PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.12, n.3, 2024
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2024/pmo1224

# O jogo dos 15

Francisco Dutenhefner

**Resumo**

Neste artigo apresentamos a matemática que está por trás do tradicional jogo dos 15. Utilizamos a dicotomia dos números inteiros entre pares e ímpares para caracterizar para quais configurações iniciais do tabuleiro o jogo tem solução. Provamos que dada uma configuração inicial é possível efetuar movimentos válidos até obter uma, e exatamente uma, das seguintes configurações: posição normal, em que os números aparecem em ordem crescente da esquerda para a direita e de cima para baixo, com o espaço vazio no canto inferior direito, ou a posição de Sam Loyd que difere da posição normal pela inversão das peças 14 e 15. Na abordagem dos teoremas não foram escolhidas as demonstrações mais enxutas e sofisticadas. Pelo contrário, escolhemos uma abordagem mais natural do assunto, deixando o texto mais adequado para públicos não especializados.

**Palavras-chave:** jogo dos 15; paridade; grupo de permutações.

**Abstract**

In this article, we present the mathematics behind the traditional 15 Puzzle. We utilize the dichotomy of integers between even and odd to characterize which initial configurations of the board have solutions. We prove that given an initial configuration, it is possible to make valid moves to obtain one, and exactly one, of the following configurations: the normal position, where the numbers appear in ascending order from left to right and top to bottom, with the empty space in the bottom right corner, or the Sam Loyd position, which differs from the normal position by the inversion of the 14 and 15 tiles. In approaching the theorems, we did not choose the most concise and sophisticated proofs. On the contrary, we chose a more natural approach to the subject, making the text more suitable for non-specialized audiences.

**Keywords:** 15-puzzle; parity; permutation group.

## 1. O inventor e o jogo

O jogo dos 15 foi inventado por volta de 1874 por Noyes Chapman, gerente de uma agência dos correios em Nova York [1]. O jogo é constituído de um tabuleiro quadrado 4x4 dividido em 16 casas quadradas contendo 15 peças numeradas de 1 a 15 e um espaço vazio. Inicialmente as peças numeradas e o espaço vazio podem ocupar quaisquer casas do tabuleiro. Um movimento válido é movimentar na horizontal ou na vertical uma peça adjacente ao espaço vazio, invertendo de posição a peça e o espaço vazio. O objetivo do jogo é ordenar as peças, de uma dada configuração inicial, para a **posição normal** ilustrada à direita na Figura 1, em que os números aparecem em ordem crescente da esquerda para a direita e de cima para baixo, com o espaço vazio no canto inferior direito.



SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

**Configuração inicial**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | | 1 | 8 |
| 11 | 10 | 3 | 14 |
| 6 | 4 | 5 | 2 |
| 15 | 12 | 9 | 13 |

$\xrightarrow{?}$

**Posição normal**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | |

Figura 1: Exemplo de uma configuração inicial do tabuleiro e a configuração do objetivo do jogo.

Observamos que se começamos em uma dada configuração A do tabuleiro e efetuamos movimentos válidos até obter uma certa configuração B, então, executando na ordem inversa os movimentos em sentidos contrários, conseguimos partir da configuração B e obter a configuração A. Desse modo, no jogo dos 15, não importa tanto a ordem da posição inicial e da posição final do tabuleiro, uma vez que a ordem dessas duas configurações pode ser invertida. O problema mais geral que pode ser formulado é o seguinte.

**Pergunta.** Dadas duas configurações do tabuleiro é possível efetuar movimentos válidos para obter uma configuração a partir da outra? Por exemplo, dadas as duas configurações da Figura 2, é possível sair de uma e chegar na outra efetuando movimentos válidos nas peças? Tente responder essa pergunta. Se não conseguir, continue lendo pois uma resposta será dada no final deste artigo.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 3 | 7 |
| 14 | 6 | 10 | 8 |
| 9 | | 15 | 12 |
| 13 | 1 | 11 | 4 |

$\xleftrightarrow{?}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 13 | | 4 |
| 1 | 6 | 7 | 12 |
| 9 | 3 | 11 | 5 |
| 15 | 14 | 2 | 10 |

Figura 2: Exemplo de duas configurações do tabuleiro.

Observamos que o jogo dos 15 está disponível em vários aplicativos para computadores e celulares. Para a leitura do artigo sugerimos o que está disponibilizado no seguinte link, que tem a notação utilizada neste artigo.

https://www.geogebra.org/m/teechvaf

## 2. Popularidade

Embora Noyes Chapman tenha inventado o quebra-cabeça, foi Sam Loyd, um famoso criador de quebra-cabeças e de charadas, quem popularizou o jogo, causando bastante agitação em todo o mundo. De fato, Sam Loyd ofereceu um prêmio de mil dólares (uma fortuna nos anos de 1870) para a primeira pessoa que apresentasse uma sequência correta de movimentos que apenas invertesse a posição das peças 14 e 15. [1]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | |

$\xrightarrow[\text{Sam Loyd}]{\text{Quebra-cabeça de}}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 15 | 14 | |

Figura 3: O quebra-cabeça de Sam Loyd.

Esse desafio, conhecido como **quebra-cabeça de Sam Loyd**, rapidamente tomou conta da Europa e da América e, nas palavras de Sam Loyd, "enlouqueceu o mundo" e que "o prêmio de mil dólares, oferecido para a primeira solução correta do problema, nunca foi reivindicado, embora haja milhares de pessoas que dizem ter realizado a façanha exigida". Em [6], os editores escreveram que "nas últimas semanas o quebra-cabeça de Loyd tem estado em evidência perante o público americano e pode-se dizer com segurança que tem chamado a atenção de nove em cada dez pessoas de ambos os sexos e de todas as idades e condições da comunidade".

Uma razão que pode explicar tamanha histeria está no fato de que o quebra-cabeça de Loyd é impossível. Isso significa, como veremos nas próximas seções, que é impossível efetuar uma sequência de movimentos válidos que, ao final, apenas inverte as peças 14 e 15. Essa inversão só pode ser feita se o tabuleiro é desmontado, se as peças são retiradas do tabuleiro e depois encaixadas novamente na posição desejada, o que é uma clara violação das regras do jogo.

Para Sam Loyd ter oferecido prêmio tão fabuloso naquela época, podemos imaginar que ele sabia que o quebra-cabeça proposto era impossível, embora isso nunca tenha sido constatado, e a partir daí só se pode conjecturar o quanto ele se divertiu e quanto entretenimento ele proporcionou ao enlouquecer o mundo com um desafio sabidamente impossível.

## 3. Contando as possibilidades

O tabuleiro do jogo dos 15 contém 16 casas. Nessas casas são colocadas 15 peças numeradas e uma das casas fica vazia. Como as 15 peças e o espaço vazio podem ocupar quaisquer uma das 16 casas do tabuleiro, pelo princípio multiplicativo, existe um total de $16! = 20.922.789.888.000$ configurações iniciais do tabuleiro. A título de comparação, no jogo da Mega-Sena, em que são sorteados 6 de 60 números, existem "apenas" 50.063.860 de resultados possíveis, que é uma pequena fração da quantidade de tabuleiros do jogo dos 15.

Sobre o jogo dos 15, vamos explicar detalhadamente e vamos demonstrar o teorema 3, que afirma que em metade das configurações iniciais, ou seja, em aproximadamente 10 trilhões de possibilidades, o jogo tem solução e na outra metade das possibilidades, nas outras 10 trilhões de possibilidades, o jogo não tem solução. O quebra-cabeça de Sam Loyd é um exemplo entre as 10 trilhões de possibilidades de um jogo que não tem solução.

## 4. Permutações

Nosso objetivo é entender para quais configurações iniciais do tabuleiro o jogo dos 15 tem solução, e para quais configurações iniciais o jogo não tem solução. Para fazer isso vamos utilizar a notação e propriedades dos grupos de permutações, como explicado em [2, seção V.10].

Inicialmente, enumere as casas do tabuleiro com os números de 1 a 16 em ordem crescente da esquerda para a direita e de cima para baixo, como indicado na figura 4. Observe que, durante o jogo, as casas do tabuleiro ficam paradas enquanto apenas as peças se movimentam de uma casa para outra.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 |

Figura 4: Numeração das casas do tabuleiro.

Consideremos que sobre as casas numeradas do tabuleiro são colocadas 15 peças numeradas de 1 a 15 e o espaço vazio será denotado como a peça de número 16.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 6 | 1 | 10 |
| 4 | 8 | 3 | 7 |
| 13 | | 14 | 12 |
| 5 | 2 | 11 | 15 |

Figura 5: Exemplo de uma configuração do tabuleiro com o espaço vazio na casa 10.

Dessa forma, vamos representar uma configuração do tabuleiro do jogo dos 15 com uma permutação dos números de 1 a 16. Por exemplo, a configuração da figura 5 é representada pela seguinte permutação:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 9 & 6 & 1 & 10 & 4 & 8 & 3 & 7 & 13 & 16 & 14 & 12 & 5 & 2 & 11 & 15 \end{pmatrix}.$$

Essa representação indica que na casa 1 está a peça de número 9; na casa 2 está a peça de número 6; na casa 3 está a peça de número 1; na casa 4 está a peça de número 10 e assim por diante. Na casa 10 está o espaço vazio, peça de número 16. Nesta notação, na primeira linha, os número de 1 a 16 sempre aparecem em ordem crescente. Esses números representam as casas do tabuleiro que não mudam de lugar. Os números da segunda linha representam as respectivas peças que, como mudam de posição, podem aparecer em uma ordem arbitrária.

Observe também que cada movimento válido no tabuleiro é uma inversão de duas peças adjacentes, sendo que uma dessas peças obrigatoriamente é o espaço vazio, peça de número 16. Daí, se a partir do tabuleiro da figura 5 efetuamos o movimento de deslizar a peça 8 para baixo, obtemos a configuração da figura 6.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 6 | 1 | 10 |
| 4 | | 3 | 7 |
| 13 | 8 | 14 | 12 |
| 5 | 2 | 11 | 15 |

Figura 6: Tabuleiro obtido da figura 5 movimentando a peça 8 para baixo.

Essa nova configuração da figura 6 é representada pela seguinte permutação:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 9 & 6 & 1 & 10 & 4 & 16 & 3 & 7 & 13 & 8 & 14 & 12 & 5 & 2 & 11 & 15 \end{pmatrix}.$$

Continuando da posição da figura 6, se a peça de número 4 é deslizada para a direita, obtemos a seguinte configuração ilustrada na figura 7.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 6 | 1 | 10 |
| | 4 | 3 | 7 |
| 13 | 8 | 14 | 12 |
| 5 | 2 | 11 | 15 |

Figura 7: Tabuleiro obtido da figura 6 movimentando a peça 4 para a direita.

Agora, nesta nova configuração da figura 7, o tabuleiro é representado pela seguinte permutação:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 9 & 6 & 1 & 10 & 16 & 4 & 3 & 7 & 13 & 8 & 14 & 12 & 5 & 2 & 11 & 15 \end{pmatrix}.$$

Para finalizar os exemplos, observe que a posição normal, tabuleiro da esquerda da figura 3, é representada pela permutação identidade. Já a configuração do quebra-cabeça de Sam Loyd, tabuleiro da direita da figura 3, é representada pela seguinte permutação:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 15 & 14 & 16 \end{pmatrix}.$$

## 5. Transposições

Uma **transposição** é um caso particular de uma permutação que apenas inverte a posição de dois números e atua como a identidade nos outros números. Por exemplo, a transposição $\tau = (5\ 7)$ inverte as posições dos números 5 e 7, e não mexe com a posição dos outros números.

A **composição** de duas permutações é executada da direita para a esquerda, do mesmo modo como compomos duas funções. Por exemplo, se $\tau_1 = (5\ 7)$ e $\tau_2 = (6\ 7)$ então, efetuando a composição $\tau_1\tau_2$, obtemos

$$\tau_1\tau_2(5) = \tau_1(\tau_2(5)) = \tau_1(5) = 7.$$

$$\tau_1\tau_2(6) = \tau_1(\tau_2(6)) = \tau_1(7) = 5.$$

$$\tau_1\tau_2(7) = \tau_1(\tau_2(7)) = \tau_1(6) = 6.$$

Logo, essa composição pode ser representada pela seguinte permutação, que atua como a identidade em todos os números diferentes de 5, 6 e 7.

$$\tau_1\tau_2 = (5\ 7)\,(6\ 7) = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, invertendo a ordem e efetuando a composição $\tau_2\tau_1$ obtemos

$$\tau_2\tau_1(5) = \tau_2(\tau_1(5)) = \tau_2(7) = 6.$$

$$\tau_2\tau_1(6) = \tau_2(\tau_1(6)) = \tau_2(6) = 7.$$

$$\tau_2\tau_1(7) = \tau_2(\tau_1(7)) = \tau_2(5) = 5.$$

Logo, essa composição pode ser representada pela permutação

$$\tau_2\tau_1 = (6\ 7)\,(5\ 7) = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

## 6. Permutações como composições de transposições

**Definição.** Uma permutação é **par** se ela pode ser escrita como uma composição de uma quantidade par de transposições. Por outro lado, uma permutação é **ímpar** se ela pode ser escrita como uma composição de uma quantidade ímpar de transposições.

Na teoria dos grupos de permutações, veja a seção V.10 de [2], está demonstrado um teorema que afirma que toda permutação é par ou ímpar. Isso significa que toda permutação pode ser escrita como uma composição de transposições e que, nessa composição, a paridade da quantidade de transposições é um invariante da permutação. Logo, se uma permutação está escrita como uma composição de uma quantidade par de transposições então, de qualquer modo que essa permutação for escrita desse modo, sempre vai aparecer uma quantidade par de transposições. Por outro lado, se uma permutação é uma composição de uma quantidade ímpar de transposições então de qualquer outro modo como essa permutação for escrita desse modo, ela será a composição de uma quantidade ímpar de transposições. Como veremos nas próximas seções, a existência desse invariante será utilizada no estudo do jogo dos 15 e na classificação das configurações iniciais dos tabuleiros para os quais o jogo tem solução.

Agora vamos ver dois exemplos que ilustram um algoritmo que permite escrever uma permutação como uma composição de transposições.

**Exemplo.** Vamos escrever a permutação $\sigma$ como uma composição de transposições em que

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A ideia do algoritmo é ir compondo $\sigma$ com transposições até obter a permutação identidade. Para fazer isso, a cada passo, vamos arrumando os números da esquerda para a direita para o resultado da composição ficar cada vez mais parecido com a identidade. Vejamos como isso pode ser feito. Olhando para a primeira coluna de $\sigma$, consideramos a permutação $\tau_1 = (1\ 3)$ e efetuamos a composição

$$\tau_1\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 6 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Agora, olhando para a segunda coluna dessa permutação consideramos a transposição $\tau_2 = (2\ 5)$ e efetuamos a composição

$$\tau_2\tau_1\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Olhando agora para a terceira coluna dessa permutação consideramos a transposição $\tau_3 = (3\ 6)$ e efetuamos a composição

$$\tau_3\tau_2\tau_1\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Como a quarta coluna já está arrumada, olhamos para a quinta coluna dessa permutação, consideramos a transposição $\tau_4 = (5\ 6)$ e efetuamos a composição

$$\tau_4\tau_3\tau_2\tau_1\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Como obtivemos a permutação identidade e como a inversa de uma transposição é a própria transposição segue que $\sigma = \tau_1\tau_2\tau_3\tau_4$, isto é,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2\ 5)(3\ 6)(5\ 6).$$

Daí também podemos concluir que $\sigma$ é uma permutação par pois ela está escrita como uma composição de 4 transposições.

**Exemplo.** Vamos escrever a permutação

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

como uma composição de transposições. Olhando para a primeira coluna de $\sigma$, consideramos a transposição $\tau_1 = (1\ 5)$ e efetuamos a composição

$$\tau_1\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Olhando para a segunda coluna, consideramos a transposição $\tau_2 = (2\ 5)$ e efetuamos a composição

$$\tau_2\tau_1\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Olhando para a terceira coluna, consideramos a transposição $\tau_3 = (3\ 4)$ e efetuamos a composição

$$\tau_3\tau_2\tau_1\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Olhando para a quarta coluna, consideramos a transposição $\tau_4 = (4\ 6)$ e efetuamos a composição

$$\tau_4\tau_3\tau_2\tau_1\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Olhando para a quinta coluna, consideramos a transposição $\tau_5 = (5\ 6)$ e efetuamos a composição

$$\tau_5\tau_4\tau_3\tau_2\tau_1\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Como obtivemos a permutação identidade e como a permutação inversa de uma transposição é a própria transposição, segue que $\sigma = \tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5$, isto é,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 5)(2\ 5)(3\ 4)(4\ 6)(5\ 6).$$

Daí também podemos concluir que $\sigma$ é uma permutação ímpar pois ela está escrita como uma composição de 5 transposições.

## 7. Jogo dos 15: movimentos válidos e transposições

Nas seções anteriores vimos que qualquer configuração do tabuleiro do jogo dos 15 pode ser identificada com uma permutação dos números de 1 a 16. Agora vamos ver como os movimentos válidos das peças afetam as paridades das respectivas permutações que representam o tabuleiro.

Dada uma configuração $\mathrm{A}$ do tabuleiro, representada com sua respectiva permutação $\sigma_{\mathrm{A}}$, ao ser efetuado um movimento válido que inverte a posição das peças $\mathrm{n}$ e 16, obtemos nova configuração $\mathrm{B}$ do tabuleiro, representada com a permutação $\tau\,\sigma_{\mathrm{A}}$, em que $\tau = (\mathrm{n}\ 16)$ é a transposição dos números $\mathrm{n}$ e 16. Isso significa que a cada movimento válido, acrescentamos uma transposição na permutação $\sigma_{\mathrm{A}}$ invertendo a sua paridade de par para ímpar ou de ímpar para par. De fato, por exemplo, vamos considerar a configuração $\mathrm{A}$ do tabuleiro dada na figura 8.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13 | 11 | 5 | 1 |
| 6 | 8 | | 10 |
| 7 | 12 | 3 | 4 |
| 2 | 15 | 14 | 9 |

Figura 8: Configuração $\mathrm{A}$ do tabuleiro com o espaço vazio na casa 7.

Esta configuração é representada pela permutação

$$\sigma_{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 13 & 11 & 5 & 1 & 6 & 8 & \boxed{16} & 10 & 7 & 12 & \boxed{3} & 4 & 2 & 15 & 14 & 9 \end{pmatrix}.$$

Deslizando a peça de número 3 para cima, ou seja, invertendo as peças 3 e 16, obtemos a configuração B da figura 9.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13 | 11 | 5 | 1 |
| 6 | 8 | 3 | 10 |
| 7 | 12 | | 4 |
| 2 | 15 | 14 | 9 |

Figura 9: Configuração B obtida da figura 8 pela inversão das peças 3 e 16.

Esta configuração é representada pela permutação

$$\sigma_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 13 & 11 & 5 & 1 & 6 & 8 & \boxed{3} & 10 & 7 & 12 & \boxed{16} & 4 & 2 & 15 & 14 & 9 \end{pmatrix}.$$

Comparando as permutações $\sigma_{\mathrm{A}}$ e $\sigma_{\mathrm{B}}$, vemos que a única diferença está na inversão dos números 3 e 16, destacados dentro dos quadradinhos. Daí, se $\tau = (3\ 16)$ é a transposição que inverte esses números, temos que

$$\sigma_{\mathrm{B}} = \tau\, \sigma_{\mathrm{A}}\,.$$

Generalizando, suponhamos que a partir da configuração inicial A seja efetuada uma sequência ordenada de $\mathrm{k}$ movimentos: primeiro invertemos as peças $\mathrm{n}_1$ e 16; depois invertemos as peças $\mathrm{n}_2$ e 16; e assim por diante, até o movimento $\mathrm{k}$ que inverte as peças $\mathrm{n}_{\mathrm{k}}$ e 16. Para cada um desses movimentos, consideramos a respectiva transposição

$$\tau_1 = (\mathrm{n}_1\ 16)\ ,\ \tau_2 = (\mathrm{n}_2\ 16)\ ,\ \ldots\ ,\ \tau_{\mathrm{k}} = (\mathrm{n}_{\mathrm{k}}\ 16).$$

Ao final desses $\mathrm{k}$ movimentos, obtemos uma outra configuração B do tabuleiro que está representada pela permutação $\sigma_{\mathrm{B}}$ em que

$$\sigma_{\mathrm{B}} = \tau_{\mathrm{k}} \cdots \tau_2\, \tau_1\, \sigma_{\mathrm{A}}\,.$$

Observe que se $\mathrm{k}$ é par então as permutações $\sigma_{\mathrm{A}}$ e $\sigma_{\mathrm{B}}$ têm a mesma paridade e que se $\mathrm{k}$ é ímpar então essas permutações têm paridades diferentes. Como veremos na próxima seção, essa observação tem um papel crucial nos teoremas que serão demonstrados.

## 8. Jogo dos 15: tabuleiros equivalentes

Nesta seção apresentamos uma resposta para a pergunta formulada nas primeiras páginas deste artigo: dadas duas configurações do tabuleiro do jogo dos 15, quanto é possível efetuar uma sequência de movimentos válidos para obter uma configuração a partir da outra por meio de uma sequência de movimentos válidos?

**Definição.** Duas configurações do tabuleiro do jogo dos 15 são **equivalentes** se uma configuração pode ser obtida da outra por meio de uma sequência de movimentos válidos.

Esta noção de "configurações equivalentes de tabuleiros do jogo dos 15" é uma relação de equivalência [3, seção 1.3]. Isso significa que essa relação é reflexiva, simétrica e transitiva e que o conjunto de todas as configurações de tabuleiros pode ser dividido em classes de equivalência.

Por exemplo, o quebra-cabeça de Sam Loyd, figura 3, questiona sobre a equivalência da posição normal do tabuleiro com aquela que só inverte a posição das peças 14 e 15. A pergunta que queremos responder é, então, caracterizar configurações equivalentes do tabuleiro do jogo dos 15. Para responder esta pergunta, formulada com tal generalidade, veremos que é importante levar em consideração a posição do espaço vazio sobre o tabuleiro. Isso será feito colorindo alternadamente de preto e branco as casas do tabuleiro, como está ilustrado na figura 10.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 |

Figura 10: Coloração e numeração das casas do tabuleiro do jogo dos 15.

Agora seja dada uma configuração inicial $\mathrm{A}$ das peças do jogo do 15 sobre esse tabuleiro. Como vimos anteriormente, essa configuração é representada por uma permutação $\sigma_{\mathrm{A}}$ dos números de $1$ a $16$. A cada movimento válido executado nas peças desse tabuleiro, o espaço vazio muda de uma casa preta para uma casa branca ou vice-versa, e a paridade da permutação do respectivo tabuleiro muda de par para ímpar ou de ímpar para par. Generalizando, suponhamos que a partir dessa configuração inicial $\mathrm{A}$ obtemos uma outra configuração $\mathrm{B}$ pela execução de $\mathrm{k}$ movimentos válidos. Se $\sigma_{\mathrm{B}}$ é a permutação dos números de $1$ a $16$ que representa essa configuração $\mathrm{B}$, então podemos concluir o seguinte:

- se $\mathrm{k}$ é par então as permutações $\sigma_{\mathrm{A}}$ e $\sigma_{\mathrm{B}}$ têm a mesma paridade e os espaços vazios em $\mathrm{A}$ e em $\mathrm{B}$ estão em casas de mesma cor;
- se $\mathrm{k}$ é ímpar então as permutações $\sigma_{\mathrm{A}}$ e $\sigma_{\mathrm{B}}$ têm paridades diferentes e os espaços vazios em $\mathrm{A}$ e em $\mathrm{B}$ estão em casas de cores diferentes.

Desse modo, deduzimos condições necessárias para duas configurações do tabuleiro do jogo dos 15 serem equivalentes. De fato, demonstramos que se $\mathrm{A}$ e $\mathrm{B}$ são configurações equivalentes do tabuleiro do jogo dos 15 então uma das duas condições listadas acima deve ser verdadeira. Assim, se para duas configurações do tabuleiro as condições acima são ambas falsas, então essas configurações não são equivalentes e, portanto, é impossível obter uma configuração da outra via movimentos válidos.

Diante disso, conseguimos justificar porque o quebra-cabeça de Sam Loyd, figura 3, não tem solução. De fato, a posição normal do tabuleiro pode ser representada pela permutação identidade dos números de 1 a 16, que é uma permutação par. Já a configuração do quebra-cabeça de Sam Loyd, peças 14 e 15 invertidas, pode ser representada por uma transposição desses números, que é uma permutação ímpar.

Como essas permutações têm paridades diferentes e em ambas o espaço vazio está em uma casa branca, dada a coloração da figura 10, as duas afirmações enunciadas anteriormente são falsas e, portanto, os tabuleiros não são equivalentes, e isso significa que é impossível obter uma configuração da outra por meio de uma sequência de movimentos válidos.

O teorema enunciado a seguir, e que será demonstrado na seção 10, afirma que as condições necessárias dadas anteriormente também são condições suficientes para garantir quando duas configurações do tabuleiro do jogo dos 15 são equivalentes.

**Teorema 1.** *Sejam dadas duas configurações* $\mathrm{A}$ *e* $\mathrm{B}$ *do tabuleiro do jogo dos 15 representadas por permutações* $\sigma_{\mathrm{A}}$ *e* $\sigma_{\mathrm{B}}$ *dos números de 1 a 16. Essas configurações são equivalentes se, e somente se, uma das duas afirmações a seguir é verdadeira:*

- *as permutações* $\sigma_{\mathrm{A}}$ *e* $\sigma_{\mathrm{B}}$ *têm a mesma paridade e os espaços vazios em* $\mathrm{A}$ *e em* $\mathrm{B}$ *estão em casas da mesma cor;*

- *as permutações* $\sigma_{\mathrm{A}}$ *e* $\sigma_{\mathrm{B}}$ *têm paridades diferentes e os espaços vazios em* $\mathrm{A}$ *e em* $\mathrm{B}$ *estão em casas de cores diferentes.*

Antes de apresentar a demonstração desse teorema vamos ver alguns exemplos.

**Exemplo.** Vamos verificar se as configurações A, B e C da figura 11 são equivalentes.

A =

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | 1 | 3 | 7 |
| 14 | 6 | 15 | 8 |
| 9 | | 11 | 4 |
| 5 | 2 | 13 | 10 |

B =

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 8 | 1 |
| 5 | 11 | 7 | |
| 15 | 3 | 6 | 13 |
| 9 | 14 | 12 | 10 |

C =

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 2 | 11 | 4 |
| 3 | 13 | 6 | 7 |
| | 10 | 8 | 12 |
| 5 | 1 | 15 | 14 |

Figura 11: Configuração A, B e C do tabuleiro.

Comparando com a figura 10, na configuração A o espaço vazio está em uma casa preta e ela é representada pela permutação

$$\sigma_{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 12 & 1 & 3 & 7 & 14 & 6 & 15 & 8 & 9 & 16 & 11 & 4 & 5 & 2 & 13 & 10 \end{pmatrix}.$$

Escrevendo esta permutação como uma composição de transposições obtemos

$$\sigma_{\mathrm{A}} = (1\ 12)(2\ 12)(4\ 7)(5\ 14)(7\ 15)(10\ 16)(12\ 15)(13\ 14)(14\ 15).$$

Como contamos 9 transposições nesta composição, segue que $\sigma_{\mathrm{A}}$ é uma permutação ímpar.

Na configuração B o espaço vazio está em uma casa branca e ela é representada pela permutação

$$\sigma_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 4 & 2 & 8 & 1 & 5 & 11 & 7 & 16 & 15 & 3 & 6 & 13 & 9 & 14 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

Escrevendo esta permutação como uma composição de transposições obtemos

$$\sigma_{\mathrm{B}} = (1\ 4)(3\ 8)(6\ 11)(8\ 16)(9\ 15)(10\ 16)(12\ 13)(13\ 15).$$

Como esta é uma composição de 8 transposições, segue que $\sigma_{\mathrm{B}}$ é uma permutação par.

Como as permutações $\sigma_{\mathrm{A}}$ e $\sigma_{\mathrm{B}}$ tem paridades diferentes e os espaços vazios dos dois tabuleiros estão em casas de cores diferentes, pelo teorema 1, esses dois tabuleiros são equivalentes. Ou seja, é possível efetuar uma sequência de movimentos válidos que transforma um desses tabuleiros no outro.

Agora vamos analisar a configuração C. Comparando com a figura 10, o espaço vazio dessa configuração está em uma casa branca e ela é representada pela permutação

$$\sigma_{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 9 & 2 & 11 & 4 & 3 & 13 & 6 & 7 & 16 & 10 & 8 & 12 & 5 & 1 & 15 & 14 \end{pmatrix}.$$

Escrevendo esta permutação como uma composição de transposições obtemos

$$\sigma_{\mathrm{C}} = (1\ 9)(3\ 11)(5\ 11)(6\ 13)(7\ 13)(8\ 13)(9\ 16)(11\ 13)(14\ 16).$$

Como $\sigma_{\mathrm{C}}$ é uma composição de 9 transposições, segue que ela é uma permutação ímpar.

Pelo teorema 1, os tabuleiros A e C não são equivalentes pois as permutações $\sigma_{\mathrm{A}}$ e $\sigma_{\mathrm{C}}$ possuem a mesma paridade, mas os espaços vazios desses tabuleiros estão em casas de cores diferentes. Do mesmo modo os tabuleiros B e C também não são equivalentes pois as permutações $\sigma_{\mathrm{B}}$ e $\sigma_{\mathrm{C}}$ possuem paridades diferentes mas os espaços vazios desses tabuleiros estão em casas de mesma cor.

Como consequência do teorema 1, podemos caracterizar as configurações iniciais do tabuleiro para as quais o jogo dos 15 tem solução. De fato, na posição normal do tabuleiro a respectiva permutação é a identidade, que é par, e a casa vazia está em uma casa branca, dada a coloração da figura 10. Daí, pelo teorema 1, segue o seguinte resultado.

**Teorema 2.** *Seja dada uma configuração inicial do tabuleiro do jogo dos 15 representada por uma permutação $\sigma$ dos números de 1 a 16. Para essa configuração o jogo tem solução se, e somente se, uma das afirmações é verdadeira:*

- *o espaço vazio está em uma casa branca e $\sigma$ é uma permutação par;*
- *o espaço vazio está em uma casa preta e $\sigma$ é uma permutação ímpar.*

Vamos concluir esta seção observando que podemos simplificar a análise de tabuleiros equivalentes do jogo dos 15. De fato, dada uma configuração de um tabuleiro do jogo dos 15, sempre podemos efetuar alguns movimentos e colocar o espaço vazio na casa de número 16. Desse modo, em vez de analisar a situação geral, podemos caracterizar quando duas configurações do tabuleiro, ambas com o espaço vazio na casa 16, são equivalentes. Aplicando o teorema 1 para este caso, essas configurações são equivalentes se, e somente se, as respectivas permutações dos números de 1 a 16 possuem a mesma paridade. Daí segue que existem apenas duas classes de equivalência de configurações de tabuleiros do jogo dos 15. Como num grupo de permutações a metade das permutações são pares e a outra metade das permutações são ímpares, veja [2, seção V.10], concluímos, em particular, que em metade das configurações iniciais do tabuleiro o jogo dos 15 tem solução e na outra metade das configurações iniciais do tabuleiro o jogo não tem solução.

## 9. Número de cruzamentos

Na seção anterior caracterizamos tabuleiros equivalentes do jogo dos 15 comparando as paridades de duas permutações dos números de 1 a 16. Agora vamos mostrar que isto pode ser substituído pela comparação das paridades dos números de cruzamos das permutações. Como veremos, a vantagem de utilizar o número de cruzamentos é que este pode ser calculado diretamente no tabuleiro, sem a necessidade de escrever uma permutação como uma composição de transposições.

Para exemplificar o significado do número de cruzamentos de uma permutação, vamos considerar as permutações $\sigma_1$, $\sigma_2$ e $\sigma_3$ em que

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Podemos visualizar essas permutações pelos respectivos diagramas da figura 12.

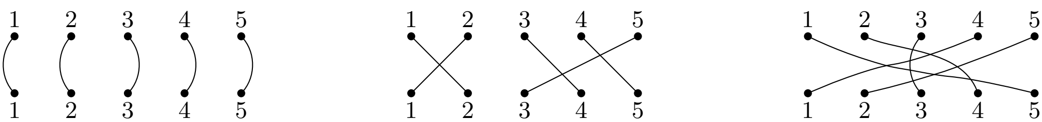


Figura 12: Diagramas dos respectivos cruzamentos nas permutações $\sigma_1$, $\sigma_2$ e $\sigma_3$.

Esses diagramas ilustram o fato que a permutação $\sigma_1$ não embaralha os números de 1 a 5; a permutação $\sigma_2$ embaralha um pouco os números de 1 a 5; e a permutação $\sigma_3$ embaralha mais os números de 1 a 5. Essa ideia intuitiva de embaralhar os números está relacionada com as quantidades de interseções das linhas que ligam os pontos da parte superior aos pontos da parte inferior de cada diagrama. A quantidade dessas interseções, de acordo com a seguinte definição, é o número de cruzamentos da permutação.

**Definição.** Seja dada uma permutação $\sigma$ dos inteiros de $1$ a $\mathrm{n}$. O **número de cruzamentos** $\ell(\sigma)$ da permutação $\sigma$ é a quantidade de pares $(\mathrm{i}, \mathrm{j})$ com $1 \leq \mathrm{i} < \mathrm{j} \leq \mathrm{n}$ que são tais que $\sigma(\mathrm{i}) > \sigma(\mathrm{j})$.

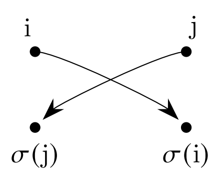


Figura 13: Ilustração de um cruzamento.

O teorema que vamos utilizar afirma que a paridade do número de cruzamentos de uma permutação é igual a paridade da permutação [2]. Isto é, uma permutação $\sigma$ é par (composição de uma quantidade par de transposições) se, e somente se, o número de cruzamentos $\ell(\sigma)$ é par. Utilizando este resultado, os teoremas 1 e 2 da seção anterior podem ser reformulados em termos do número de cruzamentos da permutação $\sigma$. Observamos que a abordagem via número de cruzamentos é utilizada em [4, páginas 177-180] para caracterizar quando o jogo dos 15 tem solução.

O próximo exemplo ilustra como o número de cruzamentos pode ser utilizado na caracterização de tabuleiros equivalentes do jogo dos 15, além de apresentar uma estratégia que simplifica o cálculo desse número.

**Exemplo.** Vamos responder o problema formulado na figura 2, ou seja, vamos verificar se aquelas duas configurações do tabuleiro do jogo dos 15 são equivalentes ou não.

Vamos começar analisando a primeira configuração da figura 2, reproduzida na figura 14.

A =

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 3 | 7 |
| 14 | 6 | 10 | 8 |
| 9 | | 15 | 12 |
| 13 | 1 | 11 | 4 |

Figura 14: Primeiro tabuleiro da figura 2.

Comparando com a figura 10, no tabuleiro da figura 14 o espaço vazio está em uma casa preta e este pode ser representado pela permutação

$$\sigma_{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 5 & 2 & 3 & 7 & 14 & 6 & 10 & 8 & 9 & 16 & 15 & 12 & 13 & 1 & 11 & 4 \end{pmatrix}.$$

Escrevendo esta permutação como uma composição de transposições obtemos

$$\sigma_{\mathrm{A}} = (1\ 5)(4\ 7)(5\ 14)(7\ 10)(10\ 16)(11\ 15).$$

Como contamos 6 transposições nesta composição, segue que $\sigma_{\mathrm{A}}$ é uma permutação par.

Agora vamos contar o número de cruzamentos da permutação $\sigma_{\mathrm{A}}$. Para fazer isso, vamos introduzir o **número de inversões** de cada uma das peças do tabuleiro. Esse número é calculado do seguinte modo. Escolhemos uma peça, por exemplo a de número 10. Começando desta peça e percorrendo o tabuleiro seguindo a ordem crescente das casas, o número de inversões da peça 10 é a quantidade de peças com número menor que 10 que aparecem neste percurso, ou seja, é o número de peças com número menor que 10 que aparecem depois dessa peça. No exemplo, as peças de número 8, 9, 1 e 4 aparecem depois da peça 10. Como encontramos 4 tais peças, dizemos que a peça 10 tem número de inversão 4. De outro modo, esse número também pode ser obtido através da permutação $\sigma_{\mathrm{A}}$. Na segunda linha da permutação, identificamos o número 10 e contamos quantos números menores que 10 aparecem à direita desse número. Podemos organizar os números de inversões das peças da configuração A dentro de uma tabela $4 \times 4$, onde cada célula informa o número de inversões da respectiva peça do tabuleiro.

**Tabuleiro** A

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 3 | 7 |
| 14 | 6 | 10 | 8 |
| 9 | 16 | 15 | 12 |
| 13 | 1 | 11 | 4 |

**Números de inversões**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 1 | 3 |
| 9 | 2 | 4 | 2 |
| 2 | 6 | 5 | 3 |
| 3 | 0 | 1 | 0 |

Figura 15: Tabuleiro A e os respectivos números de inversões de cada peça.

O número de cruzamentos desse tabuleiro, ou seja, o número de cruzamentos da permutação $\sigma_{\rm A}$, é a soma dos números de inversões de todas as peças, ou seja, é a soma dos números da tabela da direita na figura 15. Calculando essa soma, vemos que o número de cruzamentos desse tabuleiro é 46, que é um número par.

Agora vamos considerar a segunda configuração dada na figura 2, reproduzida na figura 16.

B =

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 13 | | 4 |
| 1 | 6 | 7 | 12 |
| 9 | 3 | 11 | 5 |
| 15 | 14 | 2 | 10 |

Figura 16: Segundo tabuleiro da Figura 2.

Comparando com a figura 10, no tabuleiro da figura 16 o espaço vazio está em uma casa branca e este pode ser representado pela permutação

$$\sigma_{\rm B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 8 & 13 & 16 & 4 & 1 & 6 & 7 & 12 & 9 & 3 & 11 & 5 & 15 & 14 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Escrevendo esta permutação como uma composição de transposições obtemos

$$\sigma_{\rm B} = (1\ 8)(2\ 13)(3\ 16)(5\ 8)(8\ 12)(10\ 16)(13\ 15).$$

Como contamos 7 transposições nesta composição, segue que $\sigma_{\rm B}$ é uma permutação ímpar.

Para calcular o número de cruzamentos da configuração B, podemos proceder como no caso anterior, escrevendo dentro das células de uma tabela $4 \times 4$ os números de inversões das respectivas peças.

**Tabuleiro** B

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 13 | 16 | 4 |
| 1 | 6 | 7 | 12 |
| 9 | 3 | 11 | 5 |
| 15 | 14 | 2 | 10 |

**Números de inversões**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 11 | 13 | 3 |
| 0 | 3 | 3 | 6 |
| 3 | 1 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 0 | 0 |

Figura 17: Tabuleiro B e os respectivos números de inversões de cada peça.

O número de cruzamentos do tabuleiro B é a soma dos números da tabela da direita, na figura 17. Calculando essa soma obtemos 59, que é um número ímpar.

Como os tabuleiros A e B possuem números de cruzamentos com paridades diferentes e os respectivos espaços vazios estão em casas de cores diferentes, de acordo com o teorema 1, esses tabuleiros são equivalentes, ou seja, é possível efetuar uma sequência de movimentos válidos para obter um tabuleiro a partir do outro.

Para concluir essa seção, observamos que para caracterizar configurações equivalentes de tabuleiros do jogo dos 15, não precisamos calcular os números de cruzamentos das duas configurações. De fato, precisamos apenas comparar as paridades desses números. Para identificar essas paridades, é suficiente identificar quantas peças de cada configuração tem número de inversão ímpar. Por exemplo, na tabela da direita da figura 15 contamos oito números ímpares. Como oito é par, o número de cruzamentos de $\mathrm{A}$ é par. Já na tabela da direita da figura 17 contamos onze números ímpares. Como onze é ímpar, o número de cruzamentos de $\mathrm{B}$ é ímpar.

## 10. Demonstração construtiva

Sejam dadas duas configurações $\mathrm{A}$ e $\mathrm{B}$ do tabuleiro do jogo dos 15 representadas por respectivas permutações $\sigma_{\mathrm{A}}$ e $\sigma_{\mathrm{B}}$ dos números de 1 a 16. Na seção 8 demonstramos que se essas configurações são equivalentes então uma das seguintes afirmações é verdadeira:

- as permutações $\sigma_{\mathrm{A}}$ e $\sigma_{\mathrm{B}}$ têm a mesma paridade e os espaços vazios em $\mathrm{A}$ e em $\mathrm{B}$ estão em casas de mesma cor;
- as permutações $\sigma_{\mathrm{A}}$ e $\sigma_{\mathrm{B}}$ têm paridades diferentes e os espaços vazios em $\mathrm{A}$ e em $\mathrm{B}$ estão em casas de cores diferentes.

Agora vamos apresentar uma demonstração para a reciproca deste resultado concluindo a demonstração do teorema 1. Portanto, vamos demonstrar que se uma dessas duas afirmações é verdadeira, então as configurações $\mathrm{A}$ e $\mathrm{B}$ são equivalentes. A demonstração apresentada a seguir é construtiva pois, na verdade, exibiremos um procedimento para sair do tabuleiro $\mathrm{A}$ e chegar no tabuleiro $\mathrm{B}$ pela aplicação de uma sequência de movimentos válidos. Na demonstração vamos mostrar que uma tal sequência de movimentos existe, sem a preocupação de encontrar um procedimento com a quantidade mínima de movimentos. A determinação desse número mínimo é assunto para, quem sabe, outro artigo futuro.

Na seção 8 observamos que a noção de “configurações equivalentes de tabuleiros do jogo dos 15” é uma relação de equivalência e mostramos que os tabuleiros na posição normal e na posição do quebra-cabeça de Sam Loyd não estão em uma mesma classe de equivalência. A ideia da demonstração do resultado desejado é utilizar a propriedade transitiva para sair de uma dada configuração $\mathrm{A}$ e chegar numa outra configuração $\mathrm{B}$, passando por uma configuração intermediária que será a da posição normal ou a do quebra-cabeça de Sam Loyd.

Então seja dada uma configuração inicial $\mathrm{A}$ do tabuleiro do jogo dos 15 representada pela permutação $\sigma_{\mathrm{A}}$ dos números de 1 a 16. Vamos mostrar que existe uma sequência de movimentos válidos que transforma essa configuração na da posição normal ou na do quebra-cabeça de Sam Loyd. De fato, começamos arrumando a primeira linha, colocando as peças 1, 2, 3 e 4 nas suas respectivas casas. Em seguida, sem mexer com as peças da primeira linha do tabuleiro, arrumamos a segunda linha, colocando as peças 5, 6, 7 e 8 nas suas respectivas casas. Em seguida, sem mexer com as peças das duas primeiras linhas do tabuleiro, colocamos as peças 9 e 13 nas suas respectivas casas e, em seguida, sem mexer no que já foi arrumado, colocamos as peças 10 e 14 nas suas respectivas casas. Finalmente, fazendo movimentos apenas dentro do quadrado $2\times 2$ do canto inferior direito do tabuleiro, colocamos o espaço vazio, peça de número 16, na respectiva casa do tabuleiro. Desse modo, executando esses passos, praticamente todas as peças estão nas suas respectivas casas, com exceção das peças 11, 12 e 15 que estão nas casas 11, 12 e 15 em alguma ordem aleatória que depende da configuração $\mathrm{A}$ e dos movimentos que foram executados para transformar $\mathrm{A}$ em uma nova configuração representada por $\mathrm{B}$.

Como as peças 11, 12 e 15 podem aparecer nas casas 11, 12 e 15 de $3! = 6$ maneiras diferentes, concluímos que qualquer configuração inicial A do tabuleiro sempre é equivalente a uma dessas seis possíveis configurações B. Vamos dividir essas configurações nos dois tipos indicados nas figuras 18 e 19. Como todo o restante do tabuleiro está arrumado, para identificar essas seis configurações, as figuras exibem apenas como as peças 11, 12 e 15 podem aparecer no quadrado $2 \times 2$ do canto inferior direito do tabuleiro, lembrando que o espaço vazio está na casa 16 na configuração B.

| | |
|---|---|
| 11 | 12 |
| 15 | |

| | |
|---|---|
| 12 | 15 |
| 11 | |

| | |
|---|---|
| 15 | 11 |
| 12 | |

Figura 18: Posições do tipo I das peças 11, 12 e 15 no canto inferior direito do tabuleiro.

| | |
|---|---|
| 11 | 15 |
| 12 | |

| | |
|---|---|
| 12 | 11 |
| 15 | |

| | |
|---|---|
| 15 | 12 |
| 11 | |

Figura 19: Posições do tipo II das peças 11, 12 e 15 no canto inferior direito do tabuleiro.

Agora vamos mostrar que todas as configurações do tipo I são equivalentes a da posição normal e que todas as configurações do tipo II são equivalentes a da posição do quebra-cabeça de Sam Loyd.

De fato, todas as configurações do tipo I são equivalentes entre si e para sair de uma e chegar na outra basta efetuar 4 transposições, girando o espaço vazio dentro do quadrado $2 \times 2$ do canto inferior direito do tabuleiro. Observe também que na primeira posição da figura 18 o tabuleiro está na posição normal.

De modo análogo, todas as configurações do tipo II são equivalentes entre si e para sair de uma e chegar na outra basta efetuar 4 transposições, girando o espaço vazio dentro do quadrado $2 \times 2$ do canto inferior direito do tabuleiro. Agora vamos mostrar que com 16 movimentos podemos transformar a primeira posição da figura 19 no tabuleiro do quebra-cabeça de Sam Loyd. Como todo o restante do tabuleiro já está arrumado e como esses 16 movimentos ocorrem dentro do retângulo $2 \times 3$ do canto inferior direito do tabuleiro, vamos destacar apenas esse retângulo e quais são as peças que devem ser movimentadas.

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 11 | 15 |
| 14 | 12 | |

$\longrightarrow$

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 11 | 12 |
| 15 | 14 | |

Figura 20: Canto inferior direito do tabuleiro na primeira posição da figura 19 e na configuração de Sam Loyd.

Para efetuar a mudança indicada na figura 20, movimentamos ordenadamente para o espaço vazio as seguintes peças:

$$12,\ 14,\ 10,\ 11,\ 14,\ 12,\ 15,\ 14,\ 12,\ 15,\ 14,\ 12,\ 11,\ 10,\ 15 \text{ e } 14.$$

Isso demonstra que todas as configurações do tipo II são equivalentes aquela do quebra-cabeça de Sam Loyd, que tem todas as peças na posição correta com exceção das peças 14 e 15 que estão invertidas.

Com isso, consolidamos o que foi feito no enunciado do teorema 3.

**Teorema 3.** *Para qualquer configuração inicial do tabuleiro do jogo dos 15, existe uma sequência de movimentos válidos que transforma a dada configuração na posição normal ou na posição do quebra-cabeça de Sam Loyd.*

Para concluir, dada uma configuração inicial $\mathrm{A}$, no teorema 3, vamos caracterizar quando aparece a posição normal ou quando aparece a posição do quebra-cabeça de Sam Loyd. Como veremos a seguir, essa caracterização será dada pela paridade da permutação $\sigma_{\mathrm{A}}$ e pela cor da casa do espaço vazio na configuração $\mathrm{A}$. Lembramos que as casas do tabuleiro do jogo dos 15 estão coloridas de acordo com a figura 10.

De fato, lembramos que o tabuleiro na posição normal pode ser representado pela permutação identidade $\sigma_{\mathrm{N}} = \mathrm{id}$, que é par, e que o tabuleiro na configuração do quebra-cabeça de Sam Loyd pode ser representado pela transposição $\sigma_{\mathrm{SL}} = (14\ 15)$, que é ímpar. Dada uma configuração inicial $\mathrm{A}$ do tabuleiro, representada por uma permutação $\sigma_{\mathrm{A}}$ dos números de 1 a 16, o teorema 3 mostra que existem transposições

$$\tau_1 = (\mathrm{n}_1\ 16)\ ,\ \tau_2 = (\mathrm{n}_2\ 16)\ ,\ \ldots\ ,\ \tau_{\mathrm{k}} = (\mathrm{n}_{\mathrm{k}}\ 16)$$

tais que

$$\sigma_{\mathrm{A}} = \tau_{\mathrm{k}} \cdots \tau_2\, \tau_1\, \sigma_{\mathrm{N}} \quad \text{ou} \quad \sigma_{\mathrm{A}} = \tau_{\mathrm{k}} \cdots \tau_2\, \tau_1\, \sigma_{\mathrm{SL}}.$$

Na primeira igualdade, o tabuleiro $\mathrm{A}$ é equivalente ao da posição normal. Nesse caso, se $\mathrm{k}$ é par, então o espaço vazio em $\mathrm{A}$ está numa casa branca e a permutação $\sigma_{\mathrm{A}}$ é par. Por outro lado, se $\mathrm{k}$ é ímpar, então o espaço vazio em $\mathrm{A}$ está numa casa preta e a permutação $\sigma_{\mathrm{A}}$ é ímpar. Na segunda igualdade, o tabuleiro $\mathrm{A}$ é equivalente ao do quebra-cabeça de Sam Loyd. Nesse caso, se $\mathrm{k}$ é par, então o espaço vazio em $\mathrm{A}$ está numa casa branca e a permutação $\sigma_{\mathrm{A}}$ é ímpar. Por outro lado, se $\mathrm{k}$ é ímpar, então o espaço vazio em $\mathrm{A}$ está numa casa preta e a permutação $\sigma_{\mathrm{A}}$ é par. Essas conclusões estão resumidas na tabela 1.

| Paridade de $\sigma_{\mathrm{A}}$ | Casa do espaço vazio em $\mathrm{A}$ | Tabuleiro equivalente |
|---|---|---|
| par | branca | Normal |
| ímpar | preta | Normal |
| par | preta | Sam Loyd |
| ímpar | branca | Sam Loyd |

Tabela 1: Classe de equivalência de um tabuleiro, dada a paridade da respectiva permutação dos números de 1 a 16 e a cor da casa do espaço vazio.

Lembrando que a noção de "configurações equivalentes de tabuleiros do jogo dos 15" é uma relação de equivalência, a tabela 1 caracteriza as duas classes de equivalência existentes: a classe da posição normal e a classe do quebra-cabeça de Sam Loyd. Como uma relação de equivalência é transitiva, a tabela 1 conclui a demonstração do teorema 1, pois para dois tabuleiros do jogo dos 15 serem equivalentes, ambos devem pertencer a uma mesma classe de equivalência. Como só existem duas classes de equivalência, concluímos que para dois tabuleiros serem equivalentes ambos devem pertencer à classe do tabuleiro na posição normal, ou ambos devem estar na classe do tabuleiro do quebra-cabeça de Sam Loyd.

## 11. Considerações finais

No artigo, utilizamos conceitos e resultados da teoria de grupos de permutações para fazer um estudo detalhado do jogo dos 15 e, a partir do estudo realizado, conseguimos:

- mostrar que o quebra-cabeça de Sam Loyd não tem solução;
- mostrar que dada uma configuração inicial do tabuleiro, podemos aplicar uma sequência de movimentos válidos para obter ou o tabuleiro na posição normal ou o tabuleiro na posição do quebra-cabeça de Sam Loyd;
- caracterizar quando uma configuração inicial do tabuleiro é equivalente ao tabuleiro na posição normal ou quando ela é equivalente a da posição do quebra-cabeça de Sam Loyd;
- apresentar condições necessárias e suficientes para duas configurações do tabuleiro serem equivalentes.

Para estimular estudos adicionais, os leitores interessados podem pesquisar e refletir sobre os seguinte problemas:

- estabelecer um algoritmo que, dada uma configuração inicial do tabuleiro do jogo dos 15, otimize a quantidade de movimentos que transformam essa configuração na posição normal ou na posição do quebra-cabeça de Sam Loyd;
- ampliar o estudo realizado para jogos similares no formato de um retângulo com $n$ linhas e $m$ colunas sobre o qual são colocadas $nm - 1$ peças numeradas e um espaço vazio.
- ampliar o estudo para tabuleiros com formatos diferentes, por exemplo, tabuleiros com um ou mais buracos, como o que está exemplificado na figura 21. [1, páginas 797-799]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | ■ | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | |

Figura 21: Exemplo de um tabuleiro generalizado em que a casa central não pode ser utilizada.

## Referências

[1] A.F. Archer, "A modern treatment of the 15 puzzle", The American Mathematical Monthly, (1999), 106 (9): 793–799.

[2] A. Garcia e Y. Lequain, Elementos de Álgebra, 7ª edição, Projeto Euclides, IMPA, 2022.

[3] A. Gonçalves, Introdução à Álgebra, 6ª edição, Projeto Euclides, IMPA, 2017.

[4] E. Kasner and J. Newman, “Mathematics and the Imagination”, 1940, Simon & Schuster.

[5] W.W. Johnson, “Notes on the 15 Puzzle”, American Journal of Mathematics, (1879), 2 (4): 397–399.

[6] W.E. Story, “Notes on the 15 Puzzle”, American Journal of Mathematics, (1879), 2 (4): 399–404.

[7] P. Trapa, “Permutations and the 15-Puzzle”, January 2004, Publications of the University of Utah.

Francisco Dutenhefner
Universidade Federal de Minas Gerais
<chico@ufmg.br>

Recebido: 03/06/2024
Publicado: 22/11/2024