


Compartilhando práticas com os pacotes gráficos LaTeX ‘Animate’ e ‘TikZ’ na educação matemática elementar

Flank D. M. Bezerra ¹ 

Resumo

Neste trabalho compartilhamos práticas com os pacotes gráficos \LaTeX ‘Animate’ e ‘TikZ’ na educação matemática elementar. Para fixar nossas atenções elencamos alguns resultados explorados no ensino de Matemática na Educação Básica, como o teorema de Pitágoras, lei dos senos, lei dos cossenos, relação fundamental entre as funções seno e cosseno, bem como desigualdades e igualdades elementares.

Palavras-chave: Animações; Animate; cosseno; LaTeX; Matemática elementar; Pitágoras; seno; TikZ.

Abstract

In this work, we share practices with the \LaTeX graphics packages ‘Animate’ and ‘TikZ’ in elementary mathematics education. We list some results explored in the teaching of Mathematics in Basic Education, such as the Pythagorean theorem, the law of sines, the law of cosines, the fundamental relationship between the sine and cosine functions, as well as elementary inequalities and equalities.

Keywords: animations; animate; cosine; LaTeX; elementary mathematics; Pythagoras; sine; TikZ.

1. Introdução

Tem sido cada vez maior o número de plataformas de *streaming* e redes sociais com páginas, contas e/ou canais dedicados ao compartilhamento de figuras e animações de conceitos, definições e resultados relacionados com Matemática. Tais páginas, contas e canais têm relativamente um alto número de assinantes e/ou seguidores, e isso pode exemplificar o quanto as pessoas têm se mostrado interessadas nestas práticas. Uma pergunta frequente, nos espaços destinados a comentários nestas publicações é sobre o processo de produção destas práticas, e o que podemos perceber é que muitas vezes tais perguntas permanecem sem respostas. Com estas notas, o nosso objetivo é apresentar uma resposta a essas perguntas usando uma ferramenta simples: os pacotes gráficos \LaTeX ‘Animate’ e ‘TikZ’.

¹Parcialmente apoiado pelo CNPq/Finance Code # 303039/2021-3

O sistema de preparação de documentos $\text{T}_{\text{E}}\text{X}/\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ tem se consolidado como uma das principais ferramentas de edição de documentos acadêmico-científicos, e a produção desses textos em $\text{T}_{\text{E}}\text{X}/\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ vem com o passar do tempo sendo cada vez mais aprimorada, e isso se dá pela riqueza qualitativa e quantitativa de pacotes $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ disponíveis hoje na literatura especializada, veja por exemplo, [5].

Neste artigo exploraremos de pacote gráfico $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ ‘PGF/TikZ’ para apresentar animações sobre resultados relacionados ao Teorema de Pitágoras, veja [6] e [12]. Além de apresentar as animações, também disponibilizamos todos os comandos TikZ/ $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ necessários para a produção dessas animações. Embora as animações aqui reproduzidas já possam ser encontradas na literatura, páginas em redes sociais e nas plataformas de *streams*, veja por exemplo [11]. Acreditamos que este é o primeiro trabalho com exposições dos códigos TikZ/ $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ para animações dessa natureza. Assim, com este trabalho promovemos um fácil acesso (já que animações podem ser acessadas no próprio texto, desde que o leitor de texto em PDF seja, por exemplo, o Adobe Acrobat Reader), reprodução e até mesmo edição.

Destacamos que tanto professores como alunos podem assumir um protagonismo quando se trata de confecção, reprodução e edição de animações usando os pacotes gráficos $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ ‘Animate’ e ‘TikZ’. Ao consultar animações disponíveis em páginas em redes sociais e nas plataformas de *streams*, um questionamento recorrente é sobre o processo de edição desses trabalhos. Aqui, apresentamos uma resposta a esses questionamentos.

Cabe também destacar que ao compartilharmos os códigos $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ estamos promovendo o protagonismo do aluno no processo de ensino e aprendizagem já que a reprodução, compartilhamento e edição dos projetos TikZ/LaTeX podem ser também realizados por ele. Quanto à literatura especializada, as nossas principais motivações foram artigos [1, 2, 7, 8, 13] sobre o uso do *software* GeoGebra e Python como recursos computacionais no ensino de Matemática. Bem como, trabalhos que tratam da animações como recursos didáticos no ensino das ciências de modo geral, como [9], [10] e [14].

Caso o leitor sinta necessidade de uma exposição com mais riqueza de informações sobre os pacotes gráficos $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ ‘Animate’ e ‘TikZ’, recomendamos fortemente consultar os manuais oficiais dos pacotes gráficos $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ ‘Animate’ e ‘TikZ’, em [6] e [12], respectivamente; bem como, a página do CTAN [5].

Aos nossos olhos, uma das principais vantagens em produzir animações usando apenas os pacotes gráficos $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ ‘Animate’ e ‘TikZ’ em editor de texto $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ é a praticidade do seu uso, compartilhamento, edição (se necessário) e publicação. Aqui, temos o propósito de sermos o mais econômicos possível na declaração de pacotes $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, entendendo que essa prática pode levar a uma rápida e fácil compreensão dos elementos $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ explorados. O leitor perceberá nas seções seguintes que recomendamos apenas o uso de dois pacotes $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$; a saber, o ‘Animate’ e o ‘TikZ’. A classe $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ que adotaremos aqui é a ‘beamer’ e o editor/compilador de textos $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ é a plataforma *online* ‘Overleaf’ <https://pt.overleaf.com/project>.

A visualização matemática é o processo central que temos em mente aqui. Segundo Lima e Mathias, “[...] o ato de visualizar envolve um complexo processo de terminações nervosas, mas existem também outros tipos de processos que estão atrelados a esta palavra, de modo que não possuem relação somente com o que se sabe sobre a ação de enxergar”, veja [8].

O presente artigo está estruturado da seguinte forma. Na Seção 2 tratamos sobre leitores de texto PDF e sistemas operacionais capazes de reproduzir as animações disponibilizadas aqui, e finalmente na Seção 3 elencamos exemplos de animações associadas com o teorema de Pitágoras, lei dos senos,

lei dos cossenos, relação fundamental entre as funções seno e cosseno, bem como desigualdades e igualdades elementares no ensino de Matemática na Educação Básica.

2. Ferramentas

Para o funcionamento adequado das animações presentes neste texto recomendamos um dos seguintes leitores de texto PDF:

- Adobe Acrobat Reader (<https://get.adobe.com/br/reader/>);
- KDE Okular (<https://okular.kde.org/pt-br/>);
- PDF-XChange (<https://pdf-xchange.eu/pdf-xchange-editor/>);
- Foxit PDF Reader (<https://www.foxit.com/pt-br/pdf-reader/>).

Abaixo, veja Tabela 1, listamos a combinação adequada entre leitores de texto PDF e sistemas operacionais, a fim de termos um funcionamento adequado das animações presentes neste texto.

Leitor/Sistemas	Linux	MacOS	Windows
Adobe Acrobat Reader		ok	ok
KDE Okular	ok		ok
PDF-XChange			ok
Foxit PDF Reader		ok	ok

Tabela 1: ok: reproduz a animação

Veja também [4, Tabela 1].

O pacote gráfico \LaTeX 'PGF/TikZ' desenvolvido por Till Tantau, veja [12], é um poderoso recurso de macros para a criação de inúmeros tipos de gráficos, facilitando a forma de inserção destes elementos no texto em elaboração. O acesso aos recursos é obtido com a inclusão do comando para uso de pacotes inseridos no preâmbulo do documento em elaboração, através do comando

```
\usepackage{tikz}.
```

3. Práticas com os pacotes gráficos \LaTeX 'Animate' e 'TikZ'

Para todos os casos mencionados abaixo, recomendamos ao leitor que desejar reproduzir as figuras e animações relacionados, usar o seguinte preâmbulo em seu editor de texto \LaTeX .

```
\documentclass{beamer}
\usepackage{tikz}
\usepackage{animate}
```

3.1. Teorema de Pitágoras

Todas as animações fornecidas abaixo estão relacionadas ao Teorema de Pitágoras. Por uma questão de completude, lembramos o teorema, abaixo.

Teorema 1 (Teorema de Pitágoras). *Em qualquer triângulo retângulo com hipotenusa medindo c u.m. e catetos medindo a e b u.m., conforme a Figura 1 abaixo, vale a seguinte identidade*

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

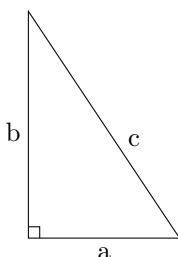


Figura 1: Triângulo retângulo

Nos exemplos seguintes apresentamos figuras e animações que podem ajudar o estudante a melhor compreender resultados relacionados ao Teorema de Pitágoras 1.

Exemplo 1. Considere um quadrado com lado medindo $a + b$ u.m., conforme a Figura 2 abaixo.

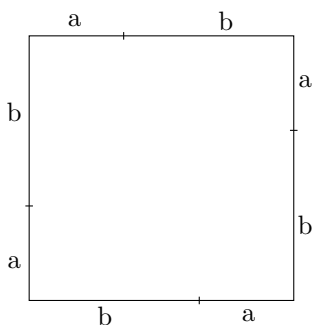


Figura 2: Quadrado com lado medindo $a + b$ u.m.

Considere também um triângulo retângulo com hipotenusa medindo c u.m. e catetos medindo a e b u.m., conforme a figura 1.

A animação que disponibilizamos abaixo pode ser usada para melhor compreender o Teorema de Pitágoras.

A animação da Figura 3 mostra um quadrado de lado $a+b$ u.m., cuja área demilitada pelo quadrado ora é formada por quatro triângulos retângulos com hipotenusa medindo c u.m. e catetos medindo

Figura 3: Animação com quadrado de lado $a + b$ u.m.

a e b u.m., e um quadrado de lado c u.m.; ora formada por dois retângulos de lados a e b e dois quadrados, um quadrado de lado a u.m., e quadrado de lado b u.m.

Abaixo, apresentamos o conjunto de elementos $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ capazes de gerar a animação da Figura 3.

```

\begin{figure}
\centering
\begin{animateinline}[controls]{3}
\multiframe{6}{r=0+0.2}{
\begin{tikzpicture}
\draw(0,0)rectangle (3.5,3.5);
\filldraw[magenta,opacity=0.4,shift={(0,-1.240*\r)}] (0,1.25)--(0,3.5)
--(1.25,3.5)--cycle;
\filldraw[magenta,opacity=0.4,shift={(-2.240*\r,0)}] (2.25,0)--(3.5,0)
--(3.5,2.25)--cycle;
\filldraw[green,opacity=0.4,shift={(1.240*\r,2.240*\r)}] (0,0)--(0,1.25)
--(2.25,0)--cycle;
\filldraw[green,opacity=0.4] (3.5,2.25)--(3.5,3.5)--(1.25,3.5)--cycle;
\draw(0.6,3.7)node{\$a\$};
\draw(-0.2,0.5)node{\$a\$};
\draw(2.9,-0.2)node{\$a\$};
\draw(3.65,2.9)node{\$a\$};
\draw(2.6,3.7)node{\$b\$};
\draw(-0.2,2.5)node{\$b\$};
\draw(1,-0.2)node{\$b\$};
\draw(3.65,1)node{\$b\$};
\end{tikzpicture}
\end{animateinline}
\end{figure}

```

Exemplo 2. Considere um triângulo retângulo com hipotenusa medindo c u.m. e catetos medindo a e b u.m., conforme a Figura 1. A animação que disponibilizamos abaixo pode ser usada para melhor compreender o Teorema de Pitágoras.

Figura 4: Triângulo retângulo e quadrados

A animação da Figura 4 mostra um quadrado de lado c u.m., cuja área é igual a c^2 u.a. Também, mostra que esse mesmo quadrado possui área igual $a^2 + b^2$ u.a.

Abaixo, apresentamos o conjunto de elementos $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ capazes de gerar a animação da Figura 4.

```

\begin{figure}[!htp]
\centering
\begin{animateinline}[controls]{3}
\multiframe{6}{r=0+0.2}{
\begin{tikzpicture}
\draw(2.5,2.5)node{\$c^2\$};
\draw(-1.6,1.1)node{\$b^2\$};
\draw(1,-1)node{\$a^2\$};
\draw(0.8,1.3)node{\$c\$};
\draw(0.2,1.4)node{\$b\$};
\draw(1,0.2)node{\$a\$};
\draw(0,0.15)--(0.15,0.15)--(0.15,0);
\draw(0,0)--(0,3)--(2,0)--cycle;
\draw[green](0,0)--(0,3)--(-3,3)--(-3,0)--cycle;
\draw[magenta](0,0)--(2,0)--(2,-2)--(0,-2)--cycle;
\draw[blue](0,3)--(2,0)--(5,2)--(3,5)--cycle;
\draw[shift={(1.5*\r,3.5*\r)},fill=magenta,color=magenta,opacity=0.4]
(0,0)--(2,0)--(2,-2)--(0,-2)--cycle;
\draw[shift={(1.5*\r,1.5*\r)},color=violet,fill=violet,opacity=0.4]
(-1.5,1.5)--(-0.5,0)--(0,0)--(0,2.5)--cycle;
\draw[shift={(3.5*\r,-1.5*\r)},color=orange,fill=orange,opacity=0.4]
(-1.5,1.5)--(0,2.5)--(0,3)--(-2.5,3)--cycle;

```

```

\draw[shift={({6.5*\r,0.5*\r}),color=green,fill=green,opacity=0.4]
(-1.5,1.5)--(-2.5,3)--(-3,3)--(-3,0.5)--cycle;
\draw[shift={({4.5*\r,3.5*\r}),color=cyan,fill=cyan,opacity=0.4]
(-1.5,1.5)--(-3,0.5)--(-3,0)--(-0.5,0)--cycle;
\end{tikzpicture}
\end{animateinline}
\end{figure}

```

Exemplo 3. A próxima animação também é relacionada com uma prova do Teorema de Pitágoras, e é comumente atribuída ao ex-presidente dos Estados Unidos, James Garfield. Agora, considere um triângulo retângulo com hipotenusa medindo c u.m. e catetos medindo a e b u.m., conforme a Figura 1. A animação que disponibilizamos abaixo pode ser usada para melhor compreender o Teorema de Pitágoras.

Figura 5: Trapésio e três triângulos

Podemos observar que a área do trapésio que pode ser visto acima é dado por

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{2}$$

bem como podemos observar que a área do trapésio é dada por

$$\frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{ba}{2}$$

ou seja, $c^2 = a^2 + b^2$.

Abaixo, apresentamos o conjunto de elementos $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ capazes de gerar a animação da Figura 5.

```

\begin{figure}[!htp]
\centering
\begin{animateinline}[controls, poster=5]{3}
\multiframe{6}{r=0+0.2}{
\begin{tikzpicture}
\draw[white] (5,2)--(0,3);
\draw[lightgray] (0,0)--(0,2)--(0,3)--cycle;
\draw(1,-0.2)node{\$a\$};
\draw(-0.2,1.5)node{\$b\$};
\draw(1.2,1.6)node{\$c\$};

```

```

\draw(0,0.15)--(0.15,0.15)--(0.15,0);
\draw[blue,fill=blue,opacity=0.4](0,0)--(0,3)--(2,0)--cycle;
\draw[blue,fill=blue,shift={(5*\r,0)},rotate around={90*\r:(0,0)},opacity=0.4]
(0,0)--(0,3)--(2,0)--cycle;
\end{tikzpicture}}
\newframe
\multiframe{6}{rt=0+0.2}{
\begin{tikzpicture}
\draw[lightgray](0,3)--({5*\rt},{3-\rt});
\draw[lightgray](0,0)--(0,2)--(0,3)--cycle;
\draw(1,-0.2)node{a$};
\draw(-0.2,1.5)node{b$};
\draw(1.2,1.6)node{c$};
\draw(0,0.15)--(0.15,0.15)--(0.15,0);
\draw[blue,fill=blue,opacity=0.4](0,0)--(0,3)--(2,0)--cycle;
\draw[blue,fill=blue,shift={(5,0)},rotate around={90:(0,0)},opacity=0.4]
(0,0)--(0,3)--(2,0)--cycle;
\end{tikzpicture}}
\end{animateinline}
\end{figure}

```

Exemplo 4. Considere um triângulo retângulo com hipotenusa medindo c u.m. e catetos medindo a e b u.m., conforme a Figura 1. A animação que disponibilizamos abaixo pode ser usada para melhor compreender o Teorema de Pitágoras.

Figura 6: Semicírculo e três triângulos

Usando a semelhança que há entre os triângulos retângulos, podemos ver que

$$\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$$

o que implica que $c^2 = a^2 + b^2$.

Abaixo, apresentamos o conjunto de elementos L^AT_EX capazes de gerar a animação da Figura 6.


```

\begin{figure}[!htp]
\centering
\begin{animateinline}[controls, poster=5]{3}
\multiframe{6}{r=0+0.2}{
\begin{tikzpicture}
\draw(1.5,-0.2)node{${a}$};
\draw(-0.2,2)node{${b}$};
\draw(1.8,1.9)node{${c}$};
\draw(5.5,-0.2)node{${c}$};
\draw(0,0.15)--(0.15,0.15)--(0.15,0);
\draw[color=yellow,fill=yellow](0,0)--(0,4)--(3,0)--cycle;
\draw[thick,blue](3,0)--({3+5*\r},0);
\draw[white](8,0)arc(0:180:5);
\draw[lightgray](-2,0)--(8,0);
\end{tikzpicture}
\newframe
\multiframe{6}{rt=0+0.2}{
\begin{tikzpicture}
\draw(1.5,-0.2)node{${a}$};
\draw(-0.2,2)node{${b}$};
\draw(1.8,1.9)node{${c}$};
\draw(5.5,-0.2)node{${c}$};
\draw(0,0.15)--(0.15,0.15)--(0.15,0);
\draw[color=yellow,fill=yellow](0,0)--(0,4)--(3,0)--cycle;
\draw(-1,-0.2)node{${c-a}$};
\draw[thick,blue](8,0)arc(0:180*\rt:5);
\draw[lightgray](-2,0)--(8,0);
\draw[white](8,0)arc(0:180:5);
\draw[thick,blue](-2,0)--(8,0);
\end{tikzpicture}
\newframe
\begin{tikzpicture}
\draw(1.5,-0.2)node{${a}$};
\draw(-0.2,2)node{${b}$};
\draw(1.8,1.9)node{${c}$};
\draw(5.5,-0.2)node{${c}$};
\draw(0,0.15)--(0.15,0.15)--(0.15,0);
\draw[color=yellow,fill=yellow](0,0)--(0,4)--(3,0)--cycle;
\draw(-1,-0.2)node{${c-a}$};
\draw[thick,blue](8,0)arc(0:180:5);
\draw[thick,blue](-2,0)--(8,0);
\draw[red,fill=red,opacity=0.4](3,0)--(8,0)--(0,4)--cycle;
\end{tikzpicture}
\newframe
\begin{tikzpicture}
\draw(1.5,-0.2)node{${a}$};
\draw(-0.2,2)node{${b}$};
\draw(1.8,1.9)node{${c}$};

```

```

\draw(5.5,-0.2)node{\$c\$};
\draw(0,0.15)--(0.15,0.15)--(0.15,0);
\draw[color=yellow,fill=yellow](0,0)--(0,4)--(3,0)--cycle;
\draw(-1,-0.2)node{\$c-a\$};
\draw[thick,blue](8,0)arc(0:180:5);
\draw[thick,blue](-2,0)--(8,0);
\draw[red,fill=red,opacity=0.4](3,0)--(8,0)--(0,4)--cycle;
\draw[blue,fill=blue,opacity=0.4](-2,0)--(0,4)--(0,0)--cycle;
\end{tikzpicture}
\end{animateinline}
\end{figure}

```

Exemplo 5. Considere um triângulo retângulo com hipotenusa medindo c u.m. e catetos medindo a e b u.m., conforme a Figura 1. A animação que disponibilizamos abaixo é motivada pela prova do Teorema de Pitágoras dada por Frank Burk, veja [3], e pode ser usada para melhor compreender o Teorema de Pitágoras.

Figura 7: $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

Usando a semelhança que há entre os triângulos de lados bc , ac , $a^2 + b^2$, e c^2 , ac , bc u.ms podemos ver que $c^2 = a^2 + b^2$.

Abaixo, apresentamos o conjunto de elementos $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ capazes de gerar a animação da Figura 7.

```

\begin{figure}[!htp]
\centering
\begin{animateinline}[controls,poster=5]{2}
\multiframe{6}{r=0+0.2}{

```

```

\begin{tikzpicture}
\draw[blue,fill=blue!40](0,0)--(0,2)--(1,0)--cycle;
\draw(0,0.1)--(0.1,0.1)--(0.1,0);
\draw(0.5,-0.2)node{\$a\$};
\draw(-0.2,1)node{\$b\$};
\draw(0.7,1)node{\$c\$};
\draw[rotate=270*\r,shift={(4*\r,3*\r)},red,fill=red!30]
(0,0)--(0,2*\r)--(\r,0)--cycle;
\draw[shift={(3*\r,-4*\r)},scale=2*\r,green,fill=green!30]
(0,0)--(0,2*\r)--(\r,0)--cycle;
\draw[white](0,0)--(0,2*\r)--(-\r,0)--cycle;
\draw[rotate=90*\r,shift={(-4*\r,-3*\r)},cyan,fill=cyan!30]
(0,0)--(0,2*\r)--(-\r,0)--cycle;
\draw[shift={(3*\r,-4*\r)},scale=2*\r,violet,fill=violet!30]
(0,0)--(0,2*\r)--(-\r,0)--cycle;
\draw[white](-4,-6)--(4,-6);
\draw(1.6*\r,-2*\r)node{\$bc\$};
\draw(3.3*\r,-2.4*\r)node{\$b^2\$};
\draw(2.2*\r,-4.2*\r)node{\$ab\$};
\draw(3.3*\r,-4.4*\r)node{\$a^2\$};
\draw(4*\r,-4.8*\r)node{\$ac\$};
\end{tikzpicture}
\end{animateinline}
\end{figure}

```

Teorema 2 (Relação fundamental entre as funções seno e cosseno). *Seja qual for θ número real, vale a identidade*

$$\text{sen}^2(\theta) + \text{cos}^2(\theta) = 1.$$

Exemplo 6. A animação que disponibilizamos abaixo pode ser usada para melhor compreender o Teorema 2.

Abaixo, apresentamos o conjunto de elementos $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ capazes de gerar a animação da Figura 8.

```

\begin{figure}[!htp]
\centering
\begin{animateinline}[loop]{3}
\multiframe{19}{r=0+5}{
\begin{tikzpicture}[scale=2]
\draw[->](-1.3,0) -- (1.5,0) node[right]{\$x\$};
\draw[->](0,-1.3) -- (0,1.5) node[above]{\$y\$};
\draw[color=red,fill=red!30](0,0) -- ({\cos(\r)},0) --
({\cos(\r)},{-\cos(\r)}) -- (0,{-\cos(\r)}) -- cycle;
\draw[color=blue,fill=blue!30]({\cos(\r)},0) -- ({\sin(\r)+\cos(\r)},0) --
({\sin(\r)+\cos(\r)},{\sin(\r)}) -- ({\cos(\r)},{\sin(\r)}) -- cycle;
\draw[color=teal,fill=green!30](0,0) -- ({\cos(\r)},{\sin(\r)}) --
({\sqrt{2}*\cos(\r+45)},{\sqrt{2}*\sin(\r+45)}) -- ({\cos(\r+90)},{\sin(\r+90)})
-- cycle;
\draw({\cos(\r)},0.05)--({\cos(\r)-0.05},0.05)--({\cos(\r)-0.05},0);

```

Figura 8: $\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta) = 1$

```

\draw[dotted] (1,0) arc(0:360:1);
\draw(0.25,-0.15) node{\cos^2(\r)};
\draw(0.75,0.9) node{\sen^2(\r)};
\draw(1.1,-0.1) node{\tiny 1$};
\draw(-1.1,-0.1) node{\tiny 1$};
\draw(-0.2,1.1) node{\tiny 1$};
\draw(-0.2,-1.1) node{\tiny -1$};
\draw(0.1,0) arc(0:\r:0.1) node[right]{\tiny $\theta$};
\end{tikzpicture}
\end{animateinline}
\end{figure}

```

3.2. Outras identidades

Teorema 3. *Sejam quais forem β, θ números reais, vale a seguinte identidade*

$$\text{sen}(\theta + \beta) = \text{sen}(\theta) \cos(\beta) + \text{sen}(\beta) \cos(\theta).$$

Exemplo 7. Perceba que $\text{sen}(\theta + \beta)$ é soma dos comprimentos de reta AD e DE. Abaixo, apresentamos o conjunto de elementos \LaTeX capazes de gerar a animação da Figura 9.

```

\begin{example}
\begin{figure}[!htp]
\centering

```

Figura 9: $\sin(\theta + \beta) = \sin(\theta) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\theta)$

```

\begin{animateinline}[controls]{3}
\multiframe{19}{r=0+5}{
\begin{tikzpicture}[scale=3]
\draw[->] (-1.3,0) -- (1.5,0) node[right]{$x$};
\draw[->] (0,-0.3) -- (0,1.3) node[above]{$y$};
\draw[color=red,fill=red!30,rotate around={\r:(0,0)}]
(0,0) -- ({sqrt(3)*0.5},0) -- ({sqrt(3)*0.5},0.5) -- cycle;
\draw[rotate around={\r:(0,0)}]
(0.1,0)arc(0:30:0.1)node[right]{\tiny$\theta$};
\draw[rotate around={\r:(0,0)}]
({sqrt(3)*0.5-0.05},0) -- ({sqrt(3)*0.5-0.05},0.05)--({sqrt(3)*0.5},0.05);
\draw[color=blue,fill=blue!30,opacity=0.4]
(0,0) -- ({cos(\r)*sqrt(3)*0.5},0)
-- ({cos(\r)*sqrt(3)*0.5},{sin(\r)*sqrt(3)*0.5}) -- cycle;
\draw[dotted] (1,0)arc(0:180:1);
\draw(0.2,0)arc(0:\r:0.2)node[right]{\tiny$\beta$};
\draw(0,0)--({cos(\r+30)},0)--({cos(\r+30)},{sin(\r+30)})--cycle;
\draw({cos(\r+30)},{sin(\r)*sqrt(3)*0.5})
--({cos(\r)*sqrt(3)*0.5},{sin(\r)*sqrt(3)*0.5});
\draw[thick,blue]({cos(\r+30)},0)--({cos(\r+30)},{sin(\r)*sqrt(3)*0.5});
\draw[thick,blue]({cos(\r+30)},{sin(\r)*sqrt(3)*0.5})
--({cos(\r+30)},{sin(\r+30)});
\draw(1,-0.1)node{\tiny 1$};
\draw(-1,-0.1)node{\tiny -1$};
\draw(-0.05,1.1)node{\tiny 1$};
\draw({cos(\r+30)},-0.06)node{\small A};
\draw({cos(\r)*sqrt(3)*0.5},-0.06)node{\small B};
\draw[right]({cos(\r)*sqrt(3)*0.5},{sin(\r)*sqrt(3)*0.5})node{\small C};
\draw[left]({cos(\r+30)},{sin(\r)*sqrt(3)*0.5})node{\small D};
\draw[above]({cos(\r+30)},{sin(\r+30)})node{\small E};
\end{tikzpicture}
}

```

`\end{animateinline}`
`\end{figure}`

Exemplo 8.

Teorema 4 (Lei dos senos). *Em um triângulo ABC qualquer, inscrito em uma circunferência de raio r, de lados \overline{BC} , \overline{AC} e \overline{AB} , que medem respectivamente a, b e c, com ângulos internos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} , vale a seguinte relação*

$$\frac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{b}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{c}{\text{sen}(\hat{C})} = 2r.$$

Figura 10: Lei dos senos

Abaixo, apresentamos o conjunto de elementos \LaTeX capazes de gerar a animação da Figura 10.

```

\begin{figure}[!htp]
\centering
\begin{animateinline}[controls,poster=5]{3}
\multiframe{6}{r=0+0.2}{
\begin{tikzpicture}[scale=3]
\draw(2,0)arc(0:360:1);
\draw(0,0)--(1,1)--(1.9,-0.43)--cycle;
\draw[left](0,0)node{\small A};
\draw[above](1,1)node{\small B};
\draw[right](1.9,-0.43)node{\small C};
\draw[left](1,-0.05)node{\small O};
\filldraw(1,0)circle(0.01);
\draw[color=blue,fill=blue!40,opacity=0.5](0,0)--(1,1)--({1+\r},{1-\r});
\draw[color=red,fill=red!40,opacity=0.5]
(1,1)--(1.9,-0.43)--({1.9-0.9*\r},{-0.43-0.57*\r});

```

```

\draw[color=green,fill=green!40,opacity=0.5]
(1.9,-0.43)--(0,0)--(0.1*\r,0.43*\r);
\draw[color=red,dotted](1,1)--(1,{1-\r})node[midway]{\small r};
\draw[color=blue,dotted](0,0)--(\r,0)node[midway]{\small r};
\draw[color=green,dotted]
(1.9,-0.43)--({1.9-0.9*\r},{-0.43*(1-\r)})node[midway]{\small r};
\end{tikzpicture}
\end{animateinline}
\end{figure}
\end{example}

```

Exemplo 9.

Teorema 5 (Lei dos cossenos). *Em um triângulo ABC qualquer, para lados opostos aos ângulos internos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} , com medidas respectivamente a, b e c , como na Figura 11, valem as relações*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A}), \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\hat{B}), \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{C}).$$

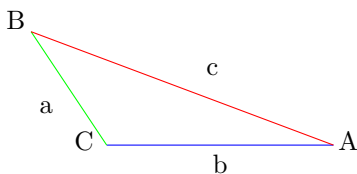


Figura 11: Triângulo ABC qualquer

Veja a animação da Figura 12.

Abaixo, apresentamos o conjunto de elementos L^AT_EX capazes de gerar a animação da Figura 12.

```

\begin{figure}[!htp]
\centering
\begin{animateinline}[controls,poster=9]{3}
\multiframe{10}{r=0+0.2}{
\begin{tikzpicture}
\draw(0,0)--({-0.6+\r},3)--(2.5,0)--cycle;
\draw[above right](0,0) node{\small C};
\draw[color=green,fill=green!50](0,0)--({-0.6+\r},3)
--({-3.6+\r},{2.4+\r})--(-3,{-0.6+\r})--cycle;
\draw[color=magenta,fill=magenta!50]({-0.6+\r},3)--(2.5,0)
--(5.51,{3.19-1.04*\r})--({2.43+\r},{6-0.95*\r})--cycle;
\draw(0,0)--(2.5,0)--(2.5,-2.5)--(0,-2.5)--cycle;
\draw[dotted,gray]({-0.6+\r},3)--({-0.6+\r},-2.5);
\draw(3.5,2)node{\$c^2\$};
\draw(-1,2)node{\$a^2\$};
\draw[thick,color=blue]({-0.6+\r},3) -- ({-1.1+2*\r},0)--(-1.1+2*\r,-2.5);
\draw[thick,color=blue,fill=blue!50,opacity=0.4]({-1.1+2*\r},0) -- (2.465,0)
--(2.465,-2.5)--({-1.1+2*\r},-2.5)--cycle;

```

Figura 12: Lei dos cossenos


```

\draw[color=blue!50] (1.3,-1.5)node{\$b^2-2ab\cos(\hat C)\$};
\draw[color=magenta] (0.7,-3)node{\$c^2=a^2+b^2-2ab\cos(\hat C)\$};
\draw[white] (-4,-4)--(-4,6);
\end{tikzpicture}
\end{animateinline}
\end{figure}

```

Proposição 1. *Sejam quais forem a, b números reais, vale $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$.*

Demonstração. Basta desenvolver a expressão $(b - a)(b + a)$. □

Exemplo 10. Considere um quadrado com lado medindo b u.m., e $0 < a < b$; veja a Figura 13.

Figura 13: Quadrado com lado medindo b u.m.

Abaixo, apresentamos o conjunto de elementos $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ capazes de gerar a animação da Figura 13.

```

\begin{figure}[!htp]
\centering
\begin{animateinline}[controls,poster=5]{3}
\multiframe{6}{r=0+0.2}{
\begin{tikzpicture}
\draw[lightgray] (0,0)rectangle (3.5,3.5);
\draw(0.6,3.7)node{\$a\$};
\draw(-0.2,0.6)node{\$a\$};
\draw(2.6,-0.2)node{\$b-a\$};
\draw(2.6,3.7)node{\$b-a\$};
\draw(-0.5,2.5)node{\$b-a\$};
\draw(0.6,-0.2)node{\$a\$};
\draw(1.25,-0.05)--(1.25,0.05);
\draw[violet,fill=violet!40] (0,0) rectangle (1.25,1.25);
\draw[blue,fill=blue!40] (0,1.25) rectangle (3.5,3.5);

```

```

\draw[blue,fill=blue!40,rotate around={90*\r:(3.5,1.25)},shift={(2.25*\r,0)}]
(1.25,0) rectangle (3.5,1.25);
\draw(-0.05,1.25)--(0.05,1.25);
\draw(1.25,3.55)--(1.25,3.45);
\draw[white](-2,-2) rectangle(5.5,4);
\end{tikzpicture}
\end{animateinline}
\end{figure}

```

3.3. Desigualdades elementares

As animações fornecidas abaixo estão relacionadas com desigualdades elementares no Ensino Básico de Matemática.

Proposição 2. *Seja qual for x positivo, vale a seguinte desigualdade $x + \frac{1}{x} \geq 2$.*

Demonstração. Basta ver que, seja qual for x positivo, temos

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \geq 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

□

Exemplo 11. A animação abaixo reproduz a ideia usada acima.

Figura 14: Quadrado de lado $x + \frac{1}{x}$ u.m.

Abaixo, apresentamos o conjunto de elementos $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ capazes de gerar a animação da Figura 14.

```

\begin{figure}[!htp]
\centering
\begin{animateinline}[controls,poster=5]{3}
\multiframe{6}{r=0+0.2}{
\begin{tikzpicture}
\draw(-0.2,0.5)node{${\frac{1}{x}}$};

```

```

\draw(1,-0.2)node{${x}$};
\draw[green,fill=green!40](0,0)--(2,0)--(2,1)--(0,1)--cycle;
\draw[green,fill=green!40,rotate around={-90*\r:(2,0)}](0,0)--(2,0)
--(2,1)--(0,1)--cycle;
\draw[green,fill=green!40,shift={(\r,2*\r)}](0,0)--(2,0)--(2,1)
--(0,1)--cycle;
\draw[green,fill=green!40,rotate around={90*\r:(0,1)}](0,0)--(2,0)--(2,1)
--(0,1)--cycle;
\draw[red,fill=red!10](1,1) rectangle ({1+\r},{1+\r});
\draw[white](-1,-1)--(3.5,-1)--(3.5,3.5)--(-1,3.5)--cycle;
\end{tikzpicture}}
\end{animateinline}
\end{figure}
\end{example}

```

Teorema 6 (Desigualdade entre as médias aritméticas e geométricas). *Sejam quais forem x e y números reais não negativos. Vale a seguinte desigualdade*

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Além disso

$$\sqrt{xy} = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow x = y.$$

Figura 15: Desigualdade entre as médias aritméticas e geométricas

Exemplo 12. Apresentamos agora os elementos $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ capazes de gerar a animação da Figura 15.

```

\begin{figure}[!htp]
\centering
\begin{animateinline}[controls, poster=3]{3}
\multiframe{21}{r=0+5}{
\begin{tikzpicture}[scale=5]
\def\q{\r/100-(\r/100)^2}
\draw(0,0)--(1,0);
\draw[blue,thick](0,0)--(\r/100,0)node[below]{${x}$};
\draw[red,thick](\r/100,0)--(1,0)node[below]{${y}$};
\draw[lightgray,dotted](1,0) arc(0:180:0.5);
\draw[teal](0.5,0)--(0.5,0.5)node[left]{${\frac{x+y}{2}}$};

```

```
\draw(\r/100,0)--(\r/100,{sqrt(\q)})node[right]{\sqrt{xy}};\nend{tikzpicture}\nend{animateinline}\nend{figure}
```

Agradecimentos

O autor agradece ao parecerista pela leitura do texto e pelas sugestões de melhoria do trabalho.

Referências

- [1] H. Alencar, L. Cândido, R. Garcia, e C. Mathias, “O GeoGebra como ferramenta de apoio ao entendimento de demonstrações em Geometria”, *Professor de Matemática Online*, **10**, n. 4, 2022.
- [2] H. Alencar, L. Cândido, e C. Mathias, “Resoluções visuais de alguns problemas de matemática da Educação Básica”, *Professor de Matemática Online*, **7**, n.1, (2019), 1–19.
- [3] F. Burk, “The Pythagorean theorem”, *College Math. Journal*, **27** (1996) p. 409.
- [4] C. F. Costa, O uso do \LaTeX na construção e animação de figuras geométricas como auxílio no ensino de geometria, Dissertação do Profmat/UFCA, 2022. Disponível [aqui](#).
- [5] CTAN, Comprehensive TeX Archive Network. Disponível em <https://ctan.org/>.
- [6] A. Grahn, The animate Package, 18th June 2023. Disponível em <https://tug.ctan.org/macros/latex/contrib/animate/animate.pdf>
- [7] E. S. S. Kishimoto e V. R. Coluci, “Animações para o ensino de Matemática usando o Manim–Python”, *Professor de Matemática Online*, **11**, n. 1, 2023.
- [8] S. P. Lima e C. V. Mathias, “A visualização em livros do GeoGebra”. *Educação Matemática Sem Fronteiras: Pesquisas em Educação Matemática*, **4** (2023) 175–195.
- [9] A. C. C. B. Lopes e E. V. Chaves, “Animação como recurso didático no ensino da química: capacitando futuros professores”, *Educitec, Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico*, Manaus, **04**, n. 07, (2018) 135–151.
- [10] N. R. F. Maia, M. V. L. Silva, C. A. M. Cavalcante, F. A. C. Monteiro e A. G. V. Catunda, “Animações Virtuais como Proposta Metodológica para o Ensino de Embriologia”, *Conexões - Ciência e Tecnologia*, **11**(6), (2017) 17–26.
- [11] Mathematical Visual Proofs, Canal do YouTube. Disponível em <https://www.youtube.com/@MathVisualProofs>.
- [12] PGF/TikZ Manual, The TikZ and PGF Packages. Manual for Version 3.1.10 - 2024. Disponível em <https://tikz.dev/>.
- [13] C. V. Mathias, H. Alencar e J. C. P. Leivas, “Provas sem palavras, visualização, animação e GeoGebra”, *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, **8**, n.2, (2019), 62–77.
- [14] C. V. Mathias, H. Alencar, L. Cândido, e R. Garcia, “Uma investigação dinâmica sobre as demonstrações das desigualdades das médias”, *Conexões - Ciência e Tecnologia*, **18**, e022004.

Flank D. M. Bezerra
Departamento de Matemática
Universidade Federal da Paraíba
58051-900 - João Pessoa - PB, Brasil
<flank@mat.ufpb.br>

Recebido: 20/06/2024
Publicado: 01/10/2024