PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.12, n.2, 2024
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2024/pmo1217

Uma forma criativa de se multiplicar por 9

Enzo Gouvea de Oliveira Pimenta   Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma forma interessante e criativa de se multiplicar por 9 números dados pela repetição de apenas um mesmo algarismo. Sua demonstração envolve a decomposição de um número como soma de potências de 10, bem como a utilização do Princípio da Indução Finita. Por fim, como corolário do resultado principal, é apresentada uma regra que facilita resolver multiplicações por $n \in \{2, 3, ..., 9\}$, de números dados pela repetição do algarismo 9.

Palavras-chave: Base decimal; Regras de multiplicação; Princípio da Indução Finita.

Abstract

In this work, we present an interesting and creative form of getting multiplications of 9, by numbers given as the repetition of the very same digit. Its proof involves a decomposition of the number as sums of powers of 10, as well as the Principle of Finite Induction. As a corollary of the main result, it is also presented a rule that makes easier to calculate multiplications by $n \in \{2, 3, ..., 9\}$, of a number given as the repetition of the digit 9.

Keywords: Decimal base; Multiplication rules; Principle of Finite Induction.

1. Introdução

Neste trabalho, enunciamos e demonstramos dois teoremas, os quais versam sobre maneiras rápidas e criativas para efetuar certas multiplicações. No primeiro deles, apresentamos uma regra que permite efetuar rapidamente a multiplicação por 9, de um número formado apenas pela repetição de um mesmo algarismo. Mais especificamente:

Teorema 1. *Seja* $n \in \{2, 3, ..., 9\}$ *e consideremos o número* x*, dado pela repetição do algarismo* n*, em uma quantidade de vezes* $i \in \mathbb{N}$ *, ou seja*

$$x = \underbrace{nn...n}_{i \ \textit{vezes}} .$$

Se $n.9 = a.10 + b.1$, *então*

$$x.9 = a \quad \underbrace{99...9}_{(i-1) \ \textit{vezes}} \quad b.$$

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Vale observar que no resultado acima estamos convencionando que $0 \notin \mathbb{N}$, ou seja, que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

Para deixar mais clara a utilização do teorema anterior, apresentamos a seguir alguns exemplos:

- Seja $x = 77.777.777$. Neste caso, x é dado pela repetição do algarismo 7, oito vezes. Dessa forma, pelo Teorema 1, como $7.9 = 63$, segue que

$$x.9 = 699.999.993.$$

- Seja $x = 44.444$. Neste caso, x é dado pela repetição do algarismo 4, cinco vezes. Dessa forma, pelo Teorema 1, como $4.9 = 36$, segue que

$$x.9 = 399.996.$$

Acreditamos que o teorema anterior ofereça uma maneira rápida e criativa de efetuar certos tipos de multiplicação. Mais que isso, como veremos na próxima seção, a sua demonstração usa fortemente a decomposição de um número em base decimal, assim como o Princípio de Indução Finita. Dessa forma, sua demonstração constitui-se em um excelente exercício para alunos de graduação em Matemática, ou mesmo para aqueles de ensino fundamental e médio, familiarizados com os conteúdos da Obmep.

No mesmo espírito do resultado anterior, nesse trabalho apresentamos também um segundo teorema, que de fato consiste em um corolário do primeiro. Mais especificamente, esse permite realizar rapidamente multiplicações de números formados apenas pela repetição do algarismo 9.

Teorema 2. *Seja* $n \in \{2, 3, ..., 9\}$ *e consideremos o número* x*, dado pela repetição do algarismo* 9*, em uma quantidade de* $i \in \mathbb{N}$ *vezes, ou seja*

$$x = \underbrace{99...9}_{i \text{ vezes}}.$$

Se $n.9 = a.10 + b.1$*, então*

$$x.n = a \underbrace{99...9}_{(i-1) \text{ vezes}} b.$$

Para facilitar a compreensão do enunciado do teorema anterior, vejamos alguns exemplos de aplicação:

- Seja $x = 999.999$. Neste caso, x é dado pela repetição do algarismo 9, seis vezes. Dessa forma, pelo Teorema 2, se $n = 8$, como $8.9 = 72$, segue que

$$x.8 = 7.999.992.$$

- Seja $x = 99.999.999$. Neste caso, x é dado pela repetição do algarismo 9, oito vezes. Dessa forma, pelo Teorema 2, se $n = 3$, como $3.9 = 27$, segue que

$$x.3 = 299.999.997.$$

Vale ressaltar que os padrões presentes nos dois resultados anteriores partiram da observação do autor Enzo Pimenta, o qual, aos 12 anos, durante suas aulas de Kumon, notou esse interessante fenômeno. Quando incitado a elaborar uma prova de tais fatos, este apresentou os principais *insights* das demonstrações, carecendo apenas da orientação de alguém que conhecesse a linguagem matemática com mais profundidade, bem como a necessidade de introdução de um argumento baseado no Princípio da Indução Finita. Dessa forma, pode-se dizer que tal demonstração foi elaborada a quatro mãos, com a participação crucial do primeiro autor na apresentação da parte principal do argumento.

2. Demonstração dos resultados principais

Antes de apresentar as demonstrações dos resultados anteriores, para tornar esse trabalho autocontido, relembremos algumas definições sobre Álgebra Elementar, bem como o enunciado do chamado Princípio da Indução Finita. Para mais detalhes sobre essa poderosíssima ferramenta matemática, recomendamos aos interessados consultar o trabalho [1], onde o Professor Abramo Hefez aborda o tema preocupando-se com o ponto de vista tanto dos alunos dos ensino fundamental e médio, quando dos seus professores.

Definição 1. Uma sentença aberta indexada em $\mathbb{N}$, é uma função propositional $P(\cdot)$, que atribui a cada natural n, a proposição $P(n)$, a qual tem valor lógico verdadeiro ou falso.

Teorema 3 (Princípio da Indução Finita)**.** *Seja $P(\cdot)$ uma sentença aberta indexada em $\mathbb{N}$. Seja $i_0 \in \mathbb{N}$ e suponhamos que:*

i) $P(i_0)$ *seja verdadeira;*

ii) *Dado $k \in \mathbb{N}$, $k \geq i_0$, se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ é verdadeira.*

Então $P(i)$ é verdadeira para todo $i \geq i_0$.

O teorema anterior, de fato, é implicado por um dos axiomas fundamentais da construção do conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, chamados de Axiomas de Peano. Para mais detalhes sobre a construção do conjunto dos números naturais, ver [2]

Como veremos, uma vez que nossos enunciados estão baseados na validade de uma proposição indexada em $i \in \mathbb{N}$, faz-se necessário usar desse importante resultado em suas demonstrações. Vamos então à demonstração do nosso primeiro resultado principal.

Demonstração do Teorema 1. Seja $n \in \{2, 3, ..., 9\}$ e $n.9 = a.10 + b.1$ fixados tal como no enunciado. Primeiramente, por simples verificação, para cada valor possível de $n \in \{2, 3, ..., 9\}$, observa-se que

$$9 = a + b. \tag{1}$$

Dado $i \in \mathbb{N}$, consideremos a seguinte sentença aberta

- $P(i)$: Seja

$$x = \underbrace{nn...n}_{i \text{ vezes}}.$$

Então

$$x.9 = a\underbrace{99...9}_{(i-1)}b.$$

Verifiquemos agora as hipóteses do Princípio da Indução Finita. Por hipótese, note que $P(1)$ é verdadeira. De fato, nesse caso, como $x = n$, então $x.9 = n.9 = ab$, onde o algarismo n repetiu-se $i-1 = 0$ vezes.

Seja $k \in \mathbb{N}$ e suponhamos agora que $P(k)$ seja verdadeira, ou seja, que

$$x = \underbrace{nn...n}_{k \text{ vezes}} = n.10^{k-1} + n.10^{k-2} + ... + n.10^2 + n.10 + n$$

e

$$x.9 = a\underbrace{99...9}_{(k-1)}b. \tag{2}$$

Verifiquemos que $P(k+1)$ é verdadeira. Seja então

$$y = \underbrace{nn...n}_{(k+1) \text{ vezes}} = n.10^k + n.10^{k-1} + ... + n.10^2 + n.10 + n.$$

Então, por (1) e (2), temos que

$$\begin{aligned}
y.9 &= \left(n.10^k + n.10^{k-1} + ... + n.10^2 + n.10 + n\right).9 \\
&= n.9.10^k + \left(n.10^{k-1} + n.10^{k-2} + ... + n.10 + n\right).9 \\
&= (a.10 + b).10^k + x.9 \\
&= (a.10 + b).10^k + \left(a.10^k + 9.10^{k-1} + 9.10^{k-2} + ... + 9.10 + b\right) \\
&= a.10^{k+1} + (a + b).10^k + 9.10^{k-1} + 9.10^{k-2} + ... + 9.10 + b \\
&= a\underbrace{99...9}_{k \text{ vezes}}b,
\end{aligned}$$

o que implica que $P(k+1)$ é verdadeira.

Assim, pelo Teorema 3 (Princípio da Indução Finita), segue que $P(i)$ é verdadeira para todo $i \in \mathbb{N}$, o que finaliza esta demonstração. □

Agora, apresentamos a demonstração do nosso segundo resultado principal. Essa, tal como no primeiro, poderia ser apresentada de forma baseada na utilização do Princípio da Indução Finita, utilizando-se de argumentos muito semelhantes. Porém, a apresentaremos aqui como sendo uma consequência direta do primeiro resultado.

Demonstração do Teorema 2. Seja $n \in \{2, 3, ..., 9\}$ e $n.9 = a.10 + b.1$ fixados tal como no enunciado.

Dado $i \in \mathbb{N}$, consideremos

$$x = \underbrace{99...9}_{i \text{ vezes}}.$$

Observe então que

$$\begin{aligned} x.n &= \left(9.10^{i-1} + 9.10^{i-2} + \ldots + 9.10 + 9\right).n \\ &= 9.n.10^{i-1} + 9.n.10^{i-2} + \ldots + 9.n.10 + 9.n \\ &= \left(n.10^{i-1} + n.10^{i-2} + \ldots + n.10 + n\right).9 \\ &= y.9, \end{aligned}$$

onde

$$y = \underbrace{nn\ldots n}_{i \text{ vezes}}.$$

Assim, pelo Teorema 1, segue que

$$x.n = y.9 = a \underbrace{99\ldots 9}_{(i-1) \text{ vezes}} b.$$

Isso, por sua vez, finaliza a demonstração do resultado. □

Agradecimentos

Durante a elaboração desse trabalho, o primeiro autor participou do Programa de Iniciação Científica Jr., PIC Obmep, desenvolvido na FCT - Unesp, *câmpus* de Presidente Prudente, ao qual agradece profundamente.

Referências

[1] Hefez, A. *Indução matemática.* Apostila Obmep, Impa, Rio de Janeiro, 2007.

[2] Lima, E. L.. *Análise Real, Volume 1.* Coleção Matemática Universitária, Impa, Rio de Janeiro, 2004.

Enzo Gouvea de Oliveira Pimenta
Colégio Átomo, Presidente Prudente - SP
<enzogouveapimenta@gmail.com>

Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta
Departamento de Matemática e Computação, FCT - Unesp
Rua Roberto Simonsen, 305
19060-900, Presidente Prudente - SP
<marcos.pimenta@unesp.br>

Recebido: 15/03/2024
Publicado: 25/09/2024