

Para esclarecer o comportamento de dois outros casos citados anteriormente, é necessário apresentar o teorema do segmento. No entanto, antes disso, é importante definir o que é um segmento em uma matriz.

**Definição 4.** Dado um conjunto de três entradas  $A$ ,  $B$  e  $C$  de uma matriz qualquer, dizemos que  $\overline{ABC}$  é um *segmento* da mesma, desde que, todas as entradas estiverem alinhadas na mesma linha ou na mesma coluna, sem que haja qualquer outra entrada entre elas. Em particular, também dizemos que  $A$  e  $C$  são os extremos do segmento  $\overline{ABC}$ .

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ M & N & O & P \end{pmatrix}$$

Figura 4: Exemplos de segmentos.

Com essa definição em mente, podemos agora enunciar o resultado:

**Teorema 3** (Teorema do Segmento). *Se  $X^1$  está posicionado no canto superior esquerdo e  $O^1$  ocupa o centro, então toda partida que possui um segmento  $\overline{X^1 O^2 X^2}$  termina em empate.*

*Demonstração.* Supondo que  $X^1$  está posicionado no canto superior esquerdo,  $O^1$  ocupa o centro e  $\overline{X^1 O^2 X^2}$  é um segmento, temos os casos:

$$\begin{pmatrix} X^1 & O^2 & X^2 \\ - & O^1 & - \\ - & - & - \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} X^1 & - & - \\ O^2 & O^1 & - \\ X^2 & - & - \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, como as matrizes anteriores são transpostas uma da outra, resta fazer a análise de apenas uma delas pelo **Lema 1**. Sendo assim, usando o axioma do bloqueio e permutando  $O^3$  nas entradas restantes da matriz a esquerda, temos

$$\begin{pmatrix} X^1 & O^2 & X^2 \\ O^3 & O^1 & X^4 \\ X^5 & X^3 & O^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X^1 & O^2 & X^2 \\ X^4 & O^1 & O^3 \\ O^4 & X^3 & X^5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X^1 & O^2 & X^2 \\ - & O^1 & - \\ O^3 & X^3 & - \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} X^1 & O^2 & X^2 \\ - & O^1 & - \\ - & X^3 & O^3 \end{pmatrix}.$$

Uma vez que as duas matrizes abaixo

$$\begin{pmatrix} X^1 & O^2 & X^2 \\ - & O^1 & - \\ O^3 & X^3 & - \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} X^1 & O^2 & X^2 \\ - & O^1 & - \\ - & X^3 & O^3 \end{pmatrix}$$

resultam em empate devido ao axioma do bloqueio, independentemente da permutação das posições  $X^4$ ,  $O^4$  e  $X^5$ , podemos concluir o resultado desejado.  $\square$

Ao contrário dos casos anteriores, observe que a disposição

$$\begin{pmatrix} X^1 & - & - \\ - & O^1 & - \\ - & - & X^2 \end{pmatrix}$$

pode resultar na vitória do jogador que escolheu o símbolo  $X$ . No entanto, o desfecho final depende exclusivamente do movimento  $O^2$  escolhido pelo oponente.

**Teorema 4** (Teorema da Diagonal). *Se  $X^1$  está posicionado no canto superior esquerdo,  $O^1$  ocupa o centro e  $X^2$  é localizado no canto inferior direito, então o jogador com o símbolo  $X$  tem uma probabilidade de  $1/3$  de vencer a partida.*

*Demonstração.* Supondo que  $X^1$  está posicionado no canto superior esquerdo,  $O^1$  ocupa o centro e  $X^2$  é localizado no canto inferior direito, podemos permutar  $O^2$  como segue:

$$\begin{pmatrix} X^1 & O^2 & - \\ - & O^1 & - \\ - & - & X^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X^1 & - & O^2 \\ - & O^1 & - \\ - & - & X^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X^1 & - & - \\ O^2 & O^1 & - \\ - & - & X^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X^1 & - & - \\ - & O^1 & O^2 \\ - & - & X^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} X^1 & - & - \\ - & O^1 & - \\ O^2 & - & X^2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} X^1 & - & - \\ - & O^1 & - \\ - & O^2 & X^2 \end{pmatrix}.$$

Pelo axioma do bloqueio, temos que as partidas

$$\begin{pmatrix} X^1 & O^2 & X^4 \\ X^5 & O^1 & O^4 \\ O^3 & X^3 & X^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X^1 & X^3 & O^3 \\ O^4 & O^1 & X^5 \\ X^4 & O^2 & X^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X^1 & X^5 & O^3 \\ O^2 & O^1 & X^3 \\ X^4 & O^4 & X^2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} X^1 & O^4 & X^4 \\ X^3 & O^1 & O^2 \\ O^3 & X^5 & X^2 \end{pmatrix}$$

terminam empatadas. Por outro lado, ao aplicarmos novamente o axioma do bloqueio, podemos concluir que jogos

$$\begin{pmatrix} X^1 & - & O^2 \\ - & O^1 & - \\ X^3 & - & X^2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} X^1 & - & X^3 \\ - & O^1 & - \\ O^2 & - & X^2 \end{pmatrix}$$

terminam com o jogador do símbolo  $X$  vitorioso devido à formação de armadilhas, concluindo o resultado.  $\square$

Apresentamos agora a última definição desta seção, que será relevante para a formulação do último resultado que apresentaremos.

**Definição 5.** Sejam A, B e C elementos de uma matriz. Dizemos que  $\mathcal{B}(ABC)$  é um bumerangue desde que exista um elemento D nesta matriz que atenda às seguintes condições:

1. D é extremo de um segmento que contém B e C;
2.  $\Delta(ADB)$  ou  $\Delta(ADC)$  é uma triangulação.



Figura 5: Exemplos de bumerãgues.

Apesar de sua simplicidade, o jogo da velha tem uma rica teoria matemática, que inclui várias estratégias e propriedades interessantes. Uma dessas propriedades, que chamaremos como Teorema do Bumerangue, relaciona certas configurações de jogadas à probabilidade de terminar o jogo empatado ou com um vencedor.

**Teorema 5** (Teorema do Bumerangue). *Considere um jogo da velha em que o símbolo  $X^1$  ocupa o canto superior esquerdo e  $O^1$  ocupa o centro, formando um padrão de bumerangue  $\mathcal{B}(X^1O^1X^2)$ . Se permutarmos o símbolo  $O^2$  nas outras posições restantes, então as seguintes propriedades valem:*

1. Em 1/2 das possibilidades, o jogo termina empatado, independentemente dos movimentos subsequentes;
2. Em 1/3 das possibilidades, o jogo pode terminar com um vencedor ou empatado;
3. Em 1/6 das possibilidades, o jogo termina com um vencedor.

*Demonstração.* Uma vez que o símbolo  $X^1$  ocupa o canto superior esquerdo e  $O^1$  ocupa o centro tal que  $\mathcal{B}(X^1O^1X^2)$  é um bumerangue, sabemos que os casos retratados são:

$$\begin{pmatrix} X^1 & - & - \\ - & O^1 & X^2 \\ - & - & - \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} X^1 & - & - \\ - & O^1 & - \\ - & X^2 & - \end{pmatrix}.$$

Pelo **Lema 1**, sabemos que basta fazer a análise de apenas um deles. Vejamos:

1. Tome em consideração as situações a seguir

$$\begin{pmatrix} X^1 & - & - \\ - & O^1 & O^2 \\ - & X^2 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X^1 & - & - \\ - & O^1 & - \\ O^2 & X^2 & - \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} X^1 & - & - \\ - & O^1 & - \\ - & X^2 & O^2 \end{pmatrix}.$$

Note que os dois primeiros casos são imediatos pelo axioma do bloqueio, como sucede-se:

$$\begin{pmatrix} X^1 & - & X^4 \\ X^3 & O^1 & O^2 \\ O^3 & X^2 & - \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} X^1 & O^3 & X^3 \\ - & O^1 & - \\ O^2 & X^2 & - \end{pmatrix}.$$

Para concluir esta propriedade, iremos permutar  $X^3$  nas entradas de

$$\begin{pmatrix} X^1 & - & - \\ - & O^1 & - \\ - & X^2 & O^2 \end{pmatrix}.$$

Usando novamente o axioma do bloqueio, a prova é imediata quando  $X^3$  está localizada nas bordas superior e esquerda e também nos cantos inferior esquerdo e superior direito. Portanto, resta analisar o caso da borda direita. Para isso, permutando  $O^3$  nas entradas restantes, temos

$$\begin{pmatrix} X^1 & O^3 & - \\ - & O^1 & X^3 \\ - & X^2 & O^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X^1 & X^5 & O^3 \\ O^4 & O^1 & X^3 \\ X^4 & X^2 & O^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X^1 & - & - \\ O^3 & O^1 & X^3 \\ - & X^2 & O^2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} X^1 & O^4 & X^4 \\ X^5 & O^1 & X^3 \\ O^3 & X^2 & O^2 \end{pmatrix},$$

o que termina a prova.

2. Considere os casos a seguir

$$\begin{pmatrix} X^1 & - & - \\ O^2 & O^1 & - \\ - & X^2 & - \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} X^1 & O^2 & - \\ - & O^1 & - \\ - & X^2 & - \end{pmatrix}.$$

e tome as respectivas configurações:

$$\begin{pmatrix} X^1 & - & X^4 \\ O^2 & O^1 & X^3 \\ O^3 & X^2 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X^1 & X^5 & O^3 \\ O^2 & O^1 & X^3 \\ X^4 & X^2 & O^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X^1 & O^2 & - \\ - & O^1 & - \\ X^3 & X^2 & - \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} X^1 & O^2 & X^4 \\ X^5 & O^1 & O^4 \\ O^3 & X^2 & X^3 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, com base na definição de armadilha e no axioma do bloqueio, podemos concluir esta propriedade.

3. Agora, suponha que  $O^2$  ocupa o canto superior direito, isto é,

$$\begin{pmatrix} X^1 & - & O^2 \\ - & O^1 & - \\ - & X^2 & - \end{pmatrix}.$$

Com base no axioma do bloqueio, podemos concluir que a próxima jogada de  $X$  deve ser no canto inferior esquerdo da matriz, o que bloqueia a possibilidade de vitória de  $O$  pela formação de uma armadilha. Portanto, com a última propriedade estabelecida, chegamos ao resultado final desejado.  $\square$

#### 4. Considerações finais

Com base na análise matemática do jogo da velha e dos estudos de caso realizados, podemos concluir que o uso de conceitos e propriedades das matrizes pode ser uma ferramenta poderosa para aprimorar a estratégia do jogo. Em geral, através da axiomatização das regras básicas do jogo por meio do modelo matricial, pudemos entender melhor a dinâmica do jogo e suas possibilidades.

Além disso, a análise da previsibilidade dos cantos e bordas, bem como da imprevisibilidade do centro, permitiu-nos compreender melhor as vantagens de cada posição no tabuleiro. Os teoremas da triangulação, do segmento e do bumerangue mostraram-se úteis para aprimorar a estratégia do jogo e garantir a vitória.

Em suma, a aplicação da matemática no jogo da velha pode oferecer uma compreensão mais profunda do jogo e proporcionar um maior nível de habilidade e estratégia para seus jogadores. Esperamos que este artigo possa contribuir para uma melhor compreensão do jogo e estimular novas pesquisas no campo da teoria dos jogos.

## Referências

- [1] Berlekamp, E. R., Conway, J. H. e Guy, R. K. *Winning ways for your mathematical plays*. Academic press, v. 2, 1982.
- [2] Knuth, D. E. *The computer as a master mind*. Journal of recreational mathematics, 7(1), 1-6, 1975.
- [3] Morgenstern, O. e Von Neumann, J. *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press, 1944.
- [4] Osborne, M. J. e Rubinstein, A. *A course in game theory*. MIT press, 1994.
- [5] Pindyck, R. S. e Rubinfeld, D. L. *Microeconomia*. 7a ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

Lucas Machado Fernandes  
Universidade Federal da Paraíba  
<[lucasmachadofernandes2@gmail.com](mailto:lucasmachadofernandes2@gmail.com)>

Recebido: 14/06/2023  
Publicado: 16/04/2024

# Sequências de Fibonacci Generalizadas e Números Metálicos

Marcio Costa Araújo Filho 

Valder Cezar Izato de Araújo 

## Resumo

Neste trabalho apresentamos a família dos números metálicos conforme definida por Spinadel [10], que possui o número de ouro como membro mais famoso, e também uma classe de sequências que aqui chamamos de sequências de Fibonacci generalizadas. Na verdade, mostramos as principais propriedades das sequências de Fibonacci generalizadas e as utilizamos para mostrar que a razão de termos consecutivos desta sequência é convergente, mais especificamente, converge para um número metálico. Além disso, apresentamos a relação dos números metálicos com alguns conteúdos matemáticos do Ensino Básico.

**Palavras-chave:** Número de ouro; Números metálicos; Sequência de Fibonacci generalizada.

## Abstract

In this work, we present the family of metallic numbers as defined by Spinadel [10], which holds the gold number as the most famous member, and also a class of sequences that we call generalized Fibonacci sequences. In fact, we prove the main properties of generalized Fibonacci sequences and use them to show that the ratio of consecutive terms in this sequence is convergent, more specifically, it converges to a metallic number. Moreover, we present the relationship between metallic numbers and some mathematical contents of Basic Education.

**Keywords:** Gold number; Metallic numbers; Generalized Fibonacci Sequence.

## 1. Introdução

Existe um número que é conhecido desde a antiguidade e que aparece em diversos lugares, como, por exemplo, na natureza, nas artes e na arquitetura. Tal número é conhecido na literatura como *número de ouro*, *razão áurea* ou também como *proporção divina*, uma vez que os objetos que apresentam essa razão são tidos como belos, Ávila [1]. Na arquitetura, por exemplo, essa razão pode ser encontrada tanto no Paternon na Grécia, um templo construído no século V a.C. e oferecido à deusa grega Atena, Figura 1, quanto na pirâmide de Quéops, do Egito – o leitor interessado pode conferir, por exemplo, Lívio [7] e Saraiva [9].

<sup>1</sup>Parcialmente apoiado pelo Programa Institucional de Iniciação Científica da Universidade Federal de Rondônia



Figura 1: Parthenon [13].

Um dos objetos de estudo aqui é a família dos *números metálicos*, a qual possui como membro mais prestigiado o número de ouro. Na verdade, se  $p$  e  $q$  são números naturais quaisquer, seguindo Spinadel [10], Figura 2, chamam-se números metálicos as raízes positivas da seguinte equação quadrática:

$$x^2 - px - q = 0, \quad (1)$$

ou seja, os números  $\sigma_{p,q} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ , dentre os quais pode-se destacar o número de ouro  $\sigma_{1,1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  (denotando comumente por  $\phi$ ) e o número de prata  $\sigma_{1,2} = 1 + \sqrt{2}$  (denotando comumente por  $\sigma$ ). Para mais detalhes a respeito dos números de ouro e prata o leitor pode consultar Ávila [1], Oliveira [5], Spinadel [10], entre outros.



Figura 2: Vera de Spinadel [2].

Além disso, assim como a relação entre o número de ouro e a sequência de Fibonacci, os números metálicos possuem uma relação com as, aqui denominadas, *seqüências de Fibonacci generalizadas* e definidas da seguinte forma: são as seqüências  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em que cada elemento é uma combinação

linear, com coeficientes naturais, dos dois antecessores, isto é,

$$g_{n+2} = pg_{n+1} + qg_n$$

com  $p, q \in \mathbb{N}$  em que  $g_1 = q$  e  $g_2 = p$ . Um dos objetivos do presente trabalho é apresentar e provar algumas propriedades dessas seqüências – alcançamos esse objetivo na Seção 2. Para mais detalhes a respeito da relação do número de ouro e a seqüência de Fibonacci, o leitor pode conferir Caneiro *et al.* [3] e Teodoro [12].

A relação entre as seqüências de Fibonacci generalizadas e os números metálicos dá-se através da seqüência de razões entre termos consecutivos dessa primeira. De fato, consideramos a seqüência  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definida por  $r_n = \frac{g_{n+1}}{g_n}$ , onde  $g_{n+1}$  e  $g_n$  são termos consecutivos das seqüências de Fibonacci generalizada. E será mostrado que para cada par  $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  essa seqüência terá como limite o número metálico  $\sigma_{p,q}$ , por exemplo – quando  $p = 1$  e  $q = 1$  a seqüência  $r_n$  será a seqüência de razões de termos consecutivos da seqüência de Fibonacci que converge para o número de ouro. Mostrar esse fato é o principal objetivo do presente trabalho e é alcançado na Seção 3.

Finalizamos esse trabalho com a apresentação na Seção 4 das relações entre os números metálicos e conteúdos matemáticos do Ensino Básico, ou seja, apresentamos a relação desses números com equações quadráticas, gráficos das funções afim e quadrática e com a Geometria Plana.

## 2. Algumas Propriedades das Seqüências de Fibonacci Generalizadas

A presente seção tem como objetivo definir as seqüências de Fibonacci generalizadas e provar algumas de suas principais propriedades. Um importante resultado referente a seqüências de números reais, que será usado nessa seção, é o que diz que toda seqüência monótona e limitada de números reais é convergente – para mais detalhes o leitor pode consultar Lima [6]. Seguindo Spinadel [10], iniciamos essa seção com a definição de uma classe de seqüências de números reais que tem a seqüência de Fibonacci como um caso particular, e que chamaremos de *seqüências de Fibonacci generalizadas* (SFG).

**Definição 1.** Diz-se seqüência de Fibonacci generalizada as seqüências  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  em que cada elemento é uma combinação linear, com coeficientes naturais, dos dois antecessores, isto é,

$$g_{n+2} = pg_{n+1} + qg_n$$

com  $p, q \in \mathbb{N}$  em que  $g_1 = q$  e  $g_2 = p$ .

Como exemplo, consideremos a SFG com  $p = 2$  e  $q = 1$ , ou seja,  $g_{n+2} = 2g_{n+1} + g_n$  e com condições iniciais  $g_1 = 1$  e  $g_2 = 2$ . Listando os termos dessa seqüência, obtemos a seguinte seqüência de números

$$(1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, \dots)$$

conhecida por seqüência de Pell; para mais detalhes ver [4], [5], [8] e [11]. Em momento oportuno voltaremos a falar dessa seqüência. Além disso, ressaltamos que o uso da nomenclatura *seqüência de Fibonacci generalizada* é devido ao fato de que para  $p = q = 1$  obtêm-se a seqüência de Fibonacci.

Dada uma SFG como na Definição 1 a primeira de suas propriedades é a seguinte.

**Proposição 1.** Para quaisquer naturais  $n, m \in \mathbb{N}$ , os termos de uma SFG, com  $g_1 = q$  e  $g_2 = p$ , satisfazem a seguinte relação

$$g_{n+m} = g_n g_{m+1} + g_{n-1} g_m.$$

*Demonstração.* Procederemos por indução em  $m$ . Para  $m = 1$  temos

$$g_{n+1} = pg_n + qg_{n-1} = g_n g_2 + g_{n-1} g_1,$$

então a igualdade é verdadeira para  $m = 1$ . Partindo da hipótese de que a igualdade seja válida para todo  $m = 2, \dots, k$ , isto é,  $g_{n+m} = g_n g_{m+1} + g_{n-1} g_m$  seja válida para todo  $m = 2, \dots, k$ , mostraremos que ela é válida para  $m = k + 1$ , ou seja,

$$g_{n+(k+1)} = g_n g_{(k+1)+1} + g_{n-1} g_{k+1}.$$

De fato, usando a definição de SFG e a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} g_{n+(k+1)} &= pg_{n+k} + qg_{n+(k-1)} = p(g_n g_{k+1} + g_{n-1} g_k) + q(g_n g_k + g_{n-1} g_{k-1}) \\ &= g_n (pg_{k+1} + qg_k) + g_{n-1} (pg_k + qg_{k-1}) = g_n g_{k+2} + g_{n-1} g_{k+1} \\ &= g_n g_{(k+1)+1} + g_{n-1} g_{k+1}, \end{aligned}$$

que é o que queríamos mostrar. □

A segunda propriedade que mostramos a respeito da SFG é de como se pode escrever cada termo de ordem par e cada termo de ordem ímpar, dada pela proposição abaixo.

**Proposição 2.** Para todo natural  $n \in \mathbb{N}$ , os termos de uma SFG satisfazem as seguintes relações

- i)  $g_{2n-1} = g_n^2 + g_{n-1}^2$ ;
- ii)  $g_{2n} = \frac{g_{n+1}^2 - (q-1)g_{n-1}g_{n+1} - qg_{n-1}^2}{p}$ .

*Demonstração.* Usando a Proposição 1, temos que

$$g_{2n-1} = g_{n+(n-1)} = g_n g_n + g_{n-1} g_{n-1} = g_n^2 + g_{n-1}^2,$$

ou seja, a relação **i)** é válida. Analogamente, para o item **ii)**, notemos que

$$g_{2n} = g_{n+n} = g_n g_{n+1} + g_{n-1} g_n,$$

e como  $g_{n+1} = pg_n + qg_{n-1}$ , ou seja,  $g_n = \frac{g_{n+1} - qg_{n-1}}{p}$ , segue que

$$\begin{aligned} g_{2n} &= g_{n+1} \left( \frac{g_{n+1} - qg_{n-1}}{p} \right) + g_{n-1} \left( \frac{g_{n+1} - qg_{n-1}}{p} \right) \\ &= \frac{g_{n+1}^2 - qg_{n-1}g_{n+1} + g_{n-1}g_{n+1} - qg_{n-1}^2}{p} = \frac{g_{n+1}^2 - (q-1)g_{n-1}g_{n+1} - qg_{n-1}^2}{p}. \end{aligned}$$

□

É sempre possível determinar a soma dos  $n$  primeiros termos da SFG através do  $n$ -ésimo termo e do seu antecessor, conforme proposição a seguir.

**Proposição 3.** A soma dos  $n$  primeiros termos da SFG é dada por

$$g_1 + g_2 + \dots + g_n = \frac{(p+q)g_n + qg_{n-1} + q(p-1) - p}{p+q-1}.$$

*Demonstração.* Observe que  $pg_n = g_{n+1} - qg_{n-1}$ , então

$$\begin{aligned} p(g_1 + g_2 + g_3 + \dots + g_{n-1} + g_n) &= \\ &= pg_1 + g_3 - qg_1 + g_4 - qg_2 + g_5 - qg_3 + \dots + g_n - qg_{n-2} + g_{n+1} - qg_{n-1} \\ &= pg_1 - qg_1 - qg_2 + (1-q)(g_3 + \dots + g_{n-1}) + g_n + g_{n+1} \\ &= pg_1 - g_1 + g_1 - qg_1 - g_2 + g_2 - qg_2 + (1-q)(g_3 + \dots + g_{n-1}) + g_n - qg_n + qg_n + g_{n+1} \\ &= pg_1 - g_1 - g_2 + (1-q)(g_1 + g_2 + g_3 + \dots + g_n) + qg_n + g_{n+1}, \end{aligned}$$

sendo assim, temos

$$(p+q-1)g_1 + g_2 + g_3 + \dots + g_n = pg_1 - g_1 - g_2 + qg_n + g_{n+1},$$

logo, desde que  $g_1 = q$  e  $g_2 = p$ , obtemos

$$g_1 + g_2 + g_3 + \dots + g_n = \frac{g_{n+1} + qg_n + q(p-1) - p}{p+q-1},$$

o que conclui a demonstração. □

As propriedades da SFG na proposição a seguir dão-nos a soma de seus  $n$  primeiros termos de ordem par e de seus  $n$  primeiros termos de ordem ímpar.

**Proposição 4.** Seja  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a SFG, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , valem as seguintes identidades

- i)  $g_1 + g_3 + g_5 + \dots + g_{2n-1} = \frac{(p^2+q)(q-1)+(1-q)qg_{2n-1}+pg_{2n}}{(p+q-1)(p-q+1)}$ ;  
 ii)  $g_2 + g_4 + g_6 + \dots + g_{2n} = \frac{pg_{2n+1}-q(q-1)g_{2n}-p(q^2+q-1)}{(p+q-1)(p-q+1)}$ .

*Demonstração.* Para provar o item **i)**, notemos inicialmente que

$$\begin{aligned} p(g_1 + g_3 + g_5 + \dots + g_{2n-1}) &= \\ &= pg_1 + g_4 - qg_2 + g_6 - qg_4 + \dots + g_{2n} - qg_{2n-2} \\ &= pg_1 - g_2 + g_2 - qg_2 + g_4 - qg_4 + \dots + g_{2n-2} - qg_{2n-2} + g_{2n} \\ &= pg_1 - g_2 + (1-q)(g_2 + g_4 + \dots + g_{2n-2} + g_{2n}) \\ &= pg_1 - g_2 + \frac{(1-q)}{p}(g_3 - qg_1 + g_5 - qg_3 + \dots + g_{2n-1} - qg_{2n-3}) + g_{2n} \\ &= pg_1 - g_2 + \frac{(1-q)}{p}[-g_1 + (1-q)(g_1 + g_3 + \dots + g_{2n-1}) + qg_{2n-1}] + g_{2n} \\ &= pg_1 - g_2 - \frac{(1-q)}{p}g_1 + \frac{(1-q)^2}{p}(g_1 + g_3 + \dots + g_{2n-1}) + \frac{(1-q)}{p}qg_{2n-1} + g_{2n}, \end{aligned}$$

nas passagens acima usamos que  $pg_{2n-1} = g_{2n} - qg_{2n-2}$  e  $pg_{2n} = g_{2n+1} - qg_{2n-1}$ . Então, lembrando que  $g_1 = q$  e  $g_2 = p$ , obtemos

$$\begin{aligned} \left[ p - \frac{(1-q)^2}{p} \right] (g_1 + g_3 + \dots + g_{2n-1}) &= pq - p - \frac{(1-q)}{p}q - \frac{(1-q)}{p}qg_{2n-1} + g_{2n} \\ [p^2 - (1-q)^2](g_1 + g_3 + \dots + g_{2n-1}) &= p^2q - p^2 - (1-q)q + (1-q)qg_{2n-1} + pg_{2n} \\ &= (p^2 + q)(q-1) + (1-q)qg_{2n-1} + pg_{2n}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} g_1 + g_3 + \dots + g_{2n-1} &= \frac{(p^2 + q)(q - 1) + (1 - q)qg_{2n-1} + pg_{2n}}{p^2 - (1 - q)^2} \\ &= \frac{(p^2 + q)(q - 1) + (1 - q)qg_{2n-1} + pg_{2n}}{(p + q - 1)(p - q + 1)}. \end{aligned}$$

Para provar o item **ii**), notemos inicialmente que

$$g_2 + g_4 + \dots + g_{2n} = (g_1 + g_2 + g_3 + \dots + g_n) - (g_1 + g_3 + \dots + g_{2n-1}).$$

Sendo assim, usando a Proposição 3 e o item **i**), temos

$$\begin{aligned} g_2 + g_4 + \dots + g_{2n} &= \frac{(p + q)g_n + qg_{n-1} + q(p - 1) - p}{p + q - 1} - \frac{(p^2 + q)(q - 1) + (1 - q)qg_{2n-1} + pg_{2n}}{(p + q - 1)(p - q + 1)} \\ &= \frac{-q(q - 1)g_{2n} + p^2g_{2n} + pqg_{2n-1} - pq^2 + pq - p}{(p + q - 1)(p - q + 1)} \\ &= \frac{pg_{2n+1} - q(q - 1)g_{2n} - p(q^2 + q - 1)}{(p + q - 1)(p - q + 1)}. \end{aligned}$$

□

**Observação 1.** Vale ressaltar que os resultados das Proposições 3 e 4, estendem os resultados obtidos para a sequência de Fibonacci, na verdade, para  $p = q = 1$  obtemos as propriedades correspondentes para a sequência de Fibonacci, ver [4, Proposição 9].

A próxima propriedade da SFG dá-nos uma relação interessante entre três de seus termos consecutivos, segundo a qual será possível estabelecer sua relação com os números metálicos.

**Proposição 5.** Dados três termos consecutivos da SFG  $g_{n-1}$ ,  $g_n$  e  $g_{n+1}$ , para todo natural  $n \geq 2$ , vale a seguinte relação

$$g_{n-1}g_{n+1} = g_n^2 + (-1)^n q^{n-2} [q^3 + p^2(q - 1)].$$

*Demonstração.* Procederemos por indução sobre  $n$ , desde que  $g_1 = q$ ,  $g_2 = p$  e  $g_3 = p^2 + q^2$ , temos

$$g_2^2 + (-1)^2 q^{2-2} [q^3 + p^2(q - 1)] = p^2 + q^3 + p^2(q - 1) = q(p^2 + q^2) = g_1g_3,$$

então a igualdade é verdadeira para  $n = 2$ . Partindo da hipótese de que a igualdade seja válida para algum  $k > 2$ , isto é,

$$g_{k-1}g_{k+1} = g_k^2 + (-1)^k q^{k-2} [q^3 + p^2(q - 1)], \tag{2}$$

mostraremos que ela é válida para  $k + 1$ , ou seja,

$$g_k g_{k+2} = g_{k+1}^2 + (-1)^{k+1} q^{(k+1)-2} [q^3 + p^2(q - 1)]. \tag{3}$$

De fato, notemos inicialmente que

$$g_k g_{k+2} = g_k (pg_{k+1} + qg_k) = pg_k g_{k+1} + qg_k^2.$$

Pela definição da SFG tem-se  $pg_k = g_{k+1} - qg_{k-1}$ , então

$$g_k g_{k+2} = (g_{k+1} - qg_{k-1})g_{k+1} + qg_k^2 = g_{k+1}^2 - qg_{k-1}g_{k+1} + qg_k^2.$$

Usando a hipótese de indução, Eq. (2), vemos que

$$-qg_{k-1}g_{k+1} = -qg_k^2 - q(-1)^k q^{k-2} [q^3 + p^2(q-1)].$$

Consequentemente, obtemos

$$\begin{aligned} g_k g_{k+2} &= g_{k+1}^2 - qg_k^2 - q(-1)^k q^{k-2} [q^3 + p^2(q-1)] + qg_k^2 \\ &= g_{k+1}^2 + (-1)(-1)^k q \cdot q^{k-2} [q^3 + p^2(q-1)] \\ &= g_{k+1}^2 + (-1)^{k+1} q^{k-1} [q^3 + p^2(q-1)] \\ &= g_{k+1}^2 + (-1)^{k+1} q^{(k+1)-2} [q^3 + p^2(q-1)], \end{aligned}$$

ou seja, a Eq. (3) é válida, que é o que queríamos provar. □

**Observação 2.** Notemos que a proposição acima é uma versão generalizada dessa relação para as seqüências de Fibonacci e de Pell. Basta fazermos  $p = q = 1$  para a primeira e  $q = 1, p = 2$  para a segunda, por exemplo; ver [4, Proposição 7].

### 3. Seqüências de Fibonacci Generalizada e sua Relação com Números Metálicos

Na presente seção, nosso objetivo é definir a seqüência de razões entre termos consecutivos das SFG e relacioná-las com os números metálicos. Na verdade, seja  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a seqüência de termo geral dado por  $r_n = \frac{g_{n+1}}{g_n}$ , em que  $g_{n+1}$  e  $g_n$  são termos consecutivos da SFG, conforme Definição 1. Veremos que essa seqüência é convergente, e mais: que converge para um número metálico. Para provar tal fato, provaremos inicialmente a seguinte proposição.

**Proposição 6.** Seja  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a seqüência formada pela razão de termos consecutivos da SFG, ou seja, a seqüência de termo geral dado por  $r_n = \frac{g_{n+1}}{g_n}$ , em que  $g_{n+1}$  e  $g_n$  são termos consecutivos da SFG. Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , valem as seguintes desigualdades

i)  $r_{2n-1} < r_{2n}$ ;

ii)  $r_{2n-1} < r_{2n+1}$ ;

iii)  $r_{2n} > r_{2n+2}$ .

*Demonstração.* Como  $p, q \in \mathbb{N}$  e  $g_n > 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se

$$\begin{aligned} r_{2n} - r_{2n-1} &= \frac{g_{2n+1}}{g_{2n}} - \frac{g_{2n}}{g_{2n-1}} = \frac{g_{2n-1}g_{2n+1} - g_{2n}^2}{g_{2n}g_{2n-1}} \\ &= \frac{g_{2n}^2 + (-1)^{2n} q^{2n-2} [q^3 + p^2(q-1)] - g_{2n}^2}{g_{2n}g_{2n-1}} \\ &= \frac{q^{2n-2} [q^3 + p^2(q-1)]}{g_{2n}g_{2n-1}} > 0, \end{aligned}$$

ou seja, o item **i)** é válido. Para o item **ii)**, observamos que

$$\begin{aligned}
 r_{2n+1} - r_{2n-1} &= \frac{g_{2n+2}}{g_{2n+1}} - \frac{g_{2n}}{g_{2n-1}} = \frac{g_{2n-1}g_{2n+2} - g_{2n}g_{2n+1}}{g_{2n-1}g_{2n+1}} \\
 &= \frac{g_{2n-1}(pg_{2n+1} + qg_{2n}) - g_{2n}(pg_{2n} + qg_{2n-1})}{g_{2n-1}g_{2n+1}} \\
 &= \frac{pg_{2n-1}g_{2n+1} + qg_{2n-1}g_{2n} - pg_{2n}^2 - qg_{2n-1}g_{2n}}{g_{2n-1}g_{2n+1}} \\
 &= \frac{pg_{2n-1}g_{2n+1} - pg_{2n}^2}{g_{2n-1}g_{2n+1}} \\
 &= \frac{pg_{2n-1}g_{2n+1} + p(-1)^{2n}q^{2n-2}[q^3 + p^2(q-1)] - pg_{2n}^2}{g_{2n-1}g_{2n+1}} \\
 &= \frac{pq^{2n-2}[q^3 + p^2(q-1)]}{g_{2n-1}g_{2n+1}} > 0.
 \end{aligned}$$

E analogamente, para o item **iii)**, notemos que

$$\begin{aligned}
 r_{2n+2} - r_{2n} &= \frac{g_{2n+3}}{g_{2n+2}} - \frac{g_{2n+1}}{g_{2n}} = \frac{g_{2n}g_{2n+3} - g_{2n+1}g_{2n+2}}{g_{2n}g_{2n+2}} \\
 &= \frac{g_{2n}(pg_{2n+2} + qg_{2n+1}) - g_{2n+1}(pg_{2n+1} + qg_{2n})}{g_{2n}g_{2n+2}} \\
 &= \frac{pg_{2n}g_{2n+2} + qg_{2n}g_{2n+1} - pg_{2n+1}^2 - qg_{2n}g_{2n+1}}{g_{2n}g_{2n+2}} \\
 &= \frac{pg_{2n}g_{2n+2} - pg_{2n+1}^2}{g_{2n}g_{2n+2}} \\
 &= \frac{pg_{2n+1}^2 + p(-1)^{2n+1}q^{2n-1}(p+q-1) - pg_{2n+1}^2}{g_{2n}g_{2n+2}} \\
 &= \frac{-pq^{2n-1}(p+q-1)}{g_{2n}g_{2n+2}} < 0.
 \end{aligned}$$

□

Observamos que a Proposição 5 foi aplicada na prova desses três casos. Notemos que o item i) acima nos diz que os termos de ordem ímpar na sequência  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  são menores que os termos de ordem par. Já o item ii) garante que a subsequência  $(r_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$  dos termos de ordem ímpar é monótona crescente; e por fim a subsequência  $(r_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  dos termos de ordem par é monótona decrescente pelo item iii).

Além disso, podemos concluir dessas relações que a sequência  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada, mais especificamente, tem-se  $r_1 < r_n < r_2$  para todo natural  $n$ , conseqüentemente, as subsequências  $(r_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(r_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  também são limitadas. Logo, garantimos a convergência das subsequências  $(r_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(r_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Proposição 7.** Sejam  $\ell_1$  e  $\ell_2$  números reais tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n-1} = \ell_1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n} = \ell_2,$$

então  $\ell_1 = \ell_2 = \sigma_{p,q}$ . Consequentemente, a sequência  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de termo geral dado por  $r_n = \frac{g_{n+1}}{g_n}$ , em que  $g_{n+1}$  e  $g_n$  são termos consecutivos da SFG converge para o número metálico  $\sigma_{p,q} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ .

*Demonstração.* Uma vez que,

$$r_{2n-1} = \frac{g_{2n}}{g_{2n-1}} = \frac{pg_{2n-1} + qg_{2n-2}}{g_{2n-1}} = p + \frac{qg_{2n-2}}{g_{2n-1}} = p + \frac{qg_{2n-2}}{pg_{2n-2} + qg_{2n-3}} = p + \frac{q}{p + q \frac{g_{2n-3}}{g_{2n-2}}},$$

tem-se

$$r_{2n-1} = p + \frac{q}{p + \frac{q}{r_{2n-3}}};$$

aplicando o limite para  $n \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n-1} = p + \frac{q}{p + \frac{q}{\lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n-3}}},$$

ou seja,

$$\ell_1 = p + \frac{q}{p + \frac{q}{\ell_1}} \Rightarrow \ell_1^2 - p\ell_1 - q = 0$$

; consequentemente,  $\ell_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$  é a única raiz real positiva dessa última equação. Analogamente, uma vez que

$$r_{2n} = \frac{g_{2n+1}}{g_{2n}} = \frac{pg_{2n} + qg_{2n-1}}{g_{2n}} = p + \frac{qg_{2n-1}}{g_{2n}} = p + \frac{qg_{2n-1}}{pg_{2n-1} + qg_{2n-2}} = p + \frac{q}{p + \frac{q}{r_{2n-2}}},$$

e  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n} = \ell_2$ , aplicando o limite para  $n \rightarrow \infty$ , tem-se

$$\ell_2 = p + \frac{q}{p + \frac{q}{\ell_2}} \Rightarrow \ell_2^2 - p\ell_2 - q = 0$$

implicando que  $\ell_2 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$  é a única solução real positiva para a equação anterior. Logo, os limites existem e são iguais

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} r_{2n} = \sigma_{p,q},$$

isto é, as subsequências de ordem par e de ordem ímpar de  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergem para  $\sigma_{p,q}$ . Portanto, esse fato garante a convergência da sequência  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  para o número metálico  $\sigma_{p,q}$ .  $\square$

**Observação 3.** Vale ressaltar que o caso particular da proposição acima, para a sequência dada pela razão entre os números consecutivos de Pell, ou seja, o caso em que  $p = 2$  e  $q = 1$ , foi feito por Teixeira *et al.* [11, Seção 5].

#### 4. Relações entre os números metálicos e conteúdos matemáticos do Ensino Básico

Nessa seção vamos descrever de forma sucinta algumas relações entre os números metálicos e conteúdos do Ensino Básico, como *equações quadráticas, gráficos de funções e geometria plana.*

• **Equações quadráticas**

Um primeiro conteúdo, que pode ser explorado, tendo como motivação os números metálicos, é o de equações quadráticas, uma vez que tais números foram definidos na Introdução como as raízes positivas das equações

$$x^2 - px - q = 0,$$

em que  $p$  e  $q$  são naturais quaisquer. Nessa motivação, pode-se utilizar o método de completar quadrados para ver que os números metálicos são da forma  $\sigma_{p,q} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ . De fato, começamos reescrevendo  $-p$  como  $-2\frac{p}{2}$  e adicionando  $(\frac{p}{2})^2 + q$  em ambos os membros da equação, conforme apresentamos a seguir

$$x^2 - px - q = 0 \Rightarrow x^2 - 2\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q,$$

assim completamos um quadrado da diferença no primeiro membro de modo a obter

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2 + 4q}{4}$$

consequentemente, como  $p^2 + 4q > 0$ , obtemos

$$x - \frac{p}{2} = \pm \frac{\sqrt{p^2 + 4q}}{2} \quad \text{e, portanto,} \quad x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

cujas raiz positiva é o número metálicos  $\sigma_{p,q}$ .

• **Gráficos de funções**

Outro conteúdo que pode ser relacionado ao estudo dos números metálicos é o de gráfico das funções quadráticas e afins.

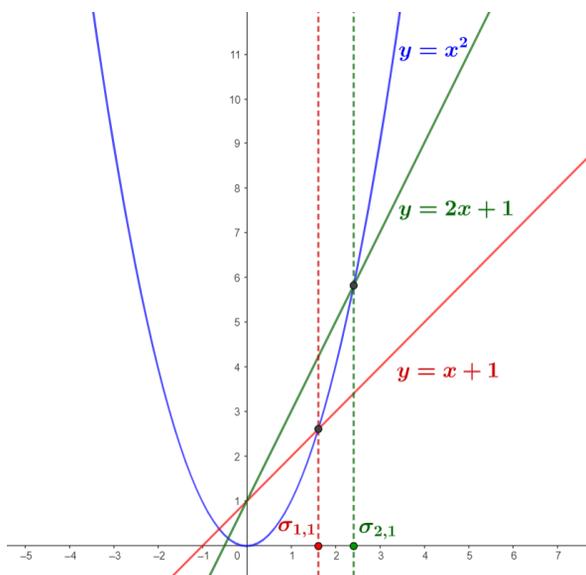


Figura 3: Números metálicos como abscissas do ponto de interseção de gráficos de funções.

Na verdade, pode-se observar que determinar os números metálicos, ou melhor, resolver a equação  $x^2 - px - q = 0$  é equivalente a determinar as abscissas dos pontos de interseção dos gráficos da função quadrática  $y = x^2$  e das funções afins  $y = px + q$  com  $p, q \in \mathbb{N}$ . Na Figura 3, a título de exemplo e com auxílio do GeoGebra, foram feitos os gráficos das funções  $y = x^2$  em azul,  $y = x + 1$  em vermelho e  $y = 2x + 1$  em verde, na qual as abscissas positivas do ponto de interseção do gráfico em azul com o vermelho e do azul com o verde são os números de ouro  $\sigma_{1,1}$  e de prata  $\sigma_{2,1}$  respectivamente.

● **Geometria Plana e Espacial**

Com relação às Geometrias Plana e Espacial existem uma diversidade de conteúdos que podem ser explorados, por exemplo: *divisão de segmentos em razão metálica (média e extrema razão, razão de prata, ...)*, *retângulos metálicos, relação entre os lados e diagonais de polígonos, diagonal de poliedros de Platão, elementos de pirâmide, entre outros*, ver [1], [5], [7], [9], [11]. Para ilustrar, apresentamos na figura a seguir a relação do número de ouro com o triângulo isósceles (com ângulos da base iguais a  $72^\circ$  e com ângulo oposto à base igual a  $36^\circ$ ), com o pentágono regular e com o decágono regular.

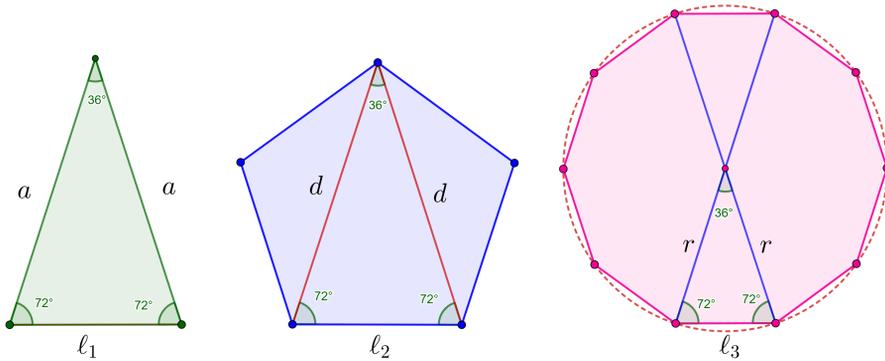


Figura 4: Razão de ouro em polígonos.

Onde pode-se verificar que as razões entre o lado  $a$  e a base  $l_1$  do triângulo isósceles, entre a diagonal  $d$  e o lado  $l_2$  do pentágono regular e entre o raio  $r$  da circunferência circunscrita ao decágono regular e o lado do decágono regular  $l_3$  da Figura 4 são iguais ao número de ouro, ou seja,  $\frac{a}{l_1} = \frac{d}{l_2} = \frac{r}{l_3} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

**5. Conclusão**

Nesse trabalho, com motivação no número de ouro e sua relação com a sequência de Fibonacci, definimos a família dos números metálicos como as soluções positivas da equação quadrática  $x^2 - px - q = 0$  em que, para cada par  $(p, q) \in \mathbb{Z}$ , teremos um número metálico  $\sigma_{p,q} = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$ , e vimos que o seu primeiro membro ( $p = q = 1$ ) é o célebre número de ouro. Além disso, definimos as sequências de Fibonacci generalizadas e apresentamos algumas de suas propriedades, que, por sua vez, generalizam as propriedades da sequência de Fibonacci, conforme pode ser visto nas Observações 1 e 2.

Além disso, atingimos o principal objetivo desse trabalho, provando na Seção 3 que a sequência formada pela razão entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci generalizada converge para algum número metálico. Para isso, mostramos que as subsequências de ordem par e de ordem ímpar, são monótonas e limitadas (portanto convergentes) e convergem para o mesmo limite que é o número metálico  $\sigma_{p,q}$ .

Por fim, apresentamos na Seção 4 alguns conteúdos matemáticos do Ensino Básico que podem ser relacionados com os números metálicos. Entendemos que evidenciar tal relação pode motivar o estudo dos conteúdos citados.

## Agradecimentos

Agradecemos a Universidade Federal de Rondônia pela bolsa de iniciação científica concedida ao segundo autor, sob a orientação do primeiro autor, durante o desenvolvimento deste trabalho. E ao revisor pelas sugestões dadas para melhorar esse trabalho.

## Referências

- [1] Ávila, G. Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de Fibonacci. *Revista do Professor de Matemática*, 6, 1985.
- [2] ArchDaily. Disponível em: <https://www.archdaily.cl/cl/805182/vera-de-spinadel-entre-numericos-metalicos-y-fractales>. Acesso em 26 de outubro de 2023.
- [3] Caneiro, M. S., Nobokite, K. E., Fernandes, M. A. A. *Três diferentes provas de que as razões entre números consecutivos de fibonacci convergem para o número de ouro*. PMO v. 11, n. 2, p. 194-204, 2023.
- [4] Costa, E. A., Santos, D. C. Algumas propriedades da sequência de pell. *CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 2022.
- [5] Oliveira, J. L. *O retângulo de prata, a razão de prata e sua relação com a sequência de pell*. PMO v. 10, n. 2, p. 163-181, 2022.
- [6] Lima, E. L. *Análise real - vol. 1 - Funções de uma Variável - Coleção Matemática Universitária*. 13° Ed. Rio de Janeiro: Impa, 2020.
- [7] Lívio, M. *Razão áurea-a história do número fi, um número surpreendente - Tradução de Matsumama, S.*, 6a Ed., Rio de Janeiro: Record, 2011.
- [8] Noronha, W.F. R., Alves, F. R. V. Sequência de pell: propriedades e considerações epistemológicas. *CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 2018.
- [9] Saraiva, J. C. V. As pirâmides do egito e a razão áurea. *Revista do Professor de Matemática*, 48, 1990.
- [10] Spinadel, V. W. *The metallic means family and renormalization group techniques*. Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, 6(1):173-189, 2000.
- [11] Teixeira, M. A. G., Craveiro, I. M., Reis, E. S., *Algumas relações entre os números consecutivos de Pell e a razão de Prata* PMO v.11, n.4, p. 478-490, 2023.
- [12] Teodoro, M. P. Sobre a sequência de fibonacci. *Revista de Matemática*, 142 5(1): 29-49, 2018.
- [13] Unicamp - Sala de Imprensa. Disponível em: [https://www.unicamp.br/unicamp/unicamp\\_hoje/ju/abril2006/ju320pag12.html](https://www.unicamp.br/unicamp/unicamp_hoje/ju/abril2006/ju320pag12.html). Acesso em 27 de outubro de 2023.

Marcio Costa Araújo Filho  
Universidade Federal de Rondônia  
<[marcio.araujo@unir.br](mailto:marcio.araujo@unir.br)>

Valder Cezar Izato de Araújo  
Universidade Federal de Rondônia  
<[cezarizato@gmail.com](mailto:cezarizato@gmail.com)>

Recebido: 31/10/2023  
Publicado: 30/04/2024