PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.12, n.2, 2024
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2024/pmo1215

Introduzindo o conceito de sequências e séries numéricas no ensino de dízimas periódicas

Paulo Henrique Araujo Lima [1] Edvalter da Silva Sena Filho [2]

Resumo

As dízimas periódicas trazem consigo aspectos que costumam gerar dificuldades quanto a sua compreensão. Deste modo, é necessário um olhar diferenciado para esse conteúdo, deixá-lo ao alcance dos alunos, de modo que o discente disponha de diferentes caminhos para a aquisição de tal conhecimento. É possível desenvolver ideias avançadas de convergência de séries mesmo para estudantes do ensino médio e, deste modo, desmistificar e facilitar a compreensão da mesma. Esse trabalho apresenta um olhar diferente para a representação decimal infinita de uma dízima, ao passo que fornece uma proposta pedagógica, à luz do novo Ensino Médio (NEM), tendo como inspiração a teoria de aprendizagem de Jerome Bruner, a qual se baseia num Currículo em Espiral, onde o estudante deve ter a oportunidade de ver o mesmo tópico mais de uma vez, em diferentes níveis de profundidade e em diferentes modos de apresentação. Neste sentido, este trabalho constitui uma ferramenta útil para auxiliar o professor da educação básica no ensino do conteúdo de sequências e séries, bem como no estudo do infinito, assuntos estes implementados mais fortemente pelo NEM e transcritos nas unidades curriculares que compõe as trilhas de aprendizagem e também nas chamadas *disciplinas eletivas*, que também são de escolha do aluno.

Palavras-chave: Dízimas periódicas; Somas no infinito; Séries numéricas.

Abstract

Periodic tithes bring with them aspects that tend to create difficulties in understanding them. In this way, it is necessary to have a different look at this content, to leave it within the reach of the students, so that the student has different paths for the acquisition of such knowledge. It is possible to develop advanced ideas of series convergence even for high school students and, in this way, demystify and facilitate its understanding. This work presents a different look at the infinite decimal representation of a decimal, while providing a pedagogical proposal, in the light of the new High School (NEM), inspired by Jerome Bruner's theory of learning, which is based on a Curriculum in Spiral, where the student should have the opportunity to see the same topic more than once, at different levels of depth and in different modes of presentation. In this sense, this work constitutes a useful tool to assist the basic education teacher in teaching the content of sequences and series, as well as in the study of infinity, subjects that are implemented more strongly by NEM and transcribed in the curricular units that make up the learning trails and also in the so-called *elective disciplines*, which are also chosen by the student.

[1]Parcialmente apoiado pela Funcap
[2]Parcialmente apoiado pela Funcap

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Keywords: Periodic tithes; Sums at infinity; Numerical series

1. Introdução

O estudo das frações e a ideia de infinito, objetos contidos nas dízimas periódicas, costumam gerar certos bloqueios nos estudantes de matemática. Com relação às frações, por exemplo, podemos destacar como um dos fatores de dificuldade o fato de não termos o costume de fracionar em nosso dia a dia, muito pelo contrário, o que fazemos é reduzir à unidade a menor parcela. Por exemplo, ao fatiar uma *pizza* em 10 pedaços (*a priori* a *pizza* seria a unidade), transformamos cada fatia numa nova unidade ao invés de tratar cada pedaço como 1 décimo do todo. Assim, passamos a ter 10 unidades de *pizza*. Todo esse processo é para evitar trabalhar com as frações. O infinito, por sua vez, dispensa apresentações, sempre intrigou a humanidade, possui os mais lindos paradoxos e problemas, como podemos ver em [12], porém por sua complexidade é evitado e pouco abordado, sobretudo na educação básica.

Os alunos durante a sua educação básica vão aos poucos acumulando uma bagagem de dúvidas, questões mal respondidas, mal interpretadas, que não ficaram muito claras e portanto não foram interiorizadas pelos estudantes. É necessário que o professor busque metódos para sanar tais lacunas de aprendizagem, esclarecendo sobretudo os assuntos mais complexos e intrigantes como este - o porquê de uma soma infinita apresentar um resultado finito, um número - isso torna o aprendizado mais acertivo. A quinta competência específica do componente curricular de matemática segundo a BNCC nos aponta que:

> *Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.(Brasil, 2018. p. 165)*

Esse trabalho tem como inspiração a teoria de ensino de Jerome Bruner[3], apresentada em [8], que se baseia na natureza do desenvolvimento intelectual e em uma teoria de ensino que leve em conta este desenvolvimento.

> *Cada etapa do desenvolvimento intelectual é caracterizada por um modo particular de representação, que é a forma pela qual o indivíduo visualiza o mundo e explica-o a si mesmo.(Moreira, 2017. p. 81)*

Abordar o mesmo conteúdo sobre diferentes pespectivas e em níveis diferentes constitui a teoria do currículo em espiral, e dá ao aluno a oportunidade de interiorizar de forma mais efetiva os conceitos e ideias principais do que está sendo estudado, mesmo que o seu nível de complexidade seja muito alto. Este tipo de abordagem diminui essa lacuna entre o ensino menos rigoroso aplicado na educação básica e o ensino extremamente rigoroso aplicado nas universidades. O aluno evolui a cada ciclo de contato com o objeto de estudo, passando de uma abordagem mais superficial para uma abordagem cada vez mais concreta e mais bem definida matematicamente.

[3]Jerome Bruner foi Professor de Psicologia e Diretor do Centro de Estudos Cognitivos da Universidade de Havard

> *Quanto à questão de como ensinar, Bruner destaca o processo da descoberta, pela exploração de alternativas, e o currículo em espiral. Segundo Bruner, "o ambiente ou conteúdos de ensino têm que ser percebidos pelo aprendiz em termos de problemas, relações e lacunas que ele deve preencher, a fim de que a aprendizagem seja considerada significante e relevante. Portanto, o ambiente para a aprendizagem por descoberta deve proporcionar alternativas - resultando no aparecimento e percepção, pelo aprendiz, de relações e similaridades, entre as ideias apresentadas, que não foram previamente reconhecidas..."(Moreira, 2017. p. 82)*

A arte de ensinar exige sempre um empenho de quem está na frente. O uso de analogias, principalmente com histórias, facilita o processo de aprendizagem, pois coloca o conteúdo dentro de uma abordagem mais comprensiva e mais contextualizada com a rotina do aluno. Para Bruner, o que é relevante em uma matéria de ensino são principalmente suas ideias e relações fundamentais, desenfatizando o papel da estrutura. Assim espera-se que este trabalho possa contribuir com alunos e entusiatas da matemática em seus estudos e aprofundamentos, mas sobretudo que constitua um proposta de aula introdutória ao estudo de sequências e séries no ensino básico como norteia o Novo Ensino Médio (NEM).

Este trabalho traz um recorte de uma proposta trabalhada em [7], onde após a total apreciação, o leitor poderá encontrar mais subsidios para aprofundamento da proposta aqui discutida .

2. A lenda do Xadrez

Muitas são as lendas deste tão famoso e aclamado jogo. Porém, dentre tantas, uma destaca-se e deixa o campo das lendas para entrar no terreno da história, como nos narra [11] em seu belíssimo livro, *O que é xadrez*.

Conta-se que certa vez o rei Ladava estava refletindo sobre sua vitória na guerra em que seu exército acabara de travar contra as forças inimigas, na qual seu filho Adjamir fora morto pela flecha adversária. Nesse instante, um homem chamado Lahur Sessa interrompe esse momento para apresenta-lhe um jogo, recém-criado.

-Trago-lhe este tabuleiro dividido em sessenta e quatro quadrados iguais, coloridos de preto e branco de forma intercalada, simbolizando o palco de uma batalha, e aqui as peças que simbolizam os exércitos que vão se digladiar.

Assim, Sessa mostrou o jogo ao rei, que, antecipadamente, aprendia o movimento de cada peça e as regras. Encantado com o jogo, pois ali não era sorte o fator determinante, mas sim a inteligência, e surpreso com a genialidade de seu inventor, disse o rei:

-Este jogo é realmente uma brilhante invenção. Peça a recompensa que quiser que eu mandarei providenciar.

A princípio Sessa recusou qualquer recompensa, alegando mais uma vez não ser aquele o motivo que o levara a criar o jogo, mas diante da insistência do rei, Sessa fez o seguinte pedido:

- Quero que, observada a seguinte proporção, me sejam dados grãos de trigo, ou seja, para o primeiro quadrado do tabuleiro, um grão de trigo, para o segundo, dois, para o terceiro, quatro, para o quarto quadrado, oito grão, para o quinto, dezesseis, e assim sucessivamente até o último quadrado, sempre observando a ordem do dobro de grãos de um quadrado para o outro. O rei mandou o vizir providenciar o trigo, e este mandou que os matemáticos do palácio contassem

Figura 1: Tabuleiro de xadrez

Fonte: Pexels

os grãos da forma como foi proposta pelo inventor. Depois de muita demora os matemáticos apresentaram, quase bestificados, o seguinte número como resultado do cálculo:

Quadro 1: Relação de grãos por quadrado

Quadrado	1°	2°	3°	4°	$\cdots$	64°
Grãos	1	2	4	8	$\cdots$	2^{63}

Fonte: Elaborada pelos autores

Assim, somando os grãos obtidos em cada etapa, Sessa teria um total de:

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615 \text{ grãos de trigo}$$

Era essa a quantidade de grãos de trigo que o rei deveria dar a Sessa para cumprir sua palavra. Em [13] estima-se que em novembro de 2022, o planeta Terra já teria aproximadamente 8 bilhões de habitantes. Ou seja, se a quantia de grãos destinada a Sessa fosse distribuida para todos os habitantes da terra, cada um receberia aproximadamente 1.152.921.504 grãos. Mil grãos de trigo pesa em torno de 40g [5]. Assim, cada habitante teria por volta de 46,12 toneladas de trigo.

Apesar da recompensa de Sessa ser um número "muito grande", ele é limitado. Essa história auxilia na introdução do conceito do Infinito. Uma vez que os alunos deparam-se com as equivalências apresentadas no texto, atualizam sua escala do que seria algo "muito grande", que, por sua vez, faz com que os mesmos fiquem abismados ao saber que a quantia de grãos recebida por Sessa passa a ser algo extremamente pequeno, se comparado com o infinito.

3. Dízimas periódicas

Uma forma de representar os números reais é por meio de expressões decimais. Uma expressão decimal é formada por uma parte inteira e outra decimal.

$$\underbrace{\mathrm{m}}_{\text{parte inteira}} \;,\; \underbrace{\mathrm{a}_1\ \mathrm{a}_2 \ldots \mathrm{a}_\mathrm{n} \ldots}_{\text{parte decimal}} \tag{1}$$

onde $\mathrm{m} \in \mathbb{Z}$ (número inteiro) e $\mathrm{a}_\mathrm{n} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\ \forall\ \mathrm{n} \in \mathbb{N}$. Para cada $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$, chamaremos o dígito a_n como o n-ésimo dígito da expressão decimal.

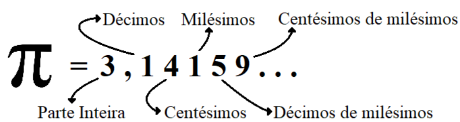
Tabela 1: Valores posicionais

a_1	Décimos
a_2	Centésimos
a_3	Milésimos
a_4	Décimos de milésimos
a_5	Centésimos de milésimos
a_6	Milionésimos

Fonte: Elaborada pelos autores

Na figura 2 apresentaremos a representação decimal dos 5 primeiros digitos, depois da vírgula, do número π.

Figura 2: Número π



Fonte: Elaborada pelos autores

A expressão decimal 1 é chamada de dízima periódica simples, de período $\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2 \ldots \mathrm{a}_\mathrm{p}$, quando os primeiros p dígitos após a vírgula se repetem indefinidamente na mesma ordem. Por exemplo, $0,121212\ldots$ e $0,377377377\ldots$ são dízimas periódicas simples, com períodos 12 e 377 respectivamente.

$$\mathrm{m}\ ,\ \underbrace{\mathrm{a}_1\ \mathrm{a}_2 \ldots \mathrm{a}_\mathrm{p}}_{\text{período}}\ \underbrace{\mathrm{a}_1\ \mathrm{a}_2 \ldots \mathrm{a}_\mathrm{p}}_{\text{período}}\ \underbrace{\mathrm{a}_1\ \mathrm{a}_2 \ldots \mathrm{a}_\mathrm{p}}_{\text{período}}\ \ldots$$

Já uma dízima periódica composta, após a vírgula, inicia com uma parte não periódica e, em seguida, o período. Por exemplo, $0,377121212\ldots$ é uma dízima periódica composta, onde sua parte não periódica é 377 e seu período é 12.

$$\mathrm{m}\ ,\ \underbrace{\mathrm{b}_1\ \mathrm{b}_2 \ldots \mathrm{b}_\mathrm{k}}_{\text{não periódica}}\ \underbrace{\mathrm{a}_1\ \mathrm{a}_2 \ldots \mathrm{a}_\mathrm{p}}_{\text{período}}\ \underbrace{\mathrm{a}_1\ \mathrm{a}_2 \ldots \mathrm{a}_\mathrm{p}}_{\text{período}}\ \ldots$$

Toda dízima periódica representa um número racional $\dfrac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}} \in \mathbb{Q}$, que chamaremos de fração geratriz ou, simplesmente, geratriz. Reciprocamente, todo número racional é representado por uma expressão decimal finita (que acaba em zeros) ou periódica. Desejamos a partir de tal expressão decimal periódica, encontrar o número racional associado. Caso o leitor queira aprofundar os estudos sobre números racionais, sugerimos a leitura de [10].

4. Sequências e Séries Numéricas

Pode-se pensar numa sequência como uma lista de números escritos em uma ordem definida:

$$a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3 \ , \ a_4 \ , \ \ldots \ , \ a_n \ , \ \ldots$$

O número a_1 é chamado primeiro termo da sequência, a_2 é o segundo termo e, em geral, a_n é o n-ésimo termo. Trataremos exclusivamente de sequências infinitas, de modo que cada termo a_n terá um sucessor a_{n+1}. Observe que, para cada inteiro positivo n existe um número correspondente a_n e, dessa forma, uma sequência pode ser definida como uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos. Mas, geralmente, escrevemos a_n em vez da notação de função $a(n) = a_n$ para o valor da função no número n.

Em geral, os alunos da educação básica costumam ter contato com algumas sequências bem importantes e conhecidas, destacaremos algumas delas.

Figura 3: Sequências Numéricas

Sequência de Fibonacci	1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , . . .
	$a_1 = 1\,,\ a_2 = 1\,,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$
Progressões Aritméticas	$a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ a_4\,,\ a_5\,,\ \ldots$
	$a_n = a_1 + (n-1)\,r$
Progressões Geométricas	$a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ a_4\,,\ a_5\,,\ \ldots$
	$a_n = a_1 . q^{(n-1)}$

Fonte: Elaborada pelos autores

Uma sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...a_n, ...)$ pode ser indicada por $(a_n)_{n\geq1}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente (a_n). Dada uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, estamos interessados em reconhecer se os números reais a_n aproximam-se cada vez mais de algum número real L, à medida que o índice n aumenta. Por exemplo, considere a sequência $a_n = \frac{n}{n+1}$. Note, pela tabela 2, que os termos da sequência a_n estão se aproximando de 1 à medida que n se torna grande.

Observe que, para n suficientemente grande, a diferença $\mid a_n - 1 \mid$ será tão pequena quanto se queira, caracterizando assim o limite de uma sequência.

Definição 1. Uma sequência (a_n) tem limite L e escrevemos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Se para todo $\varepsilon > 0$, existir um $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon. \qquad (2)$$

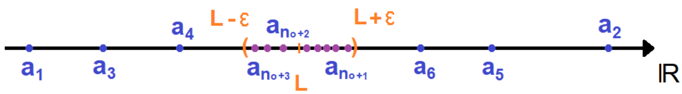
Tabela 2: Aproximações dos termos a_n

n	a_n
1	0,5000000000
4	0,8000000000
16	0,9411764706
64	0,9846153846
256	0,9961089494
1024	0,9990243902
4096	0,9997559190
16384	0,9999389686
65536	0,9999847414

Fonte: Elaborada pelos autores

A definição 1 pode ser ilustrada pela figura 4, na qual os termos a_n são marcados na reta real. Não importa quão pequeno seja escolhido o intervalo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, existe um n_0 tal que todos os termos da sequência de a_{n_0+1} em diante devem estar naquele intervalo.

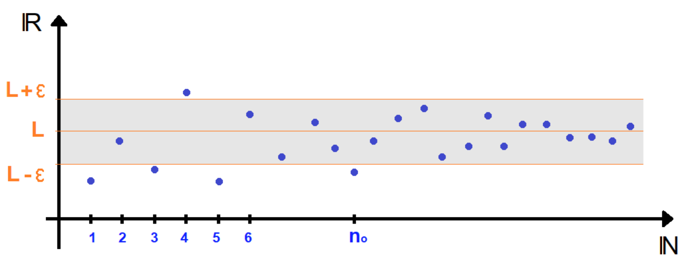
Figura 4: Convergência na reta



Fonte: Elaborada pelos autores

Outra ilustração de definição acima é dada na Figura 5. Os pontos do gráfico de (a_n) devem estar entre as linhas horizontais $y = L+\varepsilon$ e $y = L-\varepsilon$ se $n > n_0$. Quanto menor o ε, maior deve ser o n_0.

Figura 5: Faixa de convergência



Fonte: Elaborada pelos autores

Ao somar os termos de uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, chegaremos na seguinte expressão:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

à qual denominamos série infinita ou apenas série e denotamos pelo símbolo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ou} \quad \sum a_n.$$

A seguir traremos como primeiro exemplo uma demonstração que é fundamental para a aplicação no estudo de dízimas proposto neste trabalho, que pode ser encontrada em [9].

Exemplo 1. Mostre que: $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ quando $|a| < 1$.

Solução: Quando $a = 0$, nada a fazer! Quando $a \neq 0$, temos $\dfrac{1}{|a|} > 1$. Portanto:

$$\frac{1}{|a|} = 1 + \alpha, \text{ para algum } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ onde } \alpha > 0.$$

Elevando ambos os membros a n, temos:

$$\left(\frac{1}{|a|}\right)^n = (1+\alpha)^n.$$

Pela desigualdade de Bernoulli [6], sabemos que:

$$\frac{1}{|a|^n} = (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ logo:}$$

$$\frac{1}{|a|^n} \geq 1 + n\alpha \quad \Rightarrow \quad |a|^n \leq \frac{1}{1+n\alpha}.$$

Como o conjunto dos números naturais é ilimitado superiormente, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que; $\dfrac{1}{1+n_0\alpha} < \varepsilon$. Além disso, para todo $n > n_0$, temos:

$$1 + n_0\alpha < 1 + n\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+n\alpha} < \frac{1}{1+n_0\alpha} \quad \Rightarrow \quad |\, a^n - 0 \,| < \varepsilon.$$

$\square$

Dada uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a partir dela será criada uma nova sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde:

$$s_1 = a_1, \ s_2 = a_1 + a_2, \ \ldots, \ s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Os termos s_n chamam-se as reduzidas ou somas parciais da série $\sum a_n$.

Ao analizarmos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$$

veremos que adicionando termo a termo, obteremos as seguintes somas cumulativas

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1 + 2 &= 3 \\ 1 + 2 + 3 &= 6 \\ \vdots \quad \vdots \quad & \quad \vdots \end{aligned}$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Note que, essa soma se torna grande à medida que n aumenta. Por outro lado, ao analizarmos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \frac{1}{2}\\
\frac{1}{2} + \frac{1}{4} &= \frac{3}{4}\\
\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &= \frac{7}{8}\\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots &\\
\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} &= 1 - \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

Ou seja, quando adicionamos mais e mais termos, essas somas parciais tornam-se cada vez mais próximas de 1. De fato, somando um número suficientemente grande de termos da série, podemos fazer as somas parciais tornarem-se tão próximas quanto quisermos de 1. Assim, parece razoável dizer que a soma dessa série infinita é 1 e escrever:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1.$$

Definição 2. Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de número reais e $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sua reduzida. Se $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ existir, diremos que que a série $\sum a_n$ será convergente. Caso $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ não exista, diremos que a série $\sum a_n$ será divergente.

5. Aplicações

Quando tentamos encontrar a fração geratriz de uma dízima periódica, na verdade estamos procurando o valor de convergência da série que representa essa soma infinita.

$$0,999\underbrace{\ldots}_{\text{no infinito}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$$

As progressões geométricas $(a_1,\ a_1q,\ a_1q^2,\ \ldots,\ a_1q^n,\ \ldots)$ são exemplos de sequências abordadas no ensino médio [4]. Nessa seção, daremos ênfase para a soma dos termos dessa progressão, à qual já trataremos como sequência infinita.

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_1q,\ \ldots,\ s_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1}.$$

Logo, eliminando os casos triviais ($q = 0$ e $q = 1$), temos

$$\begin{aligned}
s_n &= a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}\\
s_nq &= a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n\\
s_nq + a_1 &= a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n\\
s_nq + a_1 &= s_n + a_1q^n\\
s_n &= \frac{a_1 - a_1q^n}{1-q}.
\end{aligned}$$

Assim, quando $|\, q \,| < 1$, temos $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_1 - a_1q^n}{1-q}\right) = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Portanto,

$$0,999\cdots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1.000} + \cdots = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1.$$

A seguir veremos dois exemplos de como tratar as dízimas períodicas à luz do que vimos até agora, ou seja, aplicando conceitos de séries numéricas.

Exemplo 2. Encontre a fração geratriz da dízima $0,666\ldots$ utilizando os conceitos de sequências e séries numéricas.

Solução: Devemos calcular a convergência da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{10^n}$$

Como se trata de uma série geométrica e $q = \dfrac{6}{10}$, sabemos que será convergente. Em outras palavras, existe um limite para a soma:

$$s_n = \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \cdots + \frac{6}{10^n}$$

Então, deste modo, temos:

$$\lim_{x\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{6}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{3}$$

Assim, a fração geratriz da dízima periódica é $\dfrac{2}{3}$, isto é, $0,666\cdots = \dfrac{2}{3}$.

□

Exemplo 3. Encontre a fração geratriz da dízima $2,3171717\ldots$ utilizando os conceitos de sequências e séries numéricas.

Solução: Já sabemos que:

$$2,3171717\cdots = 2 + \frac{3}{10} + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots = 2 + \frac{3}{10} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{17}{10^{2n+1}}.$$

Assim,

$$s_n = \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots + \frac{17}{10^{2n+1}}.$$

Logo,

$$\lim_{x\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{17}{1.000}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{17}{990}.$$

Assim,

$$2\ ,\ 3\ 1\ 7\ 1\ 7\ \cdots = 2 + \frac{3}{10} + \frac{17}{990} = \frac{2x990 + 3x99 + 17}{990} = \frac{2.294}{990}.$$

$\square$

O próximo passo seria generalizar esses resultados. Iniciaremos encontrando a fração geratriz da dízima períodica simples

$$m\ ,\ \underbrace{a_1\ a_2 \ldots a_p}_{\text{período}}\ \underbrace{a_1\ a_2 \ldots a_p}\ \ldots$$

onde $m \in \mathbb{Z}$ e $a_1, a_2, \ldots, a_p \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Note que,

$$\begin{aligned}
m, a_1a_2 \ldots a_p \ldots &= m + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1a_2\ldots a_p}{10^{np}} \\
&= m + \frac{a_1a_2\ldots a_p}{10^p} + \frac{a_1a_2\ldots a_p}{10^{2p}} + \frac{a_1a_2\ldots a_p}{10^{3p}} + \cdots \\
&= m + \frac{\frac{a_1a_2\ldots a_p}{10^p}}{1-\frac{1}{10^p}} \\
&= m + \frac{a_1a_2\ldots a_p}{10^p - 1} \\
&= \frac{m(10^p - 1) + a_1a_2\ldots a_p}{10^p - 1}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$m, a_1a_2 \cdots a_p \cdots = \frac{m(10^p - 1) + a_1a_2\ldots a_p}{10^p - 1}.$$

Por fim, encontraremos a fração geratriz da dízima períodica composta

$$m\ ,\ \underbrace{b_1\ b_2 \ldots b_k}_{\text{não periódica}}\ \underbrace{a_1\ a_2 \ldots a_p}_{\text{período}}\ \underbrace{a_1\ a_2 \ldots a_p}\ \ldots$$

onde $m \in \mathbb{Z}$ e $b_1, \ldots, b_k, a_1, \ldots, a_p \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Veja que,

$$
\begin{aligned}
m, b_1b_2\dots b_k a_1a_2\dots a_p\dots &= m + \frac{b_1b_2\dots b_k}{10^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1a_2\dots a_p}{10^{k+np}} \\
&= m + \frac{b_1b_2\dots b_k}{10^k} + \frac{a_1a_2\dots a_p}{10^{k+p}} + \frac{a_1a_2\dots a_p}{10^{k+2p}} + \cdots \\
&= m + \frac{b_1b_2\dots b_k}{10^k} + \frac{\frac{a_1a_2\dots a_p}{10^{k+p}}}{1-\frac{1}{10^p}} \\
&= m + \frac{b_1b_2\dots b_k}{10^k} + \frac{a_1a_2\dots a_p}{10^k(10^p-1)} \\
&= \frac{m10^k(10^p-1) + (10^p-1)b_1b_2\dots b_k + a_1a_2\dots a_p}{10^k(10^p-1)}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
m, b_1b_2\dots b_k a_1a_2\dots a_p\dots = \frac{m10^k(10^p-1) + (10^p-1)b_1b_2\dots b_k + a_1a_2\dots a_p}{10^k(10^p-1)}.
$$

Considerações Finais

O Novo Ensino Médio (NEM) traz muitas mudanças e muitos desafios para a implementação de toda a sua proposta inovadora e voltada para o mundo atual, com suas tecnologias e seu ritmo diferenciado. Assim, foram desenvolvidas novas formas de organização dos conteúdos, das competências e das habilidades.No documento de referência curricular do Estado do Ceará [2], foram estabelecidas Unidades Curriculares (UC) que compõem as trilhas de aprendizagem, visando dar aos alunos a oportunidade de estudar conteúdos mais voltados para uma área de sua escolha, possivelmente a área que deverá seguir futuramente.

De acordo com o Ministério da Educação (MEC) [1] os Itinerários Formativos (IF) configuram "cada conjunto de unidades curriculares ofertadas pelas instituições e redes de ensino que possibilitem à/ao aluna/o aprofundar seus conhecimentos" nas áreas de Linguagens e suas Tecnologias; Ciências Humanas e Sociais Aplicadas; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias e Formação Técnica e Profissional, conforme as novas Diretrizes Nacionais para o Ensino Médio . O conteúdo abordado neste artigo, bem como sua forma de concepção justificam-se pela atual inserção dessas unidades curriculares.

Nas trilhas de aprendizagem do estado do Ceará, como a Unidade Curricular 43: *Um passeio pelo Infinito* que compõe o Eixo estruturante: "Investigação Científica", pertencente à trilha de aprofundamento: "Os Algarismos na História", a qual traz como objetivo estudar a concepção de infinito, a partir de uma síntese do contexto histórico, desde suas origens, abordando de modo panorâmico a história das ideias filosóficas que tratam desse conceito. Propõe-se também, um estudo das definições apresentadas pela matemática sobre a ideia de infinito. E como objetos do conhecimento: conjuntos, conjuntos numéricos, funções e sequências. Evolução histórica do infinito, infinito potencial, infinito atual, cardinalidade, sequências e séries, aplicações, onde pode ser visto em [3].

Espera-se que a proposta pedagógica apresentada neste trabalho possa servir de apoio à construção de ideias e metodologias para professores que irão ministrar tais conteúdos em disciplinas eletivas no NEM, uma vez que esses assuntos não são abordados com tanta frequência no ensino de matemática básica. Deste modo os resultados aqui apresentados, bem como sua forma de organização e apresentação, constituem uma nova perspectiva de trabalhar conceitos complexos de modo mais assertivo, deixando claro a necessidade de abordarmos tais conteúdos o mais cedo possível na educação básica, é claro, respeitando o nível intelectual no qual se encontra o educando.

Agradecimentos

Agradecer o apoio financeiro da Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Funcap) ao projeto Mestrados Profissionalizantes para a Qualificação da Educação Básica, ofertado em parceria pela Universidade Federal do Ceará (UFC) e Secretaria da Educação do Estado do Ceará (Seduc).

Referências

[1] Brasil. *Base Nacional Comum Curricular*. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em 07 de fevereiro de 2023.

[2] Ceará. *Documento Curricular Referencial do Ceará: educação infantil e ensino fundamental. Fortaleza: SEDUC*. Disponível em: <https://www.seduc.ce.gov.br/wp-content/uploads/sites/37/2022/01/dcrc_completo_v14_09_2021.pdf>. Acesso em 07 de fevereiro de 2023.

[3] Ceará. *Catálogo - Trilhas de Aprofundamento: novo ensino médio. Fortaleza: SEDUC*. Disponível em: <https://www.seduc.ce.gov.br/wp-content/uploads/sites/37/2023/01/trilhas_de_aprofundamento_nem1.pdf>. Acesso em 19 de fevereiro de 2023.

[4] Dante, L. R. *Contexto e Aplicações. Vol. 1*. São Paulo: Atica, 2013.

[5] Embrapa. *Cultivares de Trigo para o Cerrado*. Disponível em: <https://www.embrapa.br/documents/1355008/0/Folder+cultivares+Trigo>. Acesso em 09 de fevereiro de 2023.

[6] Kwessi, E.; Kermausuor, S.; Souza, G. *Algumas desigualdades úteis e o teste da segunda derivada*. Professor de Matemática Online. v.8, n.3, Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo838>. 2020.

[7] Lima, P. H. A. *Dissertação de Mestrado - Uma estratégia didática para o ensino de dízimas periódicas através de sequências e séries numéricas*. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=7232&id2=171057218>. Sobral-CE, 2023.

[8] Moreira, M. A. *Teorias de Aprendizagem*. 2. ed. ampli. - [Reimpr.]. - São Paulo : E.P.U., 2017.

[9] Neto, A. C. M. *Fundamentos de Cálculo.Coleção PROFMAT.*. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[10] Niven, I. *Números Racionais e Irracionais, Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, Sociedade Brasileira de Matemática*. Rio de Janeiro, 1984.

[11] Santos, P. S. dos. *O que é Xadrez*. Brasiliense, 2017.

[12] Santos, T. S. L. *O conceito de Infinito: uma abordagem a partit da resolução de problemas*. Dissertação em Matemática. Universidade Federal da bahia (UFBA), 2015.

[13] Sousa, R. *Mundo chega a 8 bilhões de habitantes com população idosa em crescimento*. CNN Brasil. Disponível em: <https://www.cnnbrasil.com.br/internacional/mundo-chega-a-8-bilhoes-de-habitantes-com-populacao-idosa-em-crescimento/>. Acesso em 08 de fevereiro de 2023.

Paulo Henrique Araujo Lima
Universidade Estadual do Ceará - UECE
<paulohenriquelog@hotmail.com>

Edvalter da Silva Sena Filho
Universidade Estadual Vale do Acaraú - UVA
<edvalter_silva@uvanet.br>

Recebido: 12/03/2023
Publicado: 12/09/2024