

Probabilidade Geométrica, o Método de Monte Carlo e estimativas de π

Igor Dutra Cavalcante 

Gregório Silva Neto 

Resumo

Este trabalho tem por objetivo abordar o conceito e algumas aplicações da probabilidade geométrica, por meio do Método Monte Carlo. Este método consiste em estimar a probabilidade de um evento por meio da realização de um grande número de experimentos simulados, executados por meio de algoritmos em algum *software* de cálculo ou linguagem de programação. Ilustramos o Método de Monte Carlo a partir de experiências desenvolvidas por meio de algoritmos na linguagem R, aproximando o valor de π por meio do experimento com a Agulha de Buffon e por intermédio da estimativa de áreas de figuras planas usando probabilidade geométrica. Além disso, apresentamos propostas de realização desses experimentos com materiais concretos e de baixo custo que podem ser realizados tanto em casa quanto em sala de aula. Acreditamos que essas propostas, se aplicadas de forma satisfatória, trarão interesse e dinâmica na apreensão dos conteúdos principais da teoria das probabilidades pelos alunos do Ensino Médio, bem como podem solidificar e ampliar a percepção geral do assunto.

Palavras-chave: Probabilidade Geométrica; Método de Monte Carlo; Agulha de Buffon; Linguagem R.

Abstract

This work aims to address the concept and some applications of geometric probability through the Monte Carlo Method. This method involves estimating the probability of an event by conducting a large number of simulated experiments, executed via algorithms in some calculation *software* or programming language. We illustrate the Monte Carlo method through experiments developed using algorithms in the R language, approximating the value of π through the Buffon's Needle experiment and by estimating areas of plane figures using geometric probability. Additionally, we present proposals for conducting these experiments with concrete and low-cost materials that can be carried out both at home and in the classroom. We believe that these proposals, if applied satisfactorily, will bring interest and dynamism to the understanding of the main contents of probability theory by high school students, as well as solidify and expand their overall perception of the subject.

Keywords: Geometric Probability; Monte Carlo Method; Buffon's Needle; R Language

¹Parcialmente apoiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq e pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Alagoas-Fapeal

1. A probabilidade e o Ensino Médio

O estudo das probabilidades, embora pertença à matemática, é certamente relevante em diversas áreas do conhecimento. As ciências naturais, a economia, a sociologia, a química, a biologia e áreas de saúde necessitam de conhecimentos que as auxiliem na compreensão de fenômenos não determinísticos. Para tanto, o conhecimento de modelos matemáticos probabilísticos é fundamental. Neste sentido, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, publicadas em 2006 pela Secretaria de Educação Básica do Ministério da Educação do Brasil, prescrevem que

O estudo da combinatória e da probabilidade é essencial nesse bloco de conteúdo, pois os alunos precisam adquirir conhecimentos sobre o levantamento de possibilidades e a medida da chance de cada uma delas ([2], p. 79).

E continua:

Ao estudar probabilidade e chance, os alunos precisam entender conceitos e palavras relacionadas a chance, incerteza e probabilidade, que aparecem na nossa vida diariamente, particularmente na mídia. Outras ideias importantes incluem a compreensão de que a probabilidade é uma medida de incerteza, que os modelos são úteis para simular eventos, para estimar probabilidades, e que algumas vezes nossas intuições são incorretas e podem nos levar a uma conclusão equivocada no que se refere à probabilidade e à chance ([2], p. 80, grifo nosso).

Da mesma forma, o documento Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, publicado em 2000, deixa clara a importância do ensino de probabilidade para os alunos do Ensino Médio, conforme se vê:

As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer previsões com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isso mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas ([1], p. 44-45, grifo nosso).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), publicada em 2018, ver [3], é, atualmente, o documento norteador da educação brasileira. Focando no desenvolvimento de habilidades, a BNCC dedica especial atenção ao estudo da Probabilidade de Estatística, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, enfatizando o uso de tecnologias:

Além disso, a BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da

elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas. *Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior ([3], p 528, grifo nosso).*

Podemos ver essa ênfase mais detalhada na descrição das habilidades:

- (EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.
- (EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.
- (EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

Portanto, não restam dúvidas de que o conhecimento da teoria das probabilidades tem a devida e fundamental importância para os currículos e habilidades dos alunos do Ensino Médio nacional, conforme reforçam as diretrizes de ensino.

O ensino de probabilidade, em seus mais variados métodos, por certo, desenvolve habilidades na leitura e interpretação crítica de informações. E mais, a probabilidade geométrica pode contribuir auxiliando a interpretação correta de informações visuais, bem como a exposição de forma adequada.

Resta evidente que o ensino matemático da teoria das probabilidades perfaz uma série desses conhecimentos, sendo adequado ao currículo do ensino fundamental e médio para um aprendizado coerente com as propostas de ensino elaboradas. Porém, conforme explicam Lopes, Balieiro e Salvador ([7], p. 56), citando Lima [6], após análise de livros didáticos de matemática utilizados pelo Ensino Médio, em um total de 12 coleções, “encontrou o tópico Probabilidade Geométrica em apenas uma delas”. Assim, embora não seja o propósito deste trabalho entrar no mérito dos motivos, é certo que o conceito de Probabilidade Geométrica não costuma ser trabalhado no material didático para o Ensino Médio. Ainda assim, é um assunto recorrente em outras fontes, bem como adequado, conforme já visto, ao currículo do Ensino Médio. Além disso, o domínio deste conteúdo pode ser amplamente utilizado na solução de problemas contínuos, ou não discretos. Novamente, tem-se que o ensino de probabilidade, em especial em seu método geométrico, pode constituir um ferramental fundamental para a apreensão desses conteúdos. Em particular, o estudo do Método Monte Carlo pode ser uma ferramenta interessante, visto que explora a complexidade e aleatoriedade da realidade natural, e certamente pode contribuir para o reconhecimento do “caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais”.

2. Noções Preliminares

Uma vez contextualizada, historicamente, conceitualmente e nos parâmetros curriculares nacionais pertinentes, faz-se necessário então a apresentação e domínio de algumas noções preliminares sobre a teoria das probabilidades. Para tanto, conforme ensinam Morgado e Carvalho ([8], p. 146), espaço amostral é “o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória”. Ainda, eventos são quaisquer subconjuntos do espaço amostral, e se diz que ocorreu um evento se “o resultado da experiência pertence ao evento”. Por exemplo, suponha a observação da face voltada para cima no lançamento de uma moeda. O espaço amostral desta experiência é $S = \{\text{cara, coroa}\}$ e, além disso, há quatro eventos, quais sejam: $\emptyset, A = \{\text{cara}\}, B = \{\text{coroa}\}, S = \{\text{cara, coroa}\}$. O evento \emptyset é chamado evento impossível, pois nunca ocorre, e o evento S é chamado de evento certo, pois sempre ocorre ([8], p. 146).

Os axiomas de probabilidade, por sua vez, são as assertivas basilares que fundamentam todas as demais assertivas sobre as probabilidades. Considerando E um conjunto de eventos qualquer e o Ω espaço amostral que contém os eventos E , os axiomas são:

- (i) A probabilidade $P(E)$ de um determinado evento E ocorrer satisfaz $0 \leq P(E) \leq 1$;
- (ii) $P(\Omega) = 1$, ou seja, o espaço amostral contém todos os eventos possíveis;
- (iii) Se E_1 e E_2 são eventos mutuamente exclusivos, isto é, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, então $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$.

É também relevante a compreensão das propriedades básicas das probabilidades, cuja demonstração pode ser encontrada em [8], p. 148:

- (a) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, onde \bar{A} é o conjunto complementar de A ;
- (b) $P(\emptyset) = 0$;
- (c) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$;
- (d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
- (e) Se $A \supset B$, então $P(A) \geq P(B)$.

3. Probabilidade Geométrica

Não é incomum que os eventos, para os quais se deseje calcular a probabilidade de ocorrência, possam ser representados de forma geométrica: como pontos sobre uma reta, plano ou espaço; como figuras planas contidas em outros planos ou espaço; ou como espaços sólidos contidos no espaço. Isso ocorre normalmente quando o número de eventos ou acontecimentos é não contável, não sendo possível estabelecer a razão entre eventos favoráveis e o total de casos ([7], p. 56). Neste sentido, Morgado e Carvalho ([8], p. 166) afirmam que “o ferramental desenvolvido” para um espaço amostral finito “pode ser aplicado também a situações em que o espaço amostral é infinito e, mesmo, não enumerável”. Portanto, neste caso, há simetria que possibilita a aplicação das mesmas ferramentas utilizadas no ambiente discreto e finito, para o contínuo e infinito. Assim, em muitos casos, em especial quando envolve medidas geométricas homogêneas, a solução desses problemas pode ser feita através da mensuração e comparação das respectivas medidas geométricas,

como comprimento, área e volume ([9]). Os problemas de probabilidade geométrica caracterizam-se pelo fato de que a solução do cálculo de probabilidades depende das medidas e da comparação de grandezas relacionadas a figuras geométricas. O espaço amostral é dado pelo total desta grandeza, ao passo que os eventos favoráveis são representados por partes desta.

Historicamente, o conceito foi formulado a partir da publicação do livro *Essai d'Arithmétique Morale*, em 1777, pelo matemático francês Georges Louis Leclerc, conde de Buffon. Dois problemas foram significativos para o desenvolvimento da teoria: o Problema da Agulha de Buffon e o Jogo dos Discos ([7], p. 56–57). O Problema da Agulha de Buffon, que será tratado mais adiante, consiste em determinar a probabilidade de que uma agulha de comprimento ℓ , lançada ao acaso sobre um feixe de retas paralelas que distam a umas das outras (com $\ell < a$), interseccione alguma dessas retas. Como a determinação desta probabilidade depende do ângulo de rotação da agulha, sobre seu eixo, em relação às retas paralelas, então a solução empírica deste problema sugere que, ao ser repetido um grande número de vezes, possa-se estimar o valor do número π . O Jogo dos Discos, por sua vez, é uma brincadeira em que se deve jogar um disco de diâmetro d sobre um piso quadriculado, com quadrados de lado ℓ ($d < \ell$), de forma que, ao parar, o disco não toque em qualquer lado dos quadrados. Deve-se então determinar a probabilidade da ocorrência desse evento, em função de d e ℓ . A partir da análise desses e de outros casos similares envolvendo probabilidade e formas geométricas, desenvolveu-se uma metodologia própria, que se adequa e permite a solução de muitos problemas reais. A Probabilidade Geométrica, assim, é uma ferramenta que possui características e recursos provenientes da intersecção das áreas da teoria das probabilidades e da geometria.

Com objetivo de ilustrar o conceito e fornecer a noção intuitiva adequada ao conceito de probabilidade geométrica, apresentaremos um problema resolvido que utiliza o conceito.

Problema 1. Pedro e João marcam de se encontrar no restaurante na hora do almoço, que vai de 12h até às 13h. Uma vez que não possuem meio de se falar antes, cada um deles decide ir e aguardar pelo outro exatos 15 minutos. Qual a probabilidade de que eles se encontrem?

Solução: O problema envolve a relação entre as duas chegadas, bem como a duração do tempo de espera, que devem coincidir. Uma estratégia de solução é marcar os possíveis horários de chegada em eixos cartesianos. Adotando o eixo x como os possíveis horários de chegada de Pedro, e o eixo y como os possíveis horários de chegada de João, obtemos o esquema representado na Figura 1 (a). Para clarear a compreensão, tomemos três exemplos:

- (a) No primeiro, João chega às 12h06, e Pedro, às 12h20. Como João aguardaria até às 12h21 (12h06 + 15min), ocorre o encontro.
- (b) No segundo, Pedro chega às 12h20, mas João, às 12h54. Mais uma vez, como Pedro esperaria até às 12h35, desta vez não ocorre o encontro.
- (c) No terceiro, ambos chegam às 12h42, ocorrendo o encontro.

Ao observar o gráfico, observamos que podemos tomar uma linha reta a partir da fixação da primeira chegada e, caso o segundo não chegue em 15 min ou até às 13h00 (horário limite), o encontro não ocorre. Caso contrário, o encontro ocorre. Assim, nota-se que o encontro ocorre sempre que o par ordenado (x, y) está dentro da área escura delimitada. Desta forma, para calcular a probabilidade de encontro, basta calcular a razão entre área da região escura e a área do quadrado. Além disso, como se trata de uma razão entre áreas, podemos trocar as unidades sem que isso afete o resultado final (ver Figura 1 (b)). Neste caso, a região dos pontos (x, y) para os

quais o encontro ocorre é o conjunto $\{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]; |x - y| \leq 1/4\}$, delimitado pelas retas $y = x \pm 1/4$. Observe que a região dos casos em que o encontro ocorre é simétrica com relação à reta $y = x$.

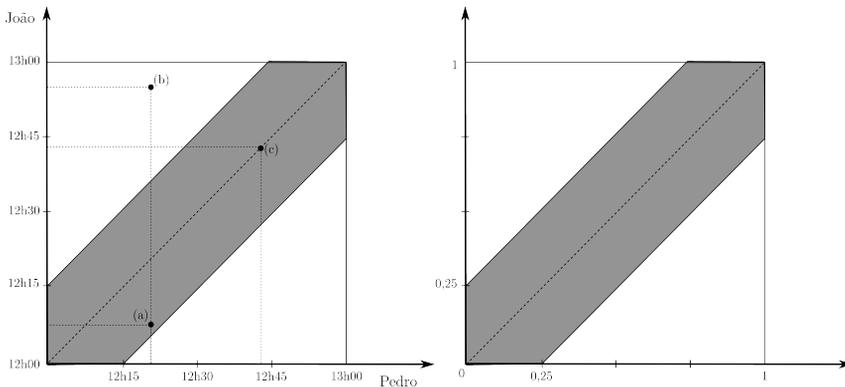


Figura 1: Possíveis horários de chegada de Pedro e João em eixos cartesianos (o ponto representa a chegada)

Calculando a relação entre as áreas, obtemos

$$\begin{aligned} \text{Área}_{\text{escura}} &= \text{Área}_{\text{total}} - \text{Área}_{\text{clara}} = 1 - 2 \times \frac{(1 - 0,25) \times (1 - 0,25)}{2} \\ &= 1 - 0,5625 = 0,4375 = 7/16. \end{aligned}$$

Assim, a probabilidade procurada é de 0,4375 ou 43,75%.

4. O Método de Monte Carlo

O Método Monte Carlo utiliza-se do estudo do comportamento e respostas de experimentos aleatórios de modo a se extraírem informações interessantes e relevantes dos fenômenos. Este método consiste em estimar a probabilidade de um evento por meio da realização de um grande número de experimentos simulados, executados por meio de algoritmos em algum *software* de cálculo ou linguagem de programação.

O nome Monte Carlo, conforme explicam Kalos e Whitlock ([5], p. 1–5), foi dado à uma classe de métodos usados por cientistas enquanto desenvolviam armas nucleares, em 1940, em Los Alamos, Novo México, EUA. Durante a II Guerra Mundial, o uso de computadores alavancou o uso do método. Alguns nomes relacionados são os do matemático húngaro John von Neumann (1903–1957), o físico italiano Enrico Fermi (1901–1954), o matemático polonês Stanislaw Ulam (1909–1984) e o físico greco-americano Nicholas Metropolis (1915–1999).

É um método que se propõe a resolver problemas numéricos ou obter algumas propriedades a partir de dados aleatórios, quando soluções analíticas são difíceis ou impossíveis de serem obtidas. Assim, tem como entrada parâmetros aleatórios e costuma utilizar-se de recursos computacionais, procurando explorar conceitos muitas vezes complexos, difíceis para outros métodos de abordagem. É especialmente útil quando estimativas aproximadas são suficientes para uma resposta adequada ao problema, prescindindo de exatidão, seja pela dificuldade de obtê-la ou pela necessidade de

eficiência. O advento e avanço computacional possibilitou a simulação experimental de diversos eventos aleatórios permitindo, assim, o uso do Método Monte Carlo em atividades cada vez mais abrangentes.

Neste artigo, a simulação experimental de eventos aleatórios terá como objetivo a introdução e verificação de valores, com fins didáticos, permitindo a verificação das estimativas e compreensão aprofundada do tema. Isso será feito por meio de dois problemas em que são obtidas estimativas experimentais e aproximadas do número π : Agulha de Buffon e estimativa da área de polígonos.

Os experimentos relatados neste trabalho foram realizados utilizando a linguagem de programação e ambiente para computação estatística e geração de gráficos R. O R é um *software* livre, multiplataforma, desenvolvido inicialmente como linguagem S, pelo *Bell Laboratories* pelo estatístico John M. Chambers e colegas. A linguagem R é disponibilizada através dos CRANs (*Comprehensive R Archive Network*), gratuitamente, através da licença GNU (*General Public License*). Algumas características são a efetiva manipulação e fácil armazenamento de dados, suporte a matrizes e *arrays*, ferramentas para análise de dados e para geração de gráficos e uma linguagem de programação simples e eficiente, com condicionais, *loops* e funções recursivas.

A versão utilizada para os experimentos foi a 4.4.0, de 24 de abril de 2024. Não foram utilizados pacotes adicionais justamente para se adequar ao propósito de permitir que sejam facilmente reproduzíveis, inclusive por professores em sala de aula. Como ambiente de desenvolvimento, foi utilizada a IDE (*Integrated Development Environment*) *RStudio*, multi-plataforma, gratuita e sob a licença AGPL v3, que é uma licença de código aberto que garante a liberdade de compartilhar e alterar o *software*, além de garantir que ele permaneça um *software* livre para todos os seus usuários. O *Rstudio* facilita a edição do código fonte bem como permite sua execução direta. A versão utilizada foi a 2024.04.1+748 de 11 de maio de 2024. Tanto o R quando o *RStudio* podem ser baixados gratuitamente por meio do *link* <https://posit.co/download/rstudio-desktop/>. Detalhes técnicos sobre a realização dos experimentos, bem como os códigos envolvidos, serão disponibilizados no apêndice deste artigo.

4.1. Agulha de Buffon

O Problema da Agulha de Buffon permite que se estime o valor do número π experimentalmente. O problema trata de determinar a probabilidade de que, ao lançarmos aleatoriamente uma agulha de comprimento ℓ por sobre uma família de retas paralelas que distam a $> \ell$ umas das outras, a agulha intersecte alguma das linhas (ver Figura 2). A condição a $> \ell$ é tomada para garantir que cada agulha intersecte no máximo uma das linhas. Denotando por d a distância entre o centro da agulha e a linha mais próxima e por θ o ângulo de inclinação da agulha em relação às linhas paralelas, temos que a agulha toca a linha sempre que

$$d \leq \frac{\ell}{2} \sin \theta.$$

Note que podemos considerar

$$0 \leq d \leq \frac{a}{2} \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

visto que a distância do centro da agulha é tomada à reta mais próxima e, tomando θ variando no intervalo $[0, \pi]$ obtemos todas as posições angulares possíveis para a agulha. Desta forma, a posição da agulha fica definida pelo par ordenado $(d, \theta) \in [0, a/2] \times [0, \pi]$ e, pelo que vimos, a agulha toca uma das linhas sempre que os valores estiverem abaixo do gráfico da função $f(\theta) = (\ell/2) \sin \theta$ (Ver

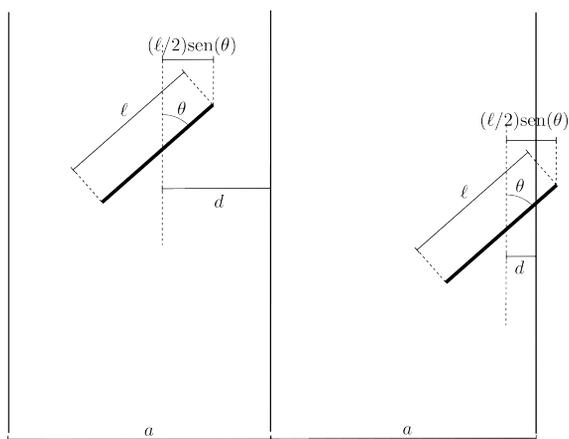


Figura 2: Problema da Agulha de Buffon

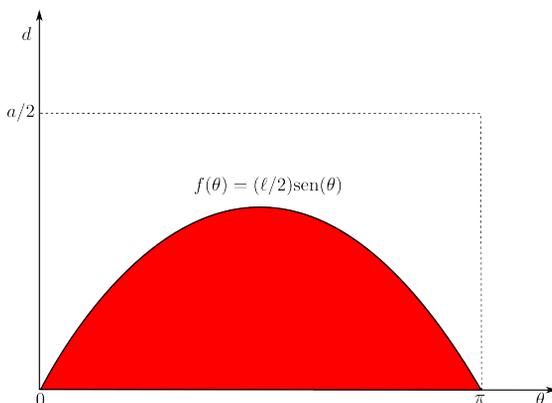


Figura 3: Valores posicionais para a agulha em eixo de coordenadas

Figura 3). Portanto, a probabilidade é dada pela razão entre a área da região sob a curva e a área do retângulo total:

$$P = \frac{\text{Área sob a curva}}{\text{Área do retângulo total}} = \frac{1}{\frac{\pi a}{2}} \int_0^{\pi} \frac{\ell}{2} \text{sen } \theta d\theta = \frac{2\ell}{\pi a}.$$

É possível aferir a probabilidade experimental P_e por meio da razão entre as agulhas que efetivamente tocaram alguma das linhas e o total de agulhas lançadas. Além disso, ao compará-la com a probabilidade teórica P , conhecendo-se os valores de ℓ e a , é possível isolar π e estimá-lo experimentalmente:

$$P \approx P_e \implies \frac{2\ell}{\pi a} \approx \frac{\text{Casos favoráveis}}{\text{Casos totais}} \implies \pi \approx \frac{2\ell}{a} \left(\frac{\text{Casos totais}}{\text{Casos favoráveis}} \right).$$

Para o experimento simulado utilizou-se $\ell = 1$ e $a = 2,5$. Além disso, foram realizados quatro experimentos, o primeiro com 50 agulhas, o segundo com 500, o terceiro com 5.000 e o último

com 50.000. As agulhas mais escuras são as que tocaram em alguma das linhas paralelas e, portanto, representam casos favoráveis (ver Figura 4). O experimento revela um erro significativo na

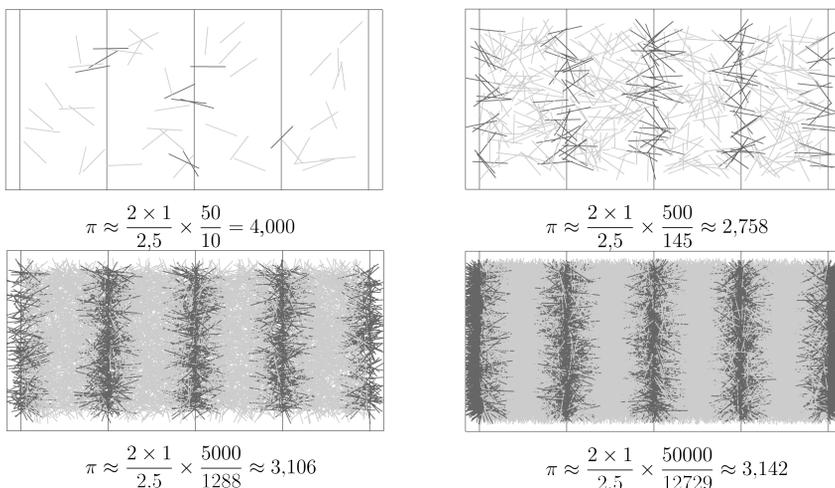


Figura 4: Resultados do experimento simulado para o problema da Agulha de Buffon: as agulhas escuras tocam a família de retas paralelas, enquanto as agulhas claras não as tocam. Os experimentos foram realizados com 50, 500, 5.000 e 50.000 agulhas. Aqui adotamos $\ell = 1$ e $a = 2,5$.

estimativa para valores pequenos. Este resultado é importante para que se dimensione qual a precisão esperada para a estimativa. Porém, como esperado, a estimativa melhora significativamente com o aumento de lançamentos e, para 50.000 lançamentos, a estimativa começa a ter um valor significativamente menor, conforme mostra a Tabela 1.

Casos totais	Casos favoráveis	π estimado	π	Erro
50	10	4,000	3,141...	0,859
500	145	2,758	3,141...	0,383
5000	1.288	3,105	3,141...	0,036
50000	12.729	3,142	3,141...	0,002

Tabela 1: Estimativa de π usando o Método de Monte Carlo por meio do experimento da Agulha de Buffon

É possível ainda perceber a aproximação do valor estimado com o valor de π ao agrupar o resultado de alguns experimentos aleatórios com valores crescentes. A Figura 5 mostra um gráfico de dispersão do resultado de 10 experimentos estimando o valor de π para cada valor de lançamentos de agulhas (nas mesmas condições acima): 10, 100, 1.000, 10.000 e 100.000.

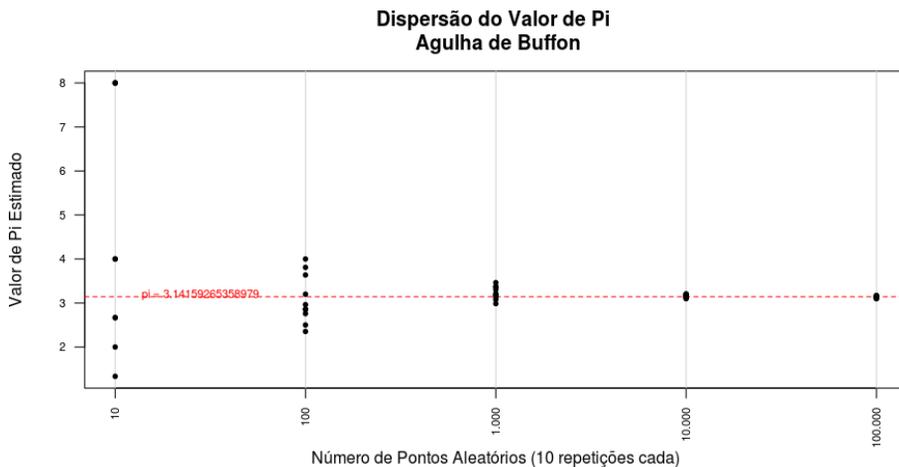


Figura 5: Dispersão da estimativa experimental em torno do valor de π

4.2. Estimativa da área de um polígono

Outra aplicação do Método Monte Carlo é a estimativa de áreas de figuras planas através da probabilidade obtida experimentalmente. Uma alternativa é subdividir uma área conhecida que contém a figura em pequenos quadrados e contar quantos, do total, estão dentro da figura. A razão entre os quadrados internos e o total de pequenos quadrados é aproximadamente a razão entre a área da figura pretendida e a área circundante conhecida. Porém, o Método de Monte Carlo oferece uma alternativa similar e bastante útil, inclusive didaticamente. Como exemplo, estimaremos a área do polígono da Figura 6. Uma vez conhecida a área do quadrado B, é possível

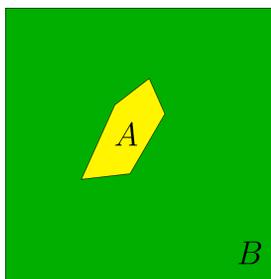
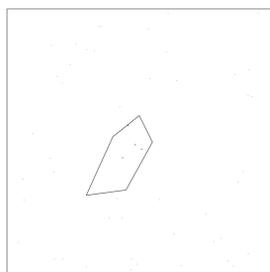
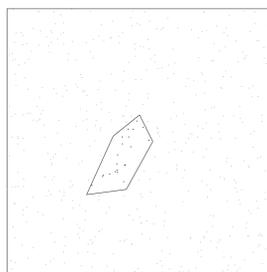


Figura 6: Polígono irregular

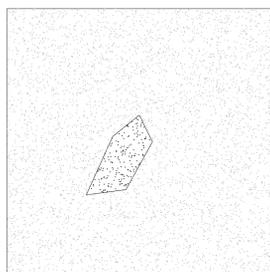
obter experimentalmente a probabilidade de que pontos aleatórios sobre o quadrado estejam dentro do polígono A. Assim, como sabemos que a probabilidade do ponto estar dentro de A é dada pela razão entre as áreas de A e de B, basta obter essa probabilidade experimentalmente e, então, estimar a área de A, uma vez que se conhece a área de B. O experimento mostrado na Figura 7, para o polígono de vértices $V_1 = (3, 3)$, $V_2 = (4.5, 3.2)$, $V_3 = (5.5, 5)$, $V_4 = (5, 6)$ e $V_5 = (4, 5.2)$, imerso em um quadrado de lado 10, ilustra essa estimativa com crescentes graus de precisão. É evidente que quanto maior o número de pontos aleatórios dispersos pelo quadrado, melhor será



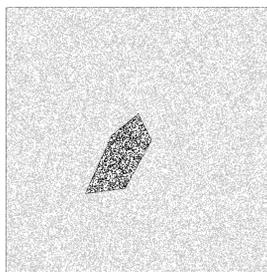
$$\text{Área}(A) \approx \frac{4}{50} \times 100 = 8,000$$



$$\text{Área}(A) \approx \frac{21}{500} \times 100 = 4,200$$



$$\text{Área}(A) \approx \frac{182}{5000} \times 100 = 3,640$$



$$\text{Área}(A) \approx \frac{1908}{50000} \times 100 = 3,816$$

Figura 7: Experimento simulado para estimativa da área de figura plana irregular. Por meio da probabilidade geométrica, vemos que $\text{Área}(A) \approx \frac{\text{Pontos interiores à região } A}{\text{Pontos Totais}} \times \text{Área}(B)$.

a estimativa. Uma vez que se sabe a área do quadrado externo, é possível estimar, com algum grau de precisão, a área do polígono ou outra figura plana contida neste quadrado, por meio da aferição aproximada experimental da probabilidade de que o ponto aleatório no quadrado esteja dentro da figura. A razão entre a área de A e a área de B deve ser expressa experimentalmente pela probabilidade de que o ponto esteja dentro da figura. Assim, basta contar quantos pontos estão dentro da figura, dividir pelo total de pontos e, então, multiplicar pela área de B. Por exemplo, no experimento com 50 mil pontos aleatórios, 1.908 estavam internos à figura A e, assim, a probabilidade experimental foi de $1.908/50.000 = 0,03816$. Isto nos dá uma aproximação da área do polígono como 3,81% da área do quadrado que o contém. O experimento mostra ainda de que forma a precisão aumenta à medida que se aumenta a quantidade de eventos, ou seja, de pontos aleatórios. Para fins de comparação, calculando a área do polígono (por exemplo, por meio do Teorema de Green, do Cálculo Integral) obtemos que $\text{Área}(A) = 3,7$, o que equivale a 3,7% da área do quadrado que o contém.

Podemos usar esse método para obter outra aproximação do valor de π , a partir de um círculo inscrito em um quadrado. Ao tomarmos pontos aleatórios dentro do quadrado, temos que a probabilidade P de que o ponto esteja também dentro do círculo pode ser facilmente calculada, uma vez que esta é exatamente a razão entre a área do círculo e a área do quadrado. Além disso, como é possível obter essa mesma probabilidade experimentalmente (que denotaremos por P_e),

por meio de sucessivos lançamentos aleatórios, e como todos os elementos são conhecidos, pode-se igualar as probabilidades e isolar π :

$$P = \frac{\text{Área do Círculo}}{\text{Área do Quadrado}} = \frac{\pi R^2}{\ell^2} = \frac{\pi}{4},$$

onde usamos o fato de que o raio R do círculo inscrito em um quadrado de lado ℓ satisfaz $R = \ell/2$. Aproximando P da probabilidade obtida experimentalmente, obtemos

$$P_e = \frac{\text{Casos favoráveis}}{\text{Casos totais}} \approx \frac{\pi}{4} = P \implies \pi \approx 4P_e.$$

A Figura 8 mostra o experimento realizado com 50, 500, 5.000 e 50.000 pontos.

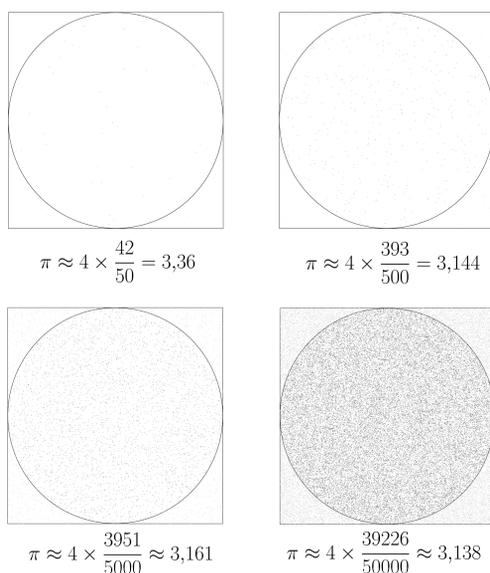


Figura 8: Resultados do experimento simulado para estimativa do número π

Uma característica notável é que o experimento revela um erro tolerável mesmo para valores pequenos (ver Tabela 2). Ou seja, é um experimento que permite aferição com poucos recursos e até baixa capacidade computacional, com uma precisão adequada e útil à didática.

Casos totais	Casos favoráveis	π estimado	π	Erro
50	42	3,360	3,141...	0,219
500	393	3,144	3,141...	0,003
5000	3.951	3,161	3,141...	0,02
50000	39.226	3,138	3,141...	0,003

Tabela 2: Estimativa de π por meio de experimento com pontos aleatórios em círculo inscrito em um quadrado unitário

Observação 1. Note que, neste caso, a área do círculo é aproximadamente 78,54% da área do quadrado circunscrito, enquanto, no exemplo anterior, a área do polígono corresponde a apenas 3,7% da área do quadrado que o contém. Isso acarretou que precisássemos de um número menor de passos para obtermos uma boa precisão no caso do círculo, em comparação com o caso do polígono. Note que isso ocorre porque, quanto menor a razão entre as áreas, mais significativo o erro se torna relativamente ao valor dessas áreas. Dessa forma, recomenda-se que seja usada uma região circundante menor para obtermos maior precisão com um número menor de passos.

5. Experimentos com materiais concretos para serem realizados em casa ou na sala de aula

É possível realizar de forma concreta os experimentos deste artigo usando materiais concretos, conforme descrevemos a seguir. Esses experimentos podem ser realizados tanto em casa quanto em sala de aula.

5.1. Experimento com a agulha de Buffon usando materiais concretos

Para o experimento da agulha de Buffon, precisaremos dos seguintes materiais:

- Uma cartolina, papel 40 kg ou folha de papel A3;
- Uma ou mais caixas de palitos de dentes ou de palitos de fósforo (note que uma caixa de palito de dentes vem com 100 palitos, enquanto que uma caixa padrão de palitos de fósforos vem apenas com 40 palitos, além de serem mais caros);
- Caneta;
- Régua com marcação (no experimento usamos uma régua de 50 cm, mas uma de 30 cm deve ser suficiente);

Para a construção, com o auxílio da régua, marque, dos dois lados maiores da cartolina, pontos igualmente espaçados (com distância maior que o comprimento dos palitos). Tome cuidado para que os primeiro pontos, em ambos os lados, distem igualmente da borda da cartolina. Caso a régua seja pequena, pode-se fazer o mesmo no meio da cartolina. Esses pontos servirão de guia para traçarmos as retas paralelas. Em seguida, trace as retas paralelas (ver Figura 9).

A realização do experimento dar-se-á da seguinte forma:

1. anote a distância a entre as linhas, o comprimento ℓ do palito e o total de palitos que vai jogar (já vem escrito na caixa);
2. jogue os palitos aos poucos e de forma espalhada pela cartolina, de forma que sua distribuição se torne mais ou menos uniforme;
3. Em seguida separe, em recipientes distintos, os palitos que intersectaram alguma das linhas e os que não intersectaram;
4. Conte os palitos do recipiente correspondente aos palitos que intersectaram alguma das linhas;

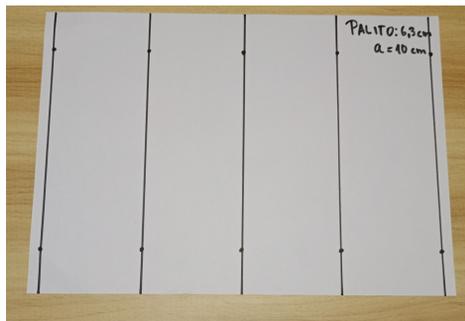


Figura 9: Desenho das linhas paralelas para o experimento da agulha de Buffon. No caso, usamos uma folha de papel sulfite A3, marcador de quadro branco para traçar as linhas (pode ser qualquer caneta) e um espaçamento de 10 cm entre as linhas, sabendo de antemão que os palitos de dentes medem 6,3 cm de comprimento. Foto de autoria própria.

5. Realize o seguinte cálculo:

$$\frac{2\ell}{a} \times \frac{\text{total de palitos}}{\text{palitos que intersectaram alguma linha}}$$

No experimento realizado (ver Figura 10), usamos uma folha de papel A3 e traçamos linhas paralelas com espaço de 10 cm entre elas. Como agulhas, usamos 200 palitos de dentes, de comprimento 6,3 cm.



Figura 10: Experimento da Agulha de Buffon usando 200 palitos de dentes com agulhas em uma folha de papel A3 com linhas paralelas distando 10 cm umas das outras. Foto de autoria própria.

Realizando o experimento 4 vezes, obtivemos que 94, 71, 82 e 88 palitos tocaram alguma das linhas. Ressaltamos que deve-se tomar cuidado ao contar esses palitos, tendo em vista que ficam uns sobre os outros e deslizam com frequência, mudando sua posição. Com os dados do experimento, obtemos as seguintes aproximações de π , respectivamente, onde a última linha é a combinação da anteriores:

Casos totais	Casos favoráveis	π estimado	π	Erro
200	94	2,68	3,141...	0,461
200	71	3,55	3,141...	0,409
200	82	3,07	3,141...	0,071
200	88	2,86	3,141...	0,281
800	335	3,01	3,141...	0,14

Observação 2. Na escola, pode-se separar a turma em grupos (duplas ou trios) para realizar o experimento. Visto que, em geral, é necessário um grande número de agulhas para obtermos uma boa aproximação, é interessante somar os resultados dos grupos e depois comparar com os resultados obtidos por cada grupo individualmente. Para obtermos escalas com crescimento sucessivo de agulhas, pode-se somar os resultados de dois grupos, quatro grupos etc., concluindo com o resultado da turma toda. Observe que esse trabalho pode ser feito tanto na sala quanto como dever de casa. Observe que é importante, para fins de padronização, que o professor possa definir previamente o tipo de palito e a distância entre as linhas, bem como o tipo de papel utilizado. O professor pode depois coletar os dados dos experimentos dos alunos e, com o auxílio de uma planilha eletrônica e a partir da combinação de todos os resultados obtidos pelos alunos, simular um experimento com uma grande quantidade de palitos.

5.2. Experimento para a estimativa de áreas de figuras planas com o uso de materiais concretos

É possível realizar concretamente o experimento de aproximação de áreas por meio de uma folha de sulfite desenhada com régua e compasso e grãos (que podem ser grãos de arroz, de feijão, miçangas ou outros objetos pequenos de tamanho e composição uniformes que estiverem disponíveis em grande quantidade) que possam fazer o papel dos pontos a serem jogados aleatoriamente. A seguir, apresentamos uma sugestão de como o experimento pode ser construído. Precisaremos dos seguintes materiais:

- Uma folha de papel sulfite A4 ou A3, ou cartolina ou papel 40 kg. No experimento, usamos folha de papel A3;
- Caneta;
- Régua com marcação (no experimento usamos uma régua de 50 cm, mas uma de 30 cm deve ser suficiente);
- Grãos que farão o papel dos pontos do experimento;
- Compasso ou algum objeto cilíndrico de um tamanho razoável para a folha utilizada (no experimento usamos uma lata de leite de 1,2 kg para a folha A4 e uma caçarola (panela) de diâmetro 26 cm para a folha A3);
- Uma balança digital caseira.

O experimento será realizado por meio das seguintes etapas:

1. Em uma folha de papel sulfite A4 ou A3, desenhe um círculo de raio 10 cm com o auxílio um compasso e de uma régua para medir a abertura. Note que esse é o maior círculo com raio

inteiro que podemos traçar em uma folha A4 de sulfite, que tem 21 cm de largura. Caso não se tenha compasso, pode-se usar qualquer recipiente cilíndrico com uma base circular de tamanho razoável. No experimento, usamos uma lata de leite de 1,2 kg sobre uma folha de papel A4 dobrada ao meio e uma caçarola (panela) grande sobre uma folha de papel A3 (ver Figura 10).

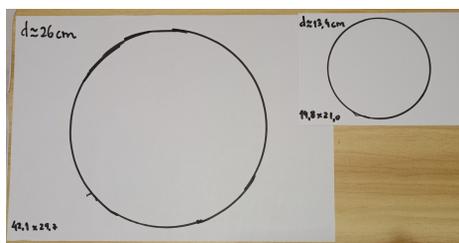


Figura 11: Círculos desenhados sobre uma folha de papel A3, usando como base uma caçarola de 26 cm de diâmetro, e sobre uma folha de papel A4 dobrada ao meio, usando como base uma lata de leite de 1,2 kg com 13,4 cm de diâmetro.

- Calcule a área do círculo e do retângulo da folha de sulfite A4 (que mede $29,7\text{cm} \times 21\text{cm} = 623,7\text{cm}^2$) ou na folha de sulfite A3 (que mede $29,7\text{cm} \times 42\text{cm} = 1.247,4\text{cm}^2$). Caso tenha construído o círculo com o auxílio de um compasso, basta medir o raio R da abertura do compasso e usar a fórmula πR^2 da área do círculo. Caso tenha usado alguma superfície cilíndrica, pode-se medir aproximadamente o diâmetro d do círculo usando uma régua, fixando o zero da régua em um ponto da circunferência e deslizando-a (girando em torno desse ponto fixo) de cima a baixo até encontrar o ponto onde a régua mede o maior comprimento. Nesse caso, a área do círculo será $\frac{\pi d^2}{4}$.
- Deposite sua construção em uma superfície plana, sem inclinações. Depois disso, basta jogar os grãos sobre a folha de uma forma que preencha o máximo da região limitada pelos palitos. Em seguida, recolha os grãos que caíram dentro e fora do círculo (mas ainda sobre a folha) em recipientes distintos. Visto que é inviável contar um grande número de grãos, iremos pesá-los. De fato, supondo que os grãos são aproximadamente uniformes, podemos deduzir que a razão entre suas quantidades é aproximadamente igual à razão entre suas massas.
- Em seguida realize o seguinte cálculo:

$$\frac{\text{Área da Folha}}{R^2} \times \frac{\text{massa em gramas dos grãos dentro do círculo}}{\text{massa total em gramas dos grãos sobre a folha}},$$

onde o total de grãos é a soma dos que caíram dentro e fora do círculo, mas que ainda caíram sobre a folha e R é o raio do círculo em centímetros. Caso tenha medido o diâmetro, basta realizar o cálculo

$$4 \times \frac{\text{Área da Folha}}{d^2} \times \frac{\text{massa em gramas dos grãos dentro do círculo}}{\text{massa total em gramas dos grãos sobre a folha}},$$

onde d é o diâmetro medido em centímetros.

No experimento com a folha de papel A3, usamos tanto feijão quanto arroz como os grãos que fazem o papel de pontos (ver Figura 12 para o experimento utilizando feijão e a Figura 13 para o experimento que utilizou arroz).



Figura 12: Experimento da estimativa de π pelo Método de Monte Carlo usando grãos de feijão sobre uma folha de papel A3 com um círculo traçado usando como base uma caçarola de 26 cm de diâmetro.

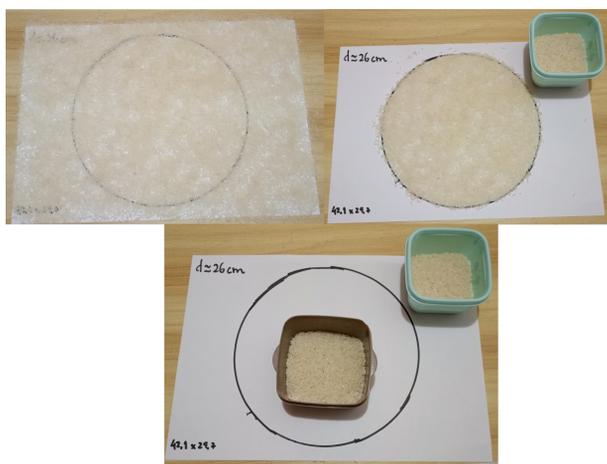


Figura 13: Experimento da estimativa de π pelo Método de Monte Carlo usando grãos de arroz sobre uma folha de papel A3 com um círculo traçado usando como base uma caçarola de 26 cm de diâmetro.

No caso do experimento com feijão, obtivemos que 237 gramas ficaram dentro do círculo e 294 gramas ficaram fora (ver Figura 14). Essas medições deram-nos a aproximação

$$\pi \approx 4 \times \frac{1247,4}{26^2} \times \frac{237}{237 + 294} \approx 3,294.$$

Caso utilizemos 26,5 cm como diâmetro do círculo corrigido, para compensarmos os grãos que ficam um pouco para fora, obtemos a aproximação

$$\pi \approx 4 \times \frac{1247,4}{26,5^2} \times \frac{237}{237 + 294} \approx 3,171.$$



Figura 14: Medição da massa dos grãos de feijão que ficaram dentro e fora do círculo, respectivamente.

De forma análoga, na pesagem do arroz, obtivemos que 141 gramas ficaram dentro do círculo e 169 gramas ficaram fora (ver Figura 15). Essas medições nos levaram à aproximação



Figura 15: Medição da massa dos grãos de arroz que ficaram dentro e fora do círculo, respectivamente.

$$\pi \approx 4 \times \frac{1247,4}{26^2} \times \frac{141}{141 + 169} \approx 3,357.$$

Caso utilizemos 26,5 cm como diâmetro do círculo corrigido, para compensarmos os grãos que ficam um pouco para fora, obtemos a aproximação

$$\pi \approx 4 \times \frac{1247,4}{26,5^2} \times \frac{237}{237 + 294} \approx 3,232.$$

6. Conclusões

Neste trabalho vimos algumas aplicações do conceito de probabilidade geométrica usando ferramentas tanto computacionais quanto por meio de experiências com materiais concretos de baixo custo e que podem ser exploradas no Ensino Médio. As aplicações computacionais fizeram uso do *software* R, bastante usado em Estatística e Ciência da Computação. Observamos que os temas tratados neste artigo têm estreita relação com a BNCC, não apenas nas habilidades já mencionadas, mas também por causa da conexão com temas clássicos da Geometria Euclidiana. Desta forma, esperamos que o trabalho possa servir para inspirar docentes e estudantes a aprender mais sobre essa ferramenta computacional, bem como se aprofundar no estudo da Probabilidade e da

Estatística, um ramo da Matemática cada vez mais popular nos tempos atuais onde a Ciência de Dados tem se tornado cada dia mais importante.

Referências

- [1] BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio - Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: Ministério da Educação, 2000. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em: 18 de março de 2024.
- [2] BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Orientações curriculares para o ensino médio vol. 2: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume.02_internet.pdf>. Acesso em: 18 de março de 2024.
- [3] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 27 de março de 2024.
- [4] CAVALVANTE, Igor Dutra. *Probabilidade Geométrica: Uma abordagem através do Método de Monte Carlo e Geometria Fractal*, Dissertação de Mestrado do Profmat. 2017, Disponível em: <<https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat.tcc.php?id1=3264&id2=150090361>>. Acesso em: 18 de março de 2024.
- [5] KALOS, Malvin H; WHITLOCK, Paula A. *Monte Carlo Methods*. Second, Revised and Enlarged Edition. Weinheim: Wiley-VCH, 2008.
- [6] LIMA, Elon Lages. *Exame de textos: análise de livros de matemática para o ensino médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2001.
da Conferência Internacional: Experiências e Perspectivas do Ensino da Estatística – Desafios para o século XXI. (p.167-174). Florianópolis, 20 a 22 de Setembro de 1999.
- [7] LOPES, José Marcos; BALIEIRO, Inocência Fernandes F.; SALVADOR, José Antônio. *O conceito de Probabilidade Geométrica por meio do uso de Fractais*. Água de Lindoia: XXXIV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2012.
- [8] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Matemática discreta*. 1ª ed. Coleção Profmat. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.
- [9] TUNALA, Nelson. Determinação de probabilidades por métodos geométricos. *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo: SBM, v. 20, 1992.

Apêndice

Neste apêndice, apresentamos os códigos e detalhes técnicos sobre o *software* R que foram utilizados para a realização dos experimentos apresentados neste artigo. Iniciaremos com algumas considerações técnicas: primeiro, os números aleatórios foram gerados utilizando as funções *runif*, que fornece informações sobre uma distribuição uniforme dentro de um intervalo, e a função *sample*, que fornece uma amostra de determinado tamanho. A Figura 16 mostra os histogramas para estas funções.

Os histogramas, realizados com *set.seed(8888)* e 50.000 eventos, sugerem uma distribuição uniforme nos experimentos. Mais informações a respeito da uniformidade, métodos ou fidedignidade dos números aleatórios podem ser encontradas na documentação da linguagem, em específico na seção *Random Number Generation*. Para impressão e geração dos gráficos foi utilizada a ferramenta *plot*

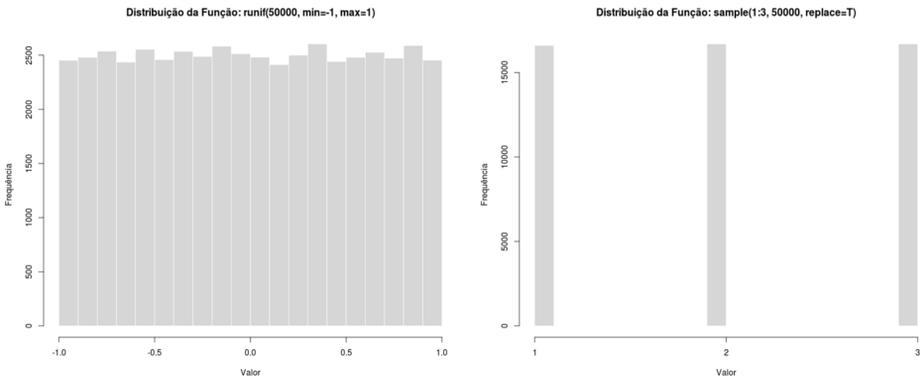


Figura 16: Distribuição dos números aleatórios gerados com as funções *runif* e *sample*

nativa do R. Embora não tenha ferramentas disponíveis em outras similares, a função mostrou-se suficiente para os propósitos deste trabalho, bem como sua simplicidade certamente favorecerá a compreensão do código e reprodução. Por fim, todos os experimentos foram iniciados pela função *set.seed(8888)*. Uma vez que, para os experimentos, foram utilizados números aleatórios, esta função permite que sejam reproduzíveis, mantendo os mesmos números, desde que utilizada a mesma variável “8888”. Esta, por sua vez, foi escolhida arbitrariamente, com o único propósito de permitir a reprodutibilidade das experiências e dados, isto é, ao escolher este valor para a variável, conseguimos reproduzir exatamente os mesmos resultados apresentados neste artigo. Por outro lado, ao mudarmos essa variável de “8888” para outro número qualquer (1, 45, 566, 999999 etc.) obtemos simulações com resultados numéricos distintos. Isso pode ser interessante para repetir o experimento com conjuntos de pontos aleatórios distintos, ao mesmo tempo que observa a convergência para o resultado esperado, independentemente do conjunto de pontos usado. Ao executarmos o código, serão geradas imagens com o nome “Função_xxx_yyy”, onde “Função” refere-se à função definida no R, “xxx” é o número de casos favoráveis e “yyy” é o número de casos simulados. Por exemplo, a imagem nomeada “MonteCarloPi_3885_5000” refere-se à função “MonteCarloPi” (que calcula aproximações do número π por meio da área do círculo inscrito em um quadrado) que obteve 3885 pontos internos ao círculo dentre 5000 pontos totais. Essa informação é importante para montarmos as tabelas de aproximação que usamos ao longo do artigo.

A seguir, apresentamos os códigos usados nos experimentos. Mais detalhes sobre as funções e os códigos podem ser encontrados em [4]. Para reproduzir os experimentos computacionais deste artigo, basta copiar e colar cada código na janela de *Script* do RStudio realizando a seguinte modificação: na linha

```
#setwd("<pasta destino>")
```

deve-se remover o “#” para fazer o R considerar essa linha na compilação e, na “<pasta destino>”, substituir pelo caminho completo da pasta onde deseja salvar o arquivo de imagem, como, por exemplo,

```
setwd("C://Users//grego//OneDrive//Área de Trabalho")
```

Observe que, no Windows, esse caminho vem escrito da forma “C:\Users\grego\OneDrive\Área

de Trabalho”. Dessa forma, a barra invertida deve ser substituída por duas barras. Além disso, observe que no final há quatro linhas de compilação com os quatro experimentos usando 50, 500, 5.000 e 50.000 pontos. Não é o obrigatório compilar os quatro ao mesmo tempo, da mesma forma que é possível modificar os valores, mas tomando cuidado que um número grande de pontos exigirá muito esforço computacional.

Agulha de Buffon

```
obterAgulhaBuffon <- function(n=500, l=3, tam=1) {
  tamArea <- 10
  altArea <- 6
  qtdLinhas <- l
  distLinhas <- tamArea/(qtdLinhas+1)
  tamanhoAgulha <- tam
  qtdAgulhas <- n
  agulhas <- data.frame(qtdAgulhas)

  ##Parâmetros agulha
  xCentro <- runif(qtdAgulhas, min=0, max=tamArea)
  yCentro <- runif(qtdAgulhas, min=tamanhoAgulha/2, max=altArea-tamanhoAgulha/2)
  angulo <- runif(qtdAgulhas, min=0, max=pi)
  x1 <- xCentro+(tamanhoAgulha/2)*cos(angulo)
  y1 <- yCentro+(tamanhoAgulha/2)*sin(angulo)
  x2 <- xCentro+(tamanhoAgulha/2)*cos(angulo+pi)
  y2 <- yCentro+(tamanhoAgulha/2)*sin(angulo+pi)

  agulhas <- cbind(agulhas, xCentro)
  agulhas <- cbind(agulhas, yCentro)
  agulhas <- cbind(agulhas, angulo)
  agulhas <- cbind(agulhas, x1)
  agulhas <- cbind(agulhas, x2)
  agulhas <- cbind(agulhas, y1)
  agulhas <- cbind(agulhas, y2)

  agulhas$favoravel <- 0

  for(i in 1:length(agulhas[,1])) {
    xMaior <- max(agulhas[i,]$x1, agulhas[i,]$x2)
    xMenor <- min(agulhas[i,]$x1, agulhas[i,]$x2)

    for(j in 0:(qtdLinhas+1)) {
      if(xMenor<=j*distLinhas & xMaior>=j*distLinhas) {
        agulhas[i,]$favoravel <- 1
      }
    }
  }

  fav <- sum(agulhas$favoravel)
  (2*qtdAgulhas*tamanhoAgulha)/(distLinhas*fav)

  ## Desenha
  png(filename=paste0("AgulhaBuffon_", fav, "_", qtdAgulhas, ".png"), units="px", width=4*100*tamArea, height=4*100*altArea, res=400)

  plot(0,0,type="n",xlim=c(0,tamArea),ylim=c(0,altArea), frame=TRUE, xlab="", ylab="", xaxt="n", yaxt="n")

  ##Desenha linhas
  for(i in 0:(qtdLinhas+1)) {abline(v=i*distLinhas, lwd=1)}

  ##Desenha agulhas
  for(i in 1:length(agulhas[,1])) {
    cor <- "gray80"
    if(agulhas[i,]$favoravel == 1) {cor="gray40"}
    lines(c(agulhas[i,]$x1, agulhas[i,]$x2), c(agulhas[i,]$y1, agulhas[i,]$y2), lwd=2, col=cor)
  }

  dev.off()
}

#setwd("<pasta destino>")
padrao <- 8888
set.seed(padrao)
obterAgulhaBuffon(50)
obterAgulhaBuffon(500)
obterAgulhaBuffon(5000)
obterAgulhaBuffon(50000)
```

Area de Polígono

```
obterAreaPoligono <- function(x=c(2.5, 7.5, 7.5, 2.5), y=c(2.5, 2.5, 7.5, 7.5), n=1000) {
  ## Retorna ordenada de ponto em função afim que contém P1 e P2
```

```

obterPontoCurva <- function(px, pix, piy, p2x, p2y) {
  a <- (p2y-piy)/(p2x-pix)
  b <- (piy*p2x - p2y*pix)/(p2x-pix)
  return(a+px+b)
}

## Vértices
## x <- c(3.0, 5.0, 4.0, 5.5, 4.0)
## y <- c(3.0, 3.5, 4.8, 6.0, 5.0)
vertices <- data.frame(x, y)

## Pontos aleatórios
x <- runif(n, min=0, max=10)
y <- runif(n, min=0, max=10)
pontos <- data.frame(x, y)

pontos$contador <- 0

for(i in 1:length(pontos[,1])) {
  for(j in 1:length(vertices[,1])) {
    k <- j+1
    if(k > length(vertices[,1])) {k=1}
    ## Obtém ordenada do ponto na curva para verificar se é maior que ordenada do ponto
    yCurva <- obterPontoCurva(pontos[i,1]$x, vertices[j,1]$x, vertices[j,1]$y, vertices[k,1]$x, vertices[k,1]$y)
    ## Obtém o maior e menor x dos vértices para verificar se a ordenada do ponto está entre eles
    xMaior <- max(vertices[j,1]$x, vertices[k,1]$x)
    xMenor <- min(vertices[j,1]$x, vertices[k,1]$x)
    if(yCurva > pontos[i,1]$y && xMenor < pontos[i,1]$x && pontos[i,1]$x < xMaior) {
      pontos[i,1]$contador <- pontos[i,1]$contador + 1
    }
  }
}

## Se e só se o ponto tiver tocado um número ímpar de arestas está dentro
pontos$favoravel <- (pontos$contador %% 2 == 1)

## Desenha
png(filename=paste0("AreaPoligono_", sum(pontos$favoravel), "_", n, ".png"), units="px", width=4*800, height=4*860, res=400)

plot(0,0,type="n",xlim=c(0,10),ylim=c(0,10), frame=FALSE, xlab="", ylab="", xaxt="n", yaxt="n")

## Quadrado externo
lines(c(0,0),c(0,10))
lines(c(10,10),c(10,0))
lines(c(10,0),c(10,10))
lines(c(0,10),c(0,0))

# Poligono
polygon(vertices$x, vertices$y)

## Pontos com cores diferentes interno/externo
pontos$cor <- "gray"
pontos[pontos$favoravel,]$cor <- "black"
points(pontos$x, pontos$y, col=pontos$cor, cex=0.2)

dev.off()
}

#setwd("<pasta destino>")
padrao <- 8888
set.seed(padrao)
obterAreaPoligono(x=c(3, 4.5, 5.5, 5, 4), y=c(3, 3.2, 5, 6, 5.2), n=50)
obterAreaPoligono(x=c(3, 4.5, 5.5, 5, 4), y=c(3, 3.2, 5, 6, 5.2), n=500)
obterAreaPoligono(x=c(3, 4.5, 5.5, 5, 4), y=c(3, 3.2, 5, 6, 5.2), n=5000)
obterAreaPoligono(x=c(3, 4.5, 5.5, 5, 4), y=c(3, 3.2, 5, 6, 5.2), n=50000)

```

Aproximação de π pela área do círculo

```
obterMonteCarloPi <- function(n=10000) {  
  ## Obtem "n" valores aleatórios para x e para y dos pontos  
  x <- runif(n, min=-1, max=1)  
  y <- runif(n, min=-1, max=1)  
  pontos <- data.frame(x, y)  
  
  ## Verifica se o ponto está dentro da (ou sobre a) circunferência  
  pontos$favoravel <- (sqrt(pontos$x^2 + pontos$y^2) <= 1)  
  
  ## Define cores distintas  
  pontos$cor <- "gray80"  
  pontos[pontos$favoravel,]$cor <- "gray40"  
  
  fav <- sum(pontos$favoravel)  
  (fav/n)*4  
  
  ## Desenha  
  png(filename=paste0("MonteCarloPi_", fav, "_", n, ".png"), units="px", width=4*800, height=4*860, res=400)  
  plot(0,0,type="n",xlim=c(-1,1),ylim=c(-1,1), frame=FALSE, xlab="", ylab="", xaxt="n", yaxt="n")  
  symbols(0, 0, circles = 1, inches=FALSE, add=TRUE)  
  lines(c(-1,-1),c(-1,1))  
  lines(c(1,1),c(1,-1))  
  lines(c(1,1),c(1,1))  
  lines(c(1,-1),c(1,1))  
  lines(c(-1,1),c(-1,-1))  
  points(pontos$x, pontos$y, col=pontos$cor, cex=0.1)  
  dev.off()  
}  
#setwd("<pasta destino>")  
padrao <- 8888  
set.seed(padrao)  
obterMonteCarloPi(50)  
obterMonteCarloPi(500)  
obterMonteCarloPi(5000)  
obterMonteCarloPi(50000)
```

Igor Dutra Cavalcante
Universidade Federal de Alagoas (Egresso Profmat)
<igorcav@gmail.com>

Gregório Silva Neto
Universidade Federal de Alagoas
<gregorio@im.ufal.br>

Recebido: 02/04/2024
Publicado: 16/10/2024