

Palavras de Fibonacci e seus fractais

Thiago de Melo 

Valdirene Dias Arrabal Brogna 

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar as propriedades combinatórias de certas sequências, chamadas de *palavras*, que são geradas a partir de elementos de um conjunto, chamado *alfabeto*. Em especial, analisamos a palavra de Fibonacci, que possibilita a construção de curvas fractais através de uma certa regra, chamada *regra par-ímpar*. Além disso, apresentamos algumas propriedades geométricas desses fractais por meio das ilustrações elaboradas com programação Python e TikZ.

Palavras-chave: Fractal; Palavras de Fibonacci; Python

Abstract

The aim of this work is to study the combinatorial properties of certain sequences, known as *words*, which are generated from elements of a set, called *alphabet*. Specially, we analyse the Fibonacci word that leads to the construction of fractal curves by means of an even-odd rule. In addition, we present some geometric properties of these fractals making use of many illustrations created with Python programming and TikZ.

Keywords: Fractal, Fibonacci words; Python

1. Introdução

Uma das sequências numéricas mais conhecidas, não somente na comunidade matemática mas também nas demais áreas das Ciências, é a sequência de Fibonacci, apresentada por Leonardo de Pisa em 1202 na obra *Liber Abaci* (ver [4]), embora acredita-se que tal sequência já era conhecida anteriormente na Índia. Seus primeiros termos são 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . . onde, exceto os dois primeiros termos, cada um é obtido pela soma dos dois anteriores. Formalmente, por meio de recorrência, define-se $F_1 = F_2 = 1$ e, para cada $n \geq 3$ inteiro,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}. \quad (1)$$

Muitas propriedades desta sequência são conhecidas e até hoje muito se estuda sobre seus termos, que são chamados de números de Fibonacci. Uma das propriedades mais famosas é a fórmula de Binet, que descreve o número F_n em função do número de ouro (ou razão áurea) φ , ou seja,

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi},$$

onde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ são as soluções da equação $x^2 = x + 1$. Mais propriedades e referências podem ser encontradas em [2, 3, 6].

Neste trabalho, apresentaremos propriedades interessantes de algumas sequências, chamadas de palavras, que nada mais são do que sequências de símbolos (letras ou dígitos) de um conjunto prefixado, chamado de alfabeto. Relações entre os símbolos podem ou não ocorrer, e duas palavras podem ser concatenadas para formarem uma nova palavra.

Inspirados pela definição recursiva da Equação (1), definimos as palavras (binárias) de Fibonacci a partir de um alfabeto de dois dígitos, $\{0, 1\}$. Mais precisamente, definimos as duas palavras iniciais por $f_1 = 1$, $f_2 = 0$ e, para cada $n \geq 3$ inteiro,

$$f_n = f_{n-1}f_{n-2} \quad (2)$$

é a concatenação das duas palavras anteriores. Cada palavra de Fibonacci dá origem a uma figura geométrica, chamada de curva de Fibonacci, obtida aplicando certas regras de construção que dependem dos dígitos da palavra e das posições em que nela ocorrem.

Tomando como referência os trabalhos [7, 8], explicaremos em detalhes a construção desta curva e traremos alguns aspectos geométricos, como por exemplo, sua autossimilaridade.

2. Palavras de Fibonacci

Seja Σ um conjunto não vazio finito, chamado alfabeto, cujos elementos são chamados de símbolos. Uma palavra em Σ é uma sequência (possivelmente vazia) de símbolos de Σ . O conjunto de todas as palavras finitas é denotado por Σ^* , possui estrutura de monoide com a operação de concatenação (ou justaposição) de palavras.

Mais precisamente, dadas duas palavras $u = a_1a_2 \dots a_s$ e $v = b_1b_2 \dots b_t$ em Σ^* , denotamos por uv a concatenação delas, isto é, $uv = a_1a_2 \dots a_sb_1b_2 \dots b_t$. Note que a palavra vazia $\varepsilon \in \Sigma^*$ é o elemento identidade dessa operação, de modo que $u\varepsilon = \varepsilon u = u$.

Por exemplo, para o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, iniciando com a palavra vazia ε , podemos obter infinitas palavras, como vemos na Figura 1.

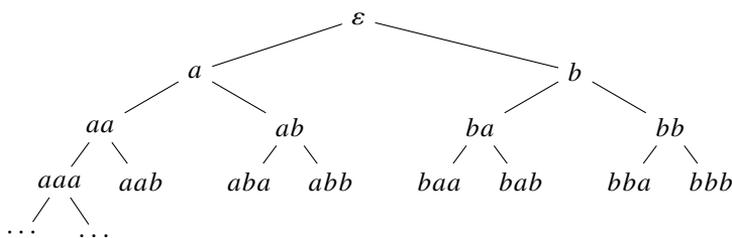


Figura 1: Árvore de construção de palavras

Para cada palavra $w \in \Sigma^*$, $|w|$ denota seu comprimento, ou seja, o número de símbolos que ocorrem em w . O comprimento de ε é zero, por definição.

Uma palavra v é um fator (ou subpalavra) de u se existem $x, y \in \Sigma^*$ tais que $u = xvy$. Se $x = \varepsilon$ ou $y = \varepsilon$, então v é chamado de prefixo ou sufixo de u , respectivamente. O reverso de uma palavra $u = a_1a_2 \dots a_s$ é a palavra $\tilde{u} = a_s \dots a_2a_1$, obtida simplesmente escrevendo os símbolos na ordem reversa. Se $u = \tilde{u}$, temos então um palíndromo. Obviamente, números palíndromos existem na Matemática, como, por exemplo 121, 1331, 14641. Mas os encontramos também na Língua Portuguesa, como, por exemplo, arara, reviver, anotaram a data da maratona, dentre outros.

Mais formalmente, escrevendo $\zeta_n = \text{zero}(f_n)$ para a quantia de dígitos \emptyset na palavra f_n , temos:

$$\zeta_2 = \text{zero}(f_2) = 1, \quad \zeta_3 = \text{zero}(f_3) = 1, \quad \zeta_n = \zeta_{n-1} + \zeta_{n-2}, \quad n \geq 4.$$

Analogamente, escrevendo $\iota_n = \text{um}(f_n)$ para a quantia de dígitos 1 na palavra f_n :

$$\iota_3 = \text{um}(f_3) = 1, \quad \iota_4 = \text{um}(f_4) = 1, \quad \iota_n = \iota_{n-1} + \iota_{n-2}, \quad n \geq 5.$$

Em resumo, a quantia de dígitos \emptyset e a quantia de dígitos 1 criam seqüências de números de Fibonacci, a menos da reindexação, e portanto $\zeta_n = F_{n-1}$ e $\iota_n = F_{n-2}$, que está totalmente compatível com o fato de que o comprimento de f_n , ou seja, $\zeta_n + \iota_n$, é o número de Fibonacci F_n . \square

Seja $\phi: \{\emptyset, 1\}^* \rightarrow \{\emptyset, 1\}^*$ a função que remove os dois últimos dígitos da palavra, isto é, $\phi(a_1 a_2 \dots a_s) = a_1 a_2 \dots a_{s-2}$, para $s \geq 3$. Por facilidade, a partir de agora, vamos escrever $p_n = \phi(f_n)$.

Teorema 1 ([7, Theorem WT1]). *Seja $n \geq 4$. Se $f_n = p_n a b$ e $t_n = p_n b a$, então $f_n = f_{n-2} t_{n-1}$ e $t_n = f_{n-2} f_{n-1}$.*

Demonstração. Faremos a prova por indução em $n \geq 4$. Primeiramente, lembramos que $f_3 = \emptyset 1$ e $f_4 = \emptyset 1 \emptyset$, de onde segue que $t_3 = 1 \emptyset$ e $t_4 = \emptyset \emptyset 1$. Como $f_2 = \emptyset$, obtemos

$$f_4 = \emptyset 1 \emptyset = f_2 t_3, \quad t_4 = \emptyset \emptyset 1 = f_2 f_3.$$

Suponhamos que $f_n = f_{n-2} t_{n-1}$ e $t_n = f_{n-2} f_{n-1}$, para algum $n \geq 5$. Daí,

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n f_{n-1} = (f_{n-1} f_{n-2}) f_{n-1} = f_{n-1} (f_{n-2} f_{n-1}) = f_{n-1} t_n, \\ f_{n-1} f_n &= f_{n-1} (f_{n-2} t_{n-1}) = (f_{n-1} f_{n-2}) t_{n-1} = f_n t_{n-1} = t_{n+1}, \end{aligned}$$

de onde segue o resultado. \square

Observação 2. A igualdade $f_n t_{n-1} = t_{n+1}$, no final da demonstração acima, merece mais detalhes. A permutação das duas últimas letras de uma palavra (não unitária, obviamente) é preservada pela concatenação, ou seja, se f, g são duas palavras e se τ é a permutação das duas últimas letras, então $\tau(fg) = f\tau(g)$, conforme ilustrado na Figura 2. Note que $t_n = p_n b a = \tau(f_n)$ e $\tau \circ \tau = \text{id}$.

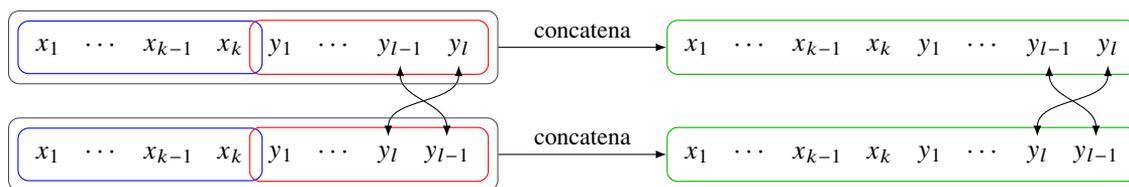


Figura 2: Relação entre concatenação e permutação

Essa propriedade intrínseca de τ , juntamente com a igualdade $f_n = f_{n-2} t_{n-1}$ do teorema anterior, dá-nos que a concatenação de duas palavras de Fibonacci sucessivas é “quase comutativa”, isto é, invertendo a ordem da concatenação de f_{n-1} com f_{n-2} , cria-se outra palavra, similar a f_n , mas com os dois últimos dígitos permutados, ou seja,

$$f_n = f_{n-1} f_{n-2} = f_{n-2} t_{n-1} \Rightarrow t_n = \tau(f_n) = \tau(f_{n-2} t_{n-1}) = f_{n-2} \tau(t_{n-1}) = f_{n-2} f_{n-1}.$$

A seguir, mostraremos que uma palavra de Fibonacci é quase um palíndromo.

Proposição 2. Para $n \geq 4$, $p_n = \phi(f_n)$ é um palíndromo.

Demonstração. A prova é por indução forte. Como $f_4 = 010$ então $p_4 = 0$ obviamente é um palíndromo. Suponhamos que $p_k = \phi(f_k)$ seja palíndromo, para $k < n$. Agora, observe que $p_n = f_{n-1}p_{n-2}$, pois $f_n = f_{n-1}f_{n-2}$. Como $f_{n-1} = f_{n-2}f_{n-3}$, podemos escrever

$$p_n = (f_{n-2}f_{n-3})p_{n-2} = (p_{n-2}ab)(p_{n-3}cd)p_{n-2}.$$

Lembrando que, pela Observação 1(ii), palavras consecutivas possuem os dois últimos dígitos permutados, então ab e cd são reversas uma da outra, ou seja, $a = d$ e $b = c$. Pela hipótese de indução, p_{n-2} e p_{n-3} são palíndromos. Logo, $p_n = p_{n-2}abp_{n-3}bap_{n-2}$ é também um palíndromo. \square

O próximo resultado fornece uma decomposição conveniente para f_n , que será útil para a compreensão da autossemelhança das curvas de Fibonacci que apresentaremos futuramente.

Teorema 2 ([7, Theorem WT2]). Para $n \geq 6$, $f_n = f_{n-3}f_{n-3}f_{n-6}t_{n-3}t_{n-3}$. Em relação ao palíndromo, $p_n = p_{n-3}abp_{n-3}p'_{n-6}p_{n-3}bap_{n-3}$, onde $p'_k = bap_kab = baf_k$.

Demonstração. Por meio de substituições sucessivas e do Teorema 1, segue que

$$\begin{aligned} f_n &= f_{n-1}f_{n-2} = (f_{n-2}f_{n-3})(f_{n-3}f_{n-4}) = \\ &= (f_{n-3}f_{n-4})(f_{n-4}f_{n-5})(f_{n-3}f_{n-4}) = f_{n-3}f_{n-4}(f_{n-5}f_{n-6})f_{n-5}(f_{n-4}f_{n-5})f_{n-4} = \\ &= f_{n-3}(f_{n-4}f_{n-5})f_{n-6}(f_{n-5}f_{n-4})(f_{n-5}f_{n-4}) = f_{n-3}f_{n-3}f_{n-6}t_{n-3}t_{n-3}. \end{aligned}$$

Sabendo que $f_{n-3} = p_{n-3}ab$, podemos reescrever

$$f_n = (p_{n-3}ab)(p_{n-3}ab)f_{n-6}(p_{n-3}ba)(p_{n-3}ba) = p_{n-3}abp_{n-3}(abf_{n-6})p_{n-3}bap_{n-3}ba.$$

Como $n-3$ e $n-6$ não têm mesma paridade, segue que $f_{n-6} = p_{n-6}ba$. Eliminando os dois últimos dígitos de f_n na expressão acima, ou seja, ba , e notando que $abf_{n-6} = abp_{n-6}ba$ é um palíndromo, concluímos que

$$\phi(f_n) = p_n = p_{n-3}abp_{n-3}p'_{n-6}p_{n-3}bap_{n-3}. \quad \square$$

Resumidamente, o resultado acima diz-nos que, para $n \geq 6$, f_n é a concatenação de dois palíndromos p_{n-3} separados por ab , um palíndromo p'_{n-6} e novamente dois palíndromos p_{n-3} separados por ba .

Para o próximo resultado, lembramos que $|f_n| = F_n$ é par se, e somente se, n é múltiplo de 3. O mesmo vale para $|p_n| = F_n - 2$. Assim, podemos analisar o dígito central de p_n , que só existe quando p_n tem comprimento ímpar, ou seja, $n \not\equiv 0 \pmod{3}$, da seguinte forma:

Corolário 1. Para $n \geq 5$, o dígito central do palíndromo p_n é 0, se $n \equiv 1 \pmod{3}$, e 1, se $n \equiv 2 \pmod{3}$.

Demonstração. Decompondo $f_{3(k+1)+1} = f_{3k+3}f_{3k+2} = f_{3k+2}f_{3k+1}f_{3k+2}$ e tomando os palíndromos, obtemos $p_{3(k+1)+1} = p_{3k+2}abp_{3k+1}bap_{3k+2}$, de modo que o dígito central de $p_{3(k+1)+1}$ é, na verdade, o dígito central de p_{3k+1} . Como $p_7 = 01001010010$ tem dígito central 0, usando indução sobre $k \geq 2$, segue o resultado para o caso $n \equiv 1 \pmod{3}$. A prova para p_{3k+2} é análoga, para $k \geq 1$. \square

3. Fractais da palavra de Fibonacci

Uma palavra de Fibonacci f_n pode ser associada a uma curva, obtida por uma regra de desenho, a qual tem propriedades geométricas oriundas de propriedades combinatórias de f_n . Para cada dígito da palavra, um segmento de reta é traçado em uma direção específica, que é determinada pelo dígito anterior, como veremos em detalhes na Seção 3.1. Essa ideia é a mesma usada em Sistemas-L (ou sistemas de Lindenmayer).

Para facilitar o entendimento, o leitor pode imaginar que o objetivo é traçar a partir do ponto $(0, 0)$ uma poligonal, cujos vértices possuem coordenadas inteiras e cujos segmentos são unitários, verticais ou horizontais, formando sempre ângulos retos, exceto se forem colineares. Intuitivamente, a poligonal é formada apenas usando rotações das peças da Figura 3.

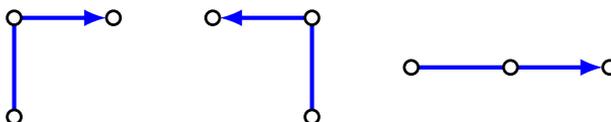


Figura 3: Peças que compõem a curva de Fibonacci

O ponto crucial na construção da poligonal é perceber que o dígito 0 é responsável por um segmento e ele altera a direção do próximo segmento. A influência de cada dígito na direção do próximo segmento é o que chamamos de “regra par-ímpar”, definida como na Tabela 2.

Dígito	Ação
1	Desenha um segmento (unitário) à frente e mantém a direção.
0	Desenha um segmento (unitário) à frente e: <ul style="list-style-type: none"> • se o dígito é na posição par, muda a direção para a esquerda; • se o dígito é na posição ímpar, muda a direção para a direita.

Tabela 2: Regra par-ímpar

A n -ésima curva de Fibonacci, denotada por \mathcal{F}_n , é obtida aplicando a regra par-ímpar à palavra f_n . Na Figura 4, temos as curvas $\mathcal{F}_9, \mathcal{F}_{10}, \mathcal{F}_{11}$, de comprimentos 34, 55 e 89, respectivamente, geradas usando um programa Python, desenvolvido pelos autores.

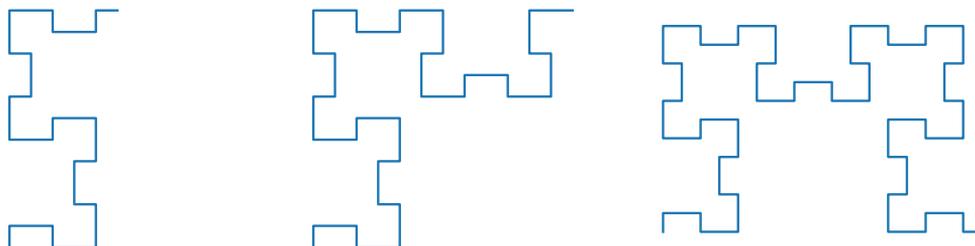


Figura 4: Curvas $\mathcal{F}_9, \mathcal{F}_{10}$ e \mathcal{F}_{11} das palavras de Fibonacci f_9, f_{10} e f_{11}

O fractal da palavra de Fibonacci é definido por

$$\mathcal{F} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n$$

e revela três tipos de padrões e um grande número de similaridades, além de uma forte ligação com os números de Fibonacci.

3.1. A construção do fractal

A seguir, exploraremos a regra de desenho par-ímpar da Tabela 2. Várias ilustrações foram criadas pelos autores e muitas outras foram adaptadas e aprimoradas de [7], sempre com o intuito de deixar mais claro as propriedades presentes nas curvas de Fibonacci.

Iniciando a construção. O primeiro passo é fixarmos um ponto p_0 , que será usado como ponto inicial do fractal, e uma direção w_0 (vetor diretor), que determinará em qual direção o primeiro segmento (que assumiremos unitário) do fractal será traçado. Por facilidade, vamos usar a origem $p_0 = (0, 0)$ e o vetor diretor $w_0 = (0, 1)$ (direção norte).

Iterando o processo. Para traçarmos a curva \mathcal{F}_n , fazemos um processo iterativo, para cada dígito da palavra f_n . A cada etapa, devemos traçar um segmento unitário a partir do ponto de referência na direção do vetor diretor atual, ou seja, no k -ésimo passo, teremos o ponto p_k e o vetor w_k . Obtemos então $p_{k+1} = p_k + w_k$ e w_{k+1} será obtido a partir de w_k , dependendo do dígito atual e da sua posição k na palavra, conforme as regras da Tabela 2.

Mais precisamente, seja d_k o k -ésimo dígito de uma palavra de Fibonacci. Daí:

- trace um segmento unitário com origem em p_k na direção de w_k ;
- tome $p_{k+1} = p_k + w_k$;
- defina

$$w_{k+1} = \begin{cases} w_k, & \text{se } d_k = 1, \\ e^{i\pi/2}w_k, & \text{se } d_k = 0 \text{ e } k \text{ é par,} \\ e^{-i\pi/2}w_k, & \text{se } d_k = 0 \text{ e } k \text{ é ímpar;} \end{cases}$$

- itere.

Em outras palavras, a cada etapa, a direção é mantida ou uma rotação de $\pm\pi/2$ é realizada, dependendo do dígito d_k e da paridade de sua posição k na palavra. Isso justifica o nome par-ímpar. O processo é encerrado quando o último segmento for traçado, correspondendo ao último dígito da palavra f_n .

Observe que, no processo recursivo acima, temos $1 \leq k \leq F_n$, pois o comprimento da palavra f_n é o número de Fibonacci F_n .

Ilustrando o processo. Em cada vértice p_k , ilustramos as quatro direções possíveis (norte, sul, leste, oeste) e colocamos uma seta dupla naquela fornecida pela regra par-ímpar. Para deixarmos claro o que se passa, descrevemos com mais detalhes os três primeiros passos.

1. O primeiro dígito $d_1 = 0$ fornece o primeiro segmento vertical para cima (pois a direção inicial foi escolhida, a nosso critério, como sendo norte) e muda a direção para leste, pois $k = 1$ é ímpar e a rotação é à direita (norte \rightarrow leste).

2. O segundo dígito $d_2 = 1$ fornece o segundo segmento, horizontal, pois a direção atual é leste, e não muda a direção, ou seja, continua para leste.
3. O terceiro dígito $d_3 = 0$ fornece o terceiro segmento, novamente horizontal, pois a direção atual é leste, e muda a direção para sul, pois $k = 3$ é ímpar e a rotação é à direita (leste \rightarrow sul).

Após três etapas, temos a situação da Figura 5, onde a parte tracejada antecipa o que acontecerá na quarta etapa, devido ao dígito $d_4 = 0$.

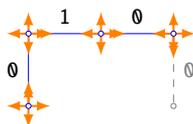


Figura 5: Primeiras etapas na construção da curva de Fibonacci

A Figura 6 mostra, para a palavra f_7 , a variação das direções durante a iteração. Observe que temos uma poligonal com 14 vértices p_0, \dots, p_{13} e 13 segmentos. Também, optamos por desenhar em p_{13} o vetor diretor w_{13} , que aponta para o norte (lembrando que $d_{13} = 1$ nos dá $w_{13} = w_{12}$).

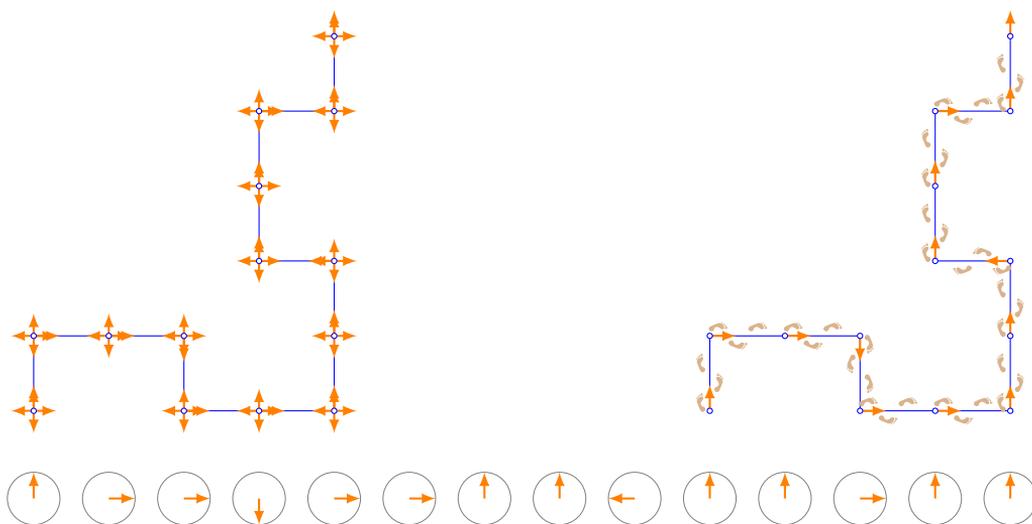


Figura 6: Curva da palavra $f_7 = 0100101001001$ de comprimento $F_7 = 13$

Observação 3. Levando em conta os fatos imediatos sobre as palavras f_n listados na Observação 1, podemos obter os seguintes fatos análogos para as curvas \mathcal{F}_n .

- (i) Há apenas segmentos simples ou duplos em \mathcal{F}_n , pois não há dois dígitos 1 consecutivos em f_n . Note que 11 produziria duas direções no mesmo sentido e, conseqüentemente, três segmentos colineares consecutivos. Mas isso nunca ocorre.
- (ii) O número de “esquinas” em \mathcal{F}_n é determinado pela quantidade ζ_n de dígitos 0 na palavra f_n , pois são estes que fornecem uma mudança de direção. Como vimos na Proposição 1, ζ_n é o número de Fibonacci F_{n-1} .

(iii) O número de segmentos duplos em \mathcal{F}_n é determinado pela quantidade de dígitos 1, pois estes não alteram a direção na construção da curva. Porém, há um detalhe: pela Observação 1(ii), sabemos que f_n termina em 01 ou 10. No primeiro caso, o dígito 1 não fornecerá um segmento duplo, já que o processo de construção termina. Assim, podemos concluir, pela Proposição 1, que o número de segmentos duplos é F_{n-2} se n é par ou $F_{n-2} - 1$ se n é ímpar.

(iv) Repetições na palavra de Fibonacci podem ser encontradas observando as repetições de padrões similares na curva correspondente. Por exemplo, o “ pilar esquerdo ” da curva \mathcal{F}_{23} (ver Figura 9) é similar ao “ pilar direito ”. Falaremos mais sobre isso na Seção 3.2.

Antes de tratarmos da autossimilaridade das curvas \mathcal{F}_n , necessitamos de uma ferramenta para gerar palavras a partir de outras. Mais precisamente, utilizando um morfismo podemos substituir letras de uma palavra por novas palavras e assim criar repetições interessantes.

Proposição 3. O morfismo $\sigma: \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ definido por $\sigma(0) = 01$, $\sigma(1) = 0$ satisfaz $\sigma(f_n) = f_{n+1}$. Consequentemente, $\sigma^3(f_n) = f_{n+3}$.

Demonstração. A prova é imediata, bastando observar que $f_1 = 1$, $f_2 = 0$ e assim, $\sigma(f_1) = \sigma(1) = 0 = f_2$ e $\sigma(f_2) = \sigma(0) = 01 = f_2 f_1 = f_3$. Como $f_{n+1} = f_n f_{n-1}$ e σ é um morfismo, o resultado segue. \square

Vamos explorar um pouco mais os morfismos $\sigma, \sigma^2, \sigma^3$. Por exemplo, aplicando σ^3 na palavra f_4 , de comprimento $F_4 = 3$, obtemos a palavra f_7 , de comprimento $F_7 = 13$, conforme a Figura 7.

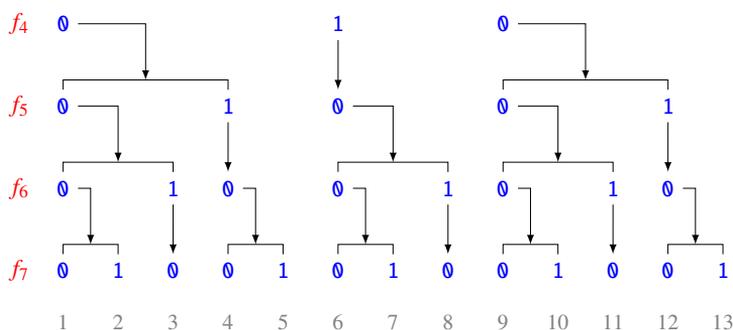


Figura 7: Substituição $\sigma(0) = 01$, $\sigma(1) = 0$ em f_4

Podemos ver que σ e σ^2 não preservam a paridade do comprimento das palavras, já que

$$|01| = 2 \text{ (par)}, \quad |\sigma(01)| = |010| = 3 \text{ (ímpar)}, \quad |\sigma^2(01)| = |01001| = 5 \text{ (ímpar)}.$$

No entanto,

$$\begin{aligned} \sigma^3(0) &= 01001, & \sigma^3(1) &= 010, \\ \sigma^3(00) &= 0100101001, & \sigma^3(01) &= 01001010, & \sigma^3(10) &= 01001001, \end{aligned}$$

ou seja, σ^3 transforma os dígitos 0 e 1 em palavras de comprimento ímpar (5 e 3, respectivamente), e transforma as três palavras de comprimento 2 em outras de comprimento par (10 ou 8). Lembramos que 11 não é relevante, pois nunca ocorre em f_n .

Como toda palavra de comprimento par pode ser decomposta em fatores de comprimento 2, então sua imagem por σ^3 também terá comprimento par. Procedendo de forma análoga, concluímos que toda palavra de comprimento ímpar será transformada por σ^3 em outra também de comprimento ímpar. Em resumo, para qualquer palavra w , tem-se

$$|\sigma^3(w)| \equiv |w| \pmod{2}. \quad (3)$$

Além disso, σ^3 preserva também a paridade da posição inicial de qualquer fator de uma palavra. Por exemplo, se w é um fator que se inicia na posição i então o fator $\sigma^3(w)$ terá início na posição j , onde i, j têm mesma paridade. De fato, basta observar que o fator x anterior a w tem comprimento $i - 1$ e daí, aplicar a Equação (3) a x .

Vale observar que existe também a noção de ângulo resultante de uma palavra de Fibonacci e que a preservação deste ângulo (a menos de sinal) por σ^3 é crucial para entendermos os padrões que se repetem nas curvas \mathcal{F}_n . Para mais detalhes, ver [1, Seção 4.2].

Usando outros morfismos. A Figura 8 mostra uma versão da curva de Fibonacci, obtida a partir da palavra f_n por meio de um morfismo que dualiza seus dígitos, ou seja, que substitui $0 \mapsto 1, 1 \mapsto 0$.

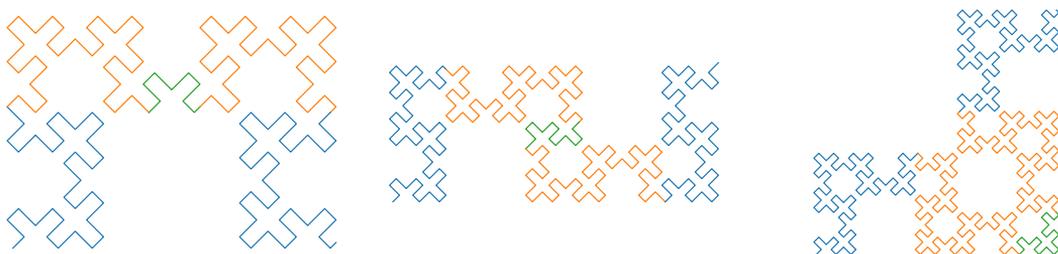


Figura 8: Curvas a partir de f_{14}, f_{15} e f_{16} com a substituição $0 \mapsto 1, 1 \mapsto 0$

3.2. A estrutura do fractal

A seguir, estabelecemos separadamente alguns resultados sobre a estrutura da curva \mathcal{F}_n , dependendo se $n \equiv 0, 1, 2 \pmod{3}$.

A estrutura de \mathcal{F}_{3k+2} . Sem perda de generalidade, e por facilidade, começamos examinando $k = 7$, ou seja, \mathcal{F}_{23} , que serve como base para o caso geral. Fazendo substituições sucessivas, encontramos várias palavras da mesma família como fatores de uma palavra de comprimento maior. Por exemplo,

$$f_{23} = f_{22}f_{21} = f_{21}f_{20}f_{21} = f_{21}f_{18}f_{17}f_{18}f_{21} = f_{21}f_{18}f_{15}f_{14}f_{15}f_{18}f_{21},$$

onde destacamos as palavras f_{14}, f_{17} e f_{20} , que geram as curvas $\mathcal{F}_{14}, \mathcal{F}_{17}$ e \mathcal{F}_{20} de comprimentos $|f_{14}| = 377$, $|f_{17}| = 1597$ e $|f_{20}| = 6765$, como mostra a Figura 9.

Pelo Teorema 2, sabemos que $p_n = p_{n-3}abp_{n-3}p'_{n-6}p_{n-3}bap_{n-3}$, onde $p'_k = bap_kab = baf_k$. Em particular, temos

$$p_{23} = p_{20}10p_{20}p'_{17}p_{20}01p_{20}, \quad (4)$$

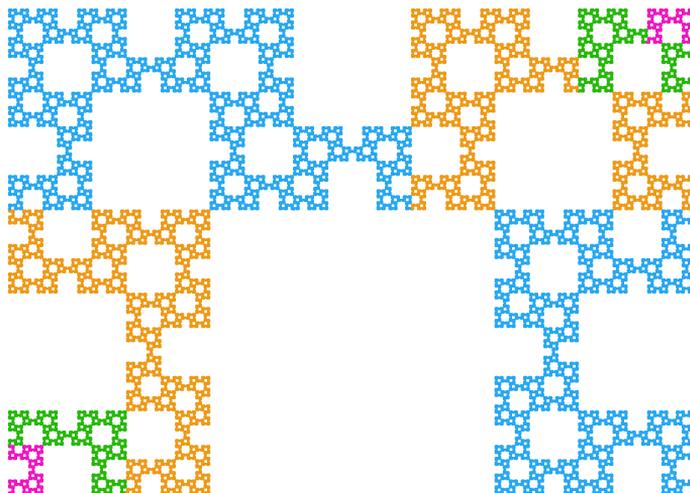


Figura 9: Semelhança entre \mathcal{F}_{14} , \mathcal{F}_{17} , \mathcal{F}_{20} , \mathcal{F}_{23}

onde as subpalavras 10 e 01 entre os palíndromos são fundamentais para o formato da curva \mathcal{F}_{23} . Nosso objetivo é entender como os padrões p_{20} e p'_{17} se conectam para gerar o ‘formato de torre’ da Figura 9.

Como o comprimento de p_{20} é $F_{20} - 2$ e 20 não é múltiplo de 3 , então p_{20} tem comprimento ímpar (ver [1, Observação 2.1]) e seu último dígito ocupa uma posição ímpar. Logo, o primeiro dígito 0 após o primeiro fator p_{20} na Equação (4) ocorre também em posição ímpar e será responsável por uma curva à direita, conforme a regra da Tabela 2.

As Figuras 10 e 11 ilustram muito bem o que cada fator da decomposição (4) produz, e as cores nelas utilizadas são cruciais para o entendimento das rotações desses padrões.

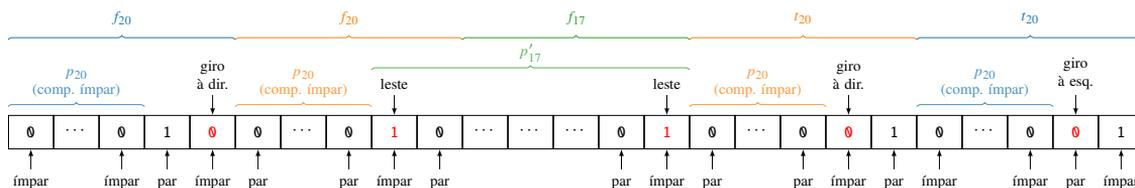


Figura 10: Decomposição de f_{23} em palíndromos

A primeira parcela p_{20} (em azul) começa e termina para o norte, e o fator 10 produz um giro à direita. Como o segundo fator p_{20} (em laranja) inicia-se em posição par, as posições dos dígitos 0 nele presentes ocorrerão em paridades trocadas, e, conseqüentemente, giros à direita serão trocados por giros à esquerda, e vice-versa. Isso significa que houve uma reflexão desse padrão em torno da diagonal.

(continua...)

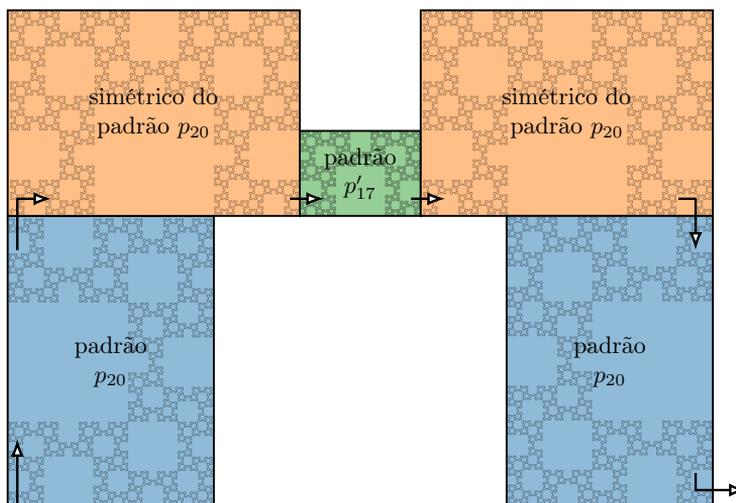


Figura 11: Estrutura da curva \mathcal{F}_{23}

A Figura 12 sobrepõe propositalmente as duas curvas \mathcal{F}_{20} (nas cores azul e laranja), que estão presentes na decomposição de \mathcal{F}_{23} . Observe que a curva laranja é obtida a partir da azul por meio de uma reflexão em relação à diagonal. O leitor familiarizado com Geometria Analítica ou Álgebra Linear perceberá que se trata da mudança de base $\{e_1, e_2\} \mapsto \{e_2, e_1\}$. Assim, seu primeiro segmento é na direção leste, compatível com a última direção na curva azul, de modo a termos uma perfeita concatenação. Em outras palavras, a direção inicial em p_{20} é norte (por convenção) e como o ângulo resultante de p_{20} é zero, então o primeiro giro à direita mencionado é ‘norte \rightarrow leste’, conforme ilustra a seta \P na Figura 11.

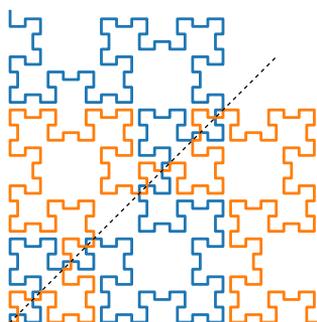


Figura 12: Eixo de simetria

Analisando o final da palavra f_{23} , podemos entender como são os dois últimos segmentos de \mathcal{F}_{23} , que terminará em um giro à esquerda, ou seja, ‘sul \rightarrow leste’, mostrado em detalhes na Figura 13.

(continua...)

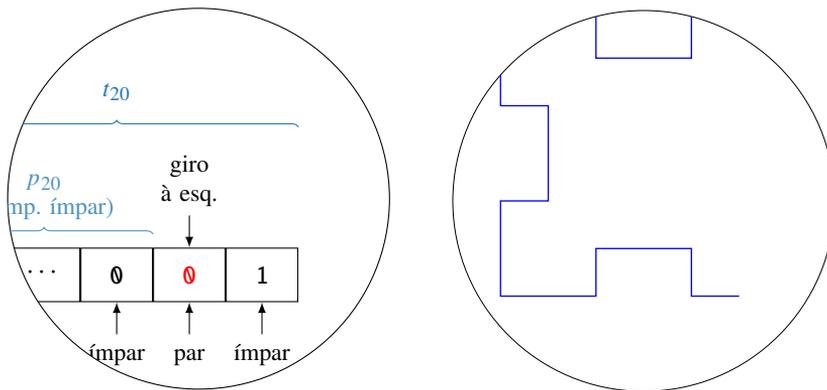


Figura 13: Análise dos últimos dígitos da palavra f_{23}

A seguir, apresentamos algumas relações entre a largura e a altura dos fractais \mathcal{F}_n , ou seja, calculamos a proporção entre duas curvas do mesmo tipo. Para facilitar, trabalhamos apenas com o caso $n \equiv 2 \pmod{3}$, deixando os demais casos para o leitor fazer a verificação de modo análogo, com pequenas adaptações.

Teorema 3. O fator de escala entre \mathcal{F}_n e \mathcal{F}_{n-3} é $1 + \sqrt{2}$.

Demonstração. A figura 14 ilustra \mathcal{F}_{23} e ajuda na dedução do caso geral.

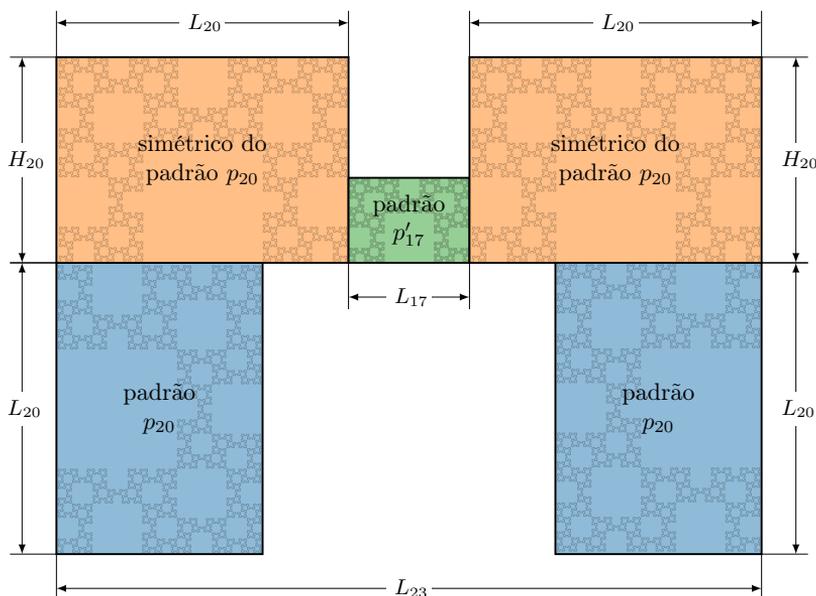


Figura 14: Dimensões do fractal \mathcal{F}_{23}

Em geral, a largura L_n pode ser escrita como

$$L_n = 2L_{n-3} + L_{n-6}. \tag{5}$$

Por outro lado, o fator de proporção ρ entre duas curvas pode ser obtido por meio da razão entre as larguras, ou seja:

$$\rho = \frac{L_n}{L_{n-3}} = \frac{L_{n-3}}{L_{n-6}}.$$

Usando (5) e a igualdade acima, ρ deve satisfazer

$$\begin{cases} \rho L_{n-3} = 2L_{n-3} + L_{n-6}, \\ L_{n-6} = L_{n-3}/\rho, \end{cases}$$

ou seja, ρ deve ser a solução positiva da equação $\rho^2 = 2\rho + 1$, que facilmente se resolve para

$$\rho = 1 + \sqrt{2}. \quad \square$$

Observação 4. Vale lembrar que estamos tratando apenas das **palavras clássicas de Fibonacci**, ou seja, iniciando com $f_1 = 1$ e aplicando o morfismo $0 \mapsto 01, 1 \mapsto 0$. Os padrões que se repetem na Figura 14 dão-nos uma boa noção de que a curva não tem autointerseção, uma vez que as caixas delimitadoras (retângulos coloridos) não se interceptam. Porém, caso o morfismo seja outro, a situação pode mudar, como na curva da Figura 15, obtida utilizando $\sigma : 0 \mapsto 10221, 1 \mapsto 1022, 2 \mapsto 1021$ composto com $\rho : 0 \mapsto 12$.

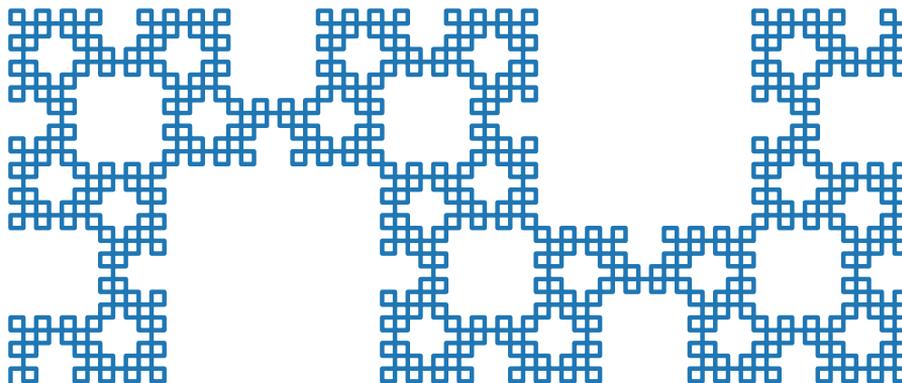


Figura 15: Curva de Fibonacci generalizada com autointerseção

A explicação acima é intuitiva. Um argumento formal, porém avançado, pode ser encontrado em [5, Section 3], onde os autores tratam de curvas mais gerais, que englobam o caso clássico (caso $i = 2$).

A estrutura de \mathcal{F}_{3k+1} . Analogamente ao que fizemos acima, porém de um modo mais sucinto, analisamos como os padrões são produzidos nas curvas desta família. Novamente, por simplicidade, analisamos o caso de f_{22} , cujos dígitos são como na Figura 16. Nela, podemos ver que os dígitos do segundo padrão p_{19} (laranja) ocorrem em posições de paridades alternadas em relação ao primeiro padrão p_{19} (azul). Isso troca todos os giros produzidos pelos 0 e faz com que o segundo padrão desenvolva-se para a esquerda e depois para cima, visualmente se parecendo com um ‘canto inferior esquerdo’, diferentemente do primeiro padrão, que se desenvolve para a direita e depois para cima, parecendo-se com um ‘canto inferior direito’.

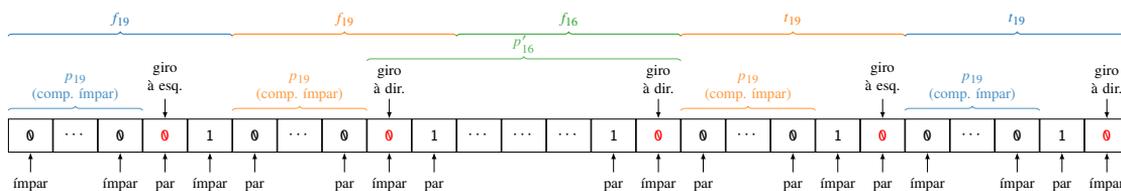


Figura 16: Decomposição de f_{22} em palíndromos

Na Figura 17, vemos os cinco padrões presentes em \mathcal{F}_{22} , com os giros produzidos pelos 0 representados pelas setas. Observe que o segundo padrão (laranja) parece ter sido obtido do primeiro (azul) por meio de uma rotação de 90° no sentido horário. Mas isso não é o caso, pois ele é uma reflexão, como podemos ver mais de perto na parte destacada. Ressaltamos que o trecho destacado em cinza não faz parte da curva, é apenas uma translação do padrão azul e foi criado propositalmente para melhor ilustrar a reflexão mencionada. Note também que o primeiro segmento na junção dos padrões é para o norte, compatível com o fato de que $\text{ang}(f_{19}) = 0^\circ$.

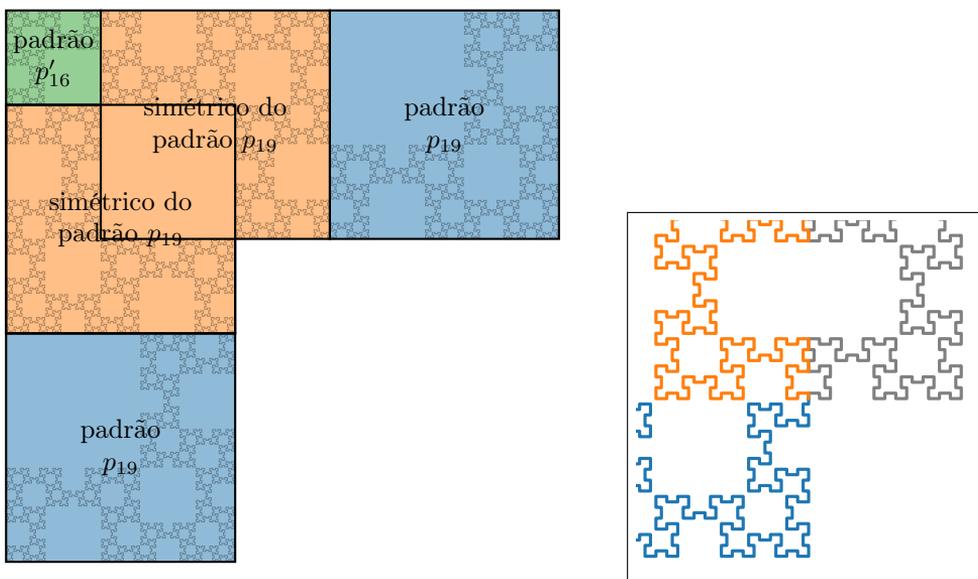


Figura 17: Estrutura da curva \mathcal{F}_{22} , com destaque para a (reflexão na) junção

O próximo passo é a junção do segundo padrão (laranja) com o terceiro padrão (verde), que é produzido pelo fator f_{16} . Mas, como podemos ver na Figura 16, tal fator começa em posição ímpar, e portanto mantém a paridade dos 0 que aparecem em f_{16} . Ou seja, o padrão verde é exatamente uma cópia transladada para o ponto final do padrão laranja, sem sofrer reflexão. Como $\text{ang}(f_{19}f_{19}) = 0^\circ$, então também não há rotação, ou seja, a construção inicia-se para o norte (que foi escolhida como direção inicial). Em resumo, \mathcal{F}_{16} é inserida fielmente naquela posição.

A estrutura de \mathcal{F}_{3k} . As curvas dessa família possuem uma característica peculiar, pois as palavras f_{3k} são de comprimento par, bem como seus palíndromos p_{3k} . Logo, podemos dividir p_{3k} em exatamente

duas partes simétricas, conforme a Figura 18. Destaque para os dois ‘dígitos centrais’, que necessariamente formam o fator 00 , já que devem ser iguais (pela simetria) e 11 nunca ocorre.

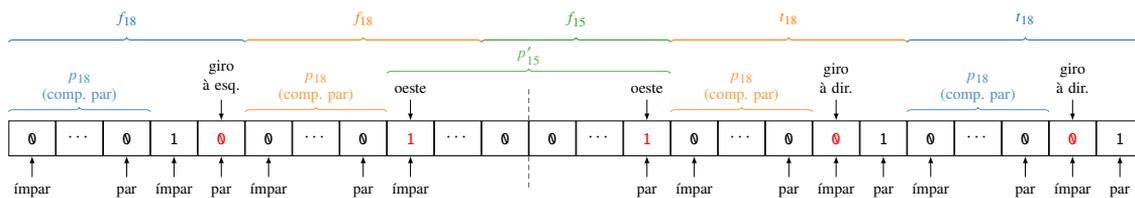


Figura 18: Decomposição de f_{21} em palíndromos

Ainda, se analisarmos o que ocorre no fator central 00 com relação aos giros, este produzirá uma ‘meia volta’, já que são dois 0 consecutivos em paridades diferentes (par-ímpar ou ímpar-par). Portanto, toda a curva construída até a primeira metade será construída de trás para frente na segunda metade, porém após uma rotação de 180° .

As propriedades descritas acima, que são exclusivas das palavras f_{3k} , fazem com que as curvas \mathcal{F}_{3k} tenham uma simetria com relação ao ponto central, conforme mostra a Figura 19.

Os dois primeiros fatores p_{18} estão conectados pelo fator 10 que, como descrito na Figura 18, representa um giro à esquerda. Por outro lado, para os dois últimos fatores, temos um giro à direita.

Por fim, o fator p'_{15} entre os dois fatores p_{18} não sofre a ação de nenhum giro, já que não há fatores que os conectam. Apenas os dígitos 1 nas suas extremidades mantêm as direções, que são oeste. Este último fato pode ser justificado calculando o ângulo resultante $\text{ang}(p_{18}10p_{18}) = \text{ang}(10) = 90^\circ$, pois p_{18} é palíndromo de comprimento par (ver [1, Proposição 4.10]). Assim, temos a resultante ‘norte \rightarrow oeste’.

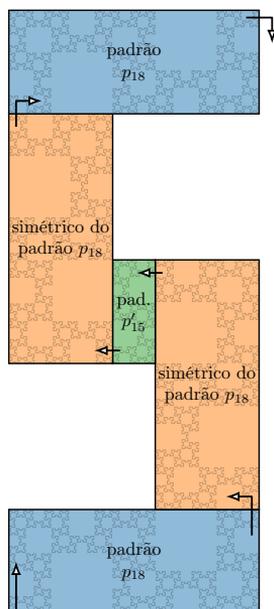
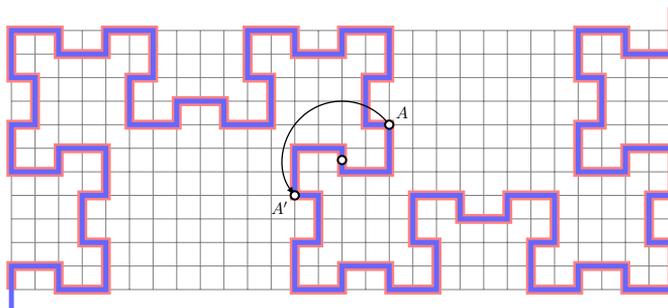
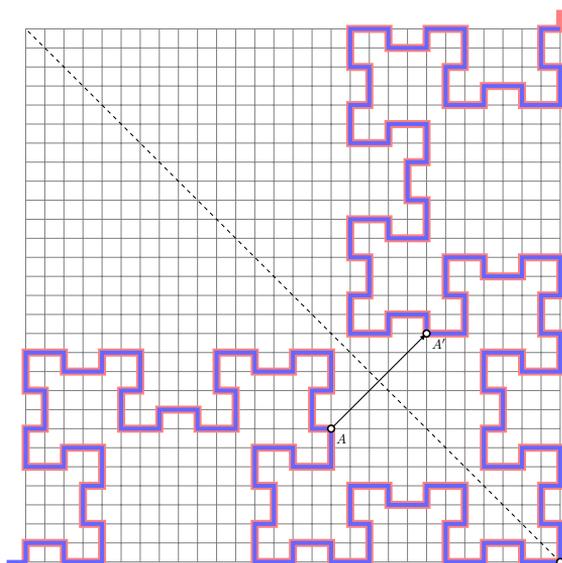


Figura 19: Estrutura da curva \mathcal{F}_{21}

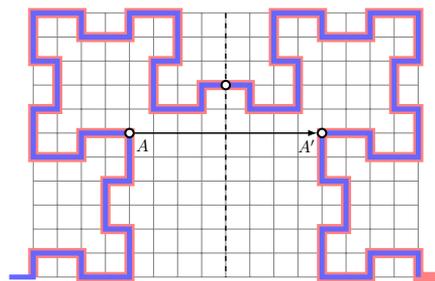
O resultado a seguir resume a discussão acima sobre a estrutura geométrica das curvas \mathcal{F}_n . Optamos por desenhar na Figura 20 a curva e sua versão simétrica, usando duas cores, para evidenciar as propriedades geométricas discutidas.



(a) Família \mathcal{F}_{3k}



(b) Família \mathcal{F}_{3k+1}



(c) Família \mathcal{F}_{3k+2}

Figura 20: Simetrias nas curvas de Fibonacci

Teorema 4. A curva \mathcal{F}_n tem uma simetria central se o número de Fibonacci F_n é par e uma simetria axial, se o número de Fibonacci F_n é ímpar. Mais precisamente: \mathcal{F}_{3k} é simétrica com relação a um ponto central; \mathcal{F}_{3k+1} é simétrica com relação a uma diagonal; \mathcal{F}_{3k+2} é simétrica com relação a uma vertical ou horizontal.

Demonstração. A prova nada mais é do que um resumo do que discutimos anteriormente nesta seção. Primeiramente, lembre que F_n é par se, e somente se, $n = 3k$. As simetrias vêm do fato de $p_n = \phi(f_n)$ ser um palíndromo, cujo comprimento é $F_n - 2$, ou seja, f_n e p_n têm comprimentos de mesma paridade.

Para $n = 3k$, o palíndromo p_n tem comprimento par e com isso a paridade das posições dos dígitos $\mathbb{0}$ não é preservada, ou seja, para cada $\mathbb{0}$ em posição par na primeira metade de p_n , encontramos um $\mathbb{0}$ simétrico em posição ímpar na outra metade, e vice-versa. Isso faz com que a ação tomada pela regra de desenho

par-ímpar da Tabela 2 seja revertida na segunda metade da curva. Temos daí uma simetria central em \mathcal{F}_{3k} , ilustrada na Figura 20a.

Para $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$, os palíndromos e as respectivas curvas possuem comprimento ímpar. Logo, além de um dígito central, os demais dividem-se em dois grupos simétricos, que ocorrem em posições de mesma paridade, ou seja, para cada \emptyset em posição par (resp. ímpar) teremos um \emptyset simétrico igualmente em posição par (resp. ímpar). Com isso, os giros realizados na primeira metade da curva vão se repetir na segunda metade, resultando em uma simetria axial, como mostram as Figuras 20b e 20c. □

Finalizamos este trabalho apresentando um modo de percebermos o comportamento dos três tipos de curvas \mathcal{F}_{3k} , \mathcal{F}_{3k+1} e \mathcal{F}_{3k+2} por meio da análise da variação em x ou y nas coordenadas (x, y) dos pontos que as compõem. Lembramos que os segmentos na respectiva curva são obtidos por meio das direções resultantes de cada dígito da palavra. Se somarmos os vetores diretores fornecidos por cada dígito e analisarmos as componentes horizontal e vertical, podemos perceber se o fractal é “largo”, “alto” ou “quadrado”. Assim, optamos por apresentar aqui esses fenômenos de um modo mais visual, ou seja, a partir do gráfico das variações Δx e Δy . Por exemplo, para $n = 20 \equiv 2 \pmod{3}$, o gráfico de Δx na Figura 21 (direita) possui um eixo de simetria vertical, compatível com o fato da curva \mathcal{F}_{20} avançar para leste e depois para oeste. Já para $n = 18 \equiv 0 \pmod{3}$, os valores de Δx tornam-se maiores que Δy , mostrando que a curva \mathcal{F}_{18} é mais alongada na horizontal do que na vertical.

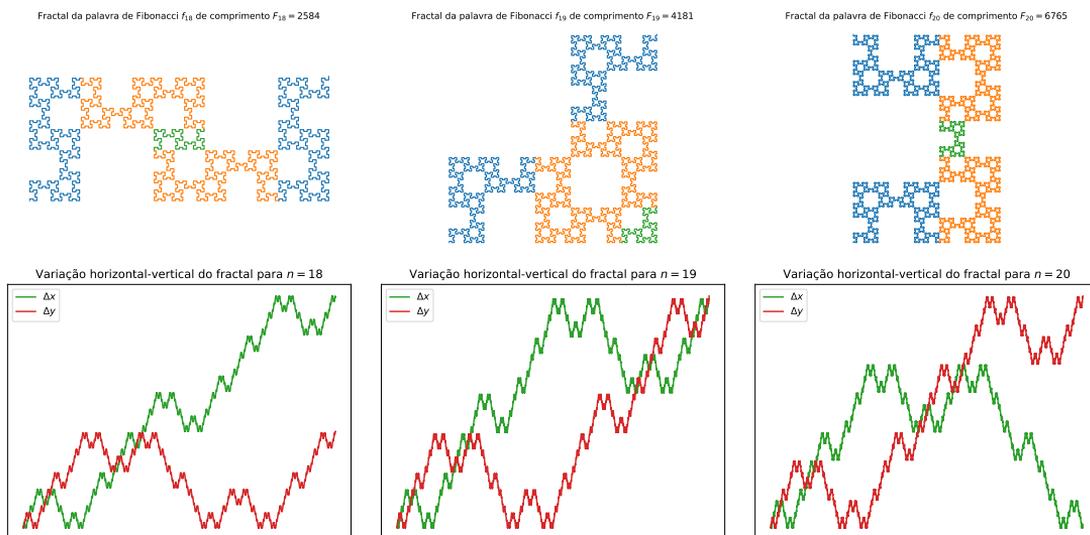


Figura 21: Variações horizontais e verticais das curvas \mathcal{F}_{18} , \mathcal{F}_{19} e \mathcal{F}_{20}

Leituras recomendadas. O leitor que deseja se aprofundar nos conceitos abordados neste texto pode consultar [1, 5, 7, 8], onde encontrará mais fatos surpreendentes sobre as curvas de Fibonacci (inclusive as generalizadas), como, por exemplo, resultados sobre as dimensões da região ocupada pela curva, sobre o fator de escala entre duas curvas de uma mesma família, sobre a razão entre largura e altura, dentre outros. Mais precisamente, as regiões retangulares ocupadas por cada curva possuem sempre a mesma proporção entre largura e altura, que são $1 + \sqrt{2}$, 1 , $\sqrt{2}$, para $n \equiv 0, 1, 2 \pmod{3}$, respectivamente.

Nas referências, também encontrará generalizações dessas curvas, obtidas com outras regras de construção. Enfim, existe uma infinidade de possibilidades a serem exploradas. O interesse no assunto continua crescendo

entre pesquisadores, artistas e *designers*, pois ainda há espaço para muita pesquisa, além disso, pode ser relacionado a várias áreas do conhecimento, como Química, Biologia, Física, Elétrica e Arte.

Agradecimentos. Os autores agradecem ao parecerista pela leitura do texto e pelas sugestões perspicazes.

Referências

- [1] V. D. A. Brogna. Palavras de Fibonacci e seus Fractais, Setembro 2022.
- [2] M. S. Caneiro; K. E. Nobokite; M. A. de A. Fernandes. Três diferentes provas de que as razões entre números consecutivos de Fibonacci convergem para o Número de Ouro. *Professor de Matemática Online*, 11(2):194–204, 2023.
- [3] Fibonacci sequence — Wikipedia, the free encyclopedia. [Online; acessado em 04 de agosto de 2023].
- [4] L. Fibonacci and L. Sigler. *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation Into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer New York, 2002.
- [5] T. Hoffman and B. Steinhurst. Hausdorff Dimension of Generalized Fibonacci Word Fractals, 2016.
- [6] C. Kimberling. The equation $m^2 - 4k = 5n^2$ and unique representations of positive integers. *The Fibonacci Quarterly*, 45(4):304–312, November 2007.
- [7] A. Monnerot-Dumaine. The Fibonacci Word fractal. (hal-00367972), February 2009.
- [8] J. L. Ramírez and G. N. Rubiano. Properties and Generalizations of the Fibonacci Word Fractal. *The Mathematica Journal*, 16:1–25, 2014.

Thiago de Melo
IGCE - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro-SP
<thiago.melo@unesp.br>

Valdirene Dias Arrabal Brogna
IGCE - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro-SP
<val.arrabal2013@gmail.com>

Recebido: 24/08/2023

Publicado: 24/05/2024