PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.12, n.3, 2024
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2024/pmo1226

O Teorema q-binomial por meio da perspectiva matemática de George Pólya

Marcia A. G. Teixeira Irene M. Craveiro

Resumo

Este artigo descreve a abordagem do polinômio de Gauss proposta pelo renomado matemático George Pólya. O polinômio de Gauss, também conhecido como coeficiente $q-$ binomial, foi explorado de maneira independente por diversos matemáticos do século XIX. A interpretação dos coeficientes q-binomiais em termos de áreas sob uma classe específica de caminhos reticulados é atribuída a George Pólya. Além disso, apresentamos a demonstração do Teorema $q-$ Binomial feita por Pólya, a qual utiliza igualdades de polinômios para validar o resultado.

Palavras-chave: Polinômio de Gauss, Caminho Reticulado; Fórmula Explicita; Teorema $q-$Binomial.

Abstract

This article describes the Gaussian polynomial approach proposed by renowned mathematician George Pólya. The Gaussian polynomial, also known as the $q-$ binomial coefficient, was explored independently by several 19th century mathematicians. The interpretation of $q-$binomial coefficients in terms of areas under a specific class of lattice paths is attributed to George Pólya. Furthermore, we present the proof of the $q-$ Binomial Theorem made by Pólya, which uses polynomial equalities to validate the result.

Keywords: Gaussian polynomial; Reticulated Path; Explicit Formula; $q-$Binomial Theorem

1. Introdução

Este artigo está dividido em 5 seções, sendo que primeira é a introdução e a segunda será destinada para discorrer sobre a vida pessoal e profissional do Matemático George Pólya enfatizando suas contribuições na Matemática e no Ensino de Matemática.

A terceira seção será a apresentação do polinômio de Gauss na variável q através de uma certa classe de caminhos reticulados. Essa ideia foi inspirada ao ler a referência [7].

A quarta seção seção é dedicada a exibir fórmulas que enumeram a classe de caminhos reticulados que geram o polinômio de Gauss, culminando com sua fórmula explícita descrita na Seção 5, por meio da Proposição 1. Nesta seção comentamos que este polinômio é uma generalização do coeficiente binomial, pois, quando calculamos o limite dessa função quando a variável q tende a 1, obtemos o coeficiente binomial.

A quinta seção será destinada a fazer a prova do Teorema $q-$binomial, dado por George Pólya, que recorre à igualdade de polinômios. Além disso, ao longo da demonstração, aparece naturamente a fórmula explícita para o coeficiente $q-$ binomial.

Em [2], página 482, o tratamento do polinômio de Gauss na variável q está de forma breve e os autores comentam que a definição pode ser dada como a área abaixo ou acima de $\mathrm{C} \in \mathcal{C}(\mathrm{m},\mathrm{n})$, onde, $\mathcal{C}(\mathrm{m},\mathrm{n}) = \{\mathrm{C}; \mathrm{C}$ é um caminho reticulado saindo do $(0,0)$ chegando em $(\mathrm{m},\mathrm{n})\}$ sendo os movimentos uma unidade para cima ou uma unidade para direita até o ponto (m,n), definindo o caminho C. A ideia dos autores está em usar um parâmentro q para contar e o fato que na expansão de $(\mathrm{x}+\mathrm{y})^{\mathrm{n}}$, com n natural o termo xy é diferente de yx e $\mathrm{yx} = \mathrm{qxy}$. Para mais detalhes leia [2].

As referências [3] e [9] oferecem uma análise mais aprofundada do polinômio de Gauss, seguindo o mesmo ponto de vista de [2]. Além disso, apresentam uma perspectiva adicional sobre a descrição do polinômio de Gauss, relacionada a classes específicas de partições de um número inteiro positivo n, com restrições quanto ao número e tamanho das partes. Esses polinômios contam o número de tais partições. Já em [14], há uma abordagem interessante do polinômio de Gauss através das relações de Girard, além de explorar o conceito por meio de partições com restrições e ladrilhamentos. Para uma compreensão mais aprofundada, consulte [3], [9] e [14].

2. O matemático George Pólya

George Pólya (1887–1985) nasceu em 13 de dezembro de 1887, na efervescente Budapeste, então capital do Reino da Hungria, uma parte do vasto Império Austro-Húngaro. Seus pais, Anna Deutsch e Jakab Pollák, ambos de origem judaica, viram seu nome ser transformado para Pólya quando György, seu filho, veio ao mundo. Essa mudança não foi apenas uma questão de formalidade, mas sim um reflexo das transformações políticas e sociais que marcaram a história da Hungria. Em 1867 o país uniu-se ao Império Austríaco, formando o Império Austro-Húngaro, uma união que persistiu até o final da Primeira Guerra Mundial, em 1918.

O patriarca da família, Jakab Pollák, segundo [1],[5],[8], tomou a decisão de alterar o sobrenome para Pólya em 1882, numa época em que as oportunidades para os judeus na sociedade húngara eram limitadas. Esta mudança não foi apenas um ato de adaptação, mas uma estratégia para ampliar as chances de ascensão social e profissional. Contudo, Jakab faleceu em 1897, deixando Anna, sua esposa, aos 44 anos, para cuidar de seus cinco filhos, incluindo o jovem George, que tinha apenas 10 anos na época.

O matemático Pólya estudou em uma escola que priorizava a memorização, prática que ele considerava monótona e sem utilidade, entretanto, ele se destacou como um excelente aluno no ensino secundário. Após graduar-se em 1905, sendo reconhecido como um dos quatro melhores alunos de sua turma, obteve uma bolsa de estudos para a Universidade de Budapeste. Inicialmente matriculado em Direito, seguindo os passos de seu pai, Pólya logo trocou para o curso de línguas e literatura e, posteriormente, dedicou-se ao estudo de Latim, Física, Filosofia e, finalmente, Matemática, concluindo seu doutorado em 1912.

Em [4] e [11] vimos que foi através do estímulo de seu professor, Bernát Alexander, que Pólya voltou seu interesse para a Matemática e a Física. Este período de autodescoberta e orientação acadêmica coincidiu com a agitação intelectual e política da Europa do início do século XX. Na área da Matemática, Pólya desenvolveu trabalhos abrangentes que permeiam diversas disciplinas, como probabilidades, séries, análise, teoria dos números, geometria, combinatória e física matemática. Reconhecido como um professor exemplar, sempre demonstrou grande interesse em questões pedagógicas ao longo de sua carreira.

No outono de 1913, Pólya mudou-se para Göttingen, onde teve a oportunidade de conhecer Hilbert. Durante esse período, publicou uma de suas maiores realizações, a solução do problema do passeio aleatório. Em seguida, em 1913, partiu para Paris, onde realizou seu pós-doutorado. Após receber um convite para lecionar na Eidgenössische Technische Hochschule Zurich, na Suíça, George Pólya encontrou-se imerso em um ambiente acadêmico dinâmico, colaborando com renomados matemáticos como Hurwitz, Geiser, Bernays, Zermelo e Weyl. A eclosão da Primeira Guerra Mundial trouxe desafios, mas também oportunidades para

Pólya, que, devido a uma lesão anterior, foi considerado inapto para o serviço militar húngaro, alinhando-se com suas convicções pacifistas. Adotando a cidadania suíça, ele encontrou na Suíça não apenas um lar, mas também o amor, casando-se em 1918 com Stella Vera Weber, filha de um professor de física da Universidade de Neuchâtel.

Durante seu tempo em Zurique, Pólya destacou-se não apenas como educador, mas também como prolífico pesquisador, contribuindo significativamente para diversas áreas da matemática. Suas publicações abordaram temas tão diversos como séries, teoria dos números, combinatoria e sistemas de rotação. Foi nesse contexto intelectualmente estimulante que ele lançou sua obra seminal ”How to Solve It”(Como Resolver), enfatizando a importância das heurísticas na resolução de problemas, uma obra que transcendeu os limites da Matemática, influenciando diversas áreas do conhecimento.

As contribuições de Pólya abrangem diversos campos da Matemática, como probabilidade, análise complexa, combinatória e teoria dos números. Seu nome está associado a conceitos importantes em cada um desses domínios. Na teoria da probabilidade, há o critério de Pólya; na análise complexa, encontramos: os picos de Polya, a representação de Polya e o ”Teorema do intervalo de Pólya; na combinatória, destacam-se: o Teorema de enumeração de Pólya e o prestigioso Prêmio Pólya em Teoria Combinatória e Suas Aplicações, concedido pela Society for Industrial and Applied Mathematics (Sociedade de Matemática Industrial e Aplicada). Essa amplitude de influência é um testemunho do impacto duradouro das contribuições de Pólya para a Matemática.

Em uma entrevista concedida logo após completar 90 anos e publicada na revista Mathematical People: Profiles and Interviews (Birkhauser Boston: 1985), Pólya declarou: Eu vim para a Matemática indiretamente. Eu estava realmente mais interessado em Física e Filosofia e pensei sobre isso. É um pouco abreviado, mas não totalmente errado, dizer: pensei que não era bom o suficiente para a Física e sou bom demais para a Filosofia. A Matemática está no meio. Também, Pólya certa vez deu um sábio conselho: Se você não consegue resolver um problema, existe um problema mais fácil que você pode resolver: encontre-o.

Em 1953, Pólya aposentou-se de Stanford, mas continuou com uma vida matemática extremamente ativa, preocupando-se especialmente com a educação matemática. Ele ainda publicou mais livros sobre a arte de resolver problemas matemáticos. Por exemplo : Matemática e raciocínio plausível (1954) e Descoberta matemática que foi publicada em dois volumes (1962 e 1965).

Mesmo que as abordagens de Pólya sejam vistas hoje com menor entusiasmo do que eram há algumas décadas, pode-se dizer que a história da resolução de problemas na educação matemática pode ser dividido em duas épocas: a época anterior à Pólya e a época depois de Pólya.

3. Polinômio de Gauss via uma classe caminhos reticulados

O polinômio de Gauss, também conhecido como coeficiente q–binomial, foi explorado de forma independente por vários matemáticos do século XIX. A interpretação do coeficiente q– binomial em termos de áreas abaixo de uma certa classe de caminhos reticulados é de autoria de George Pólya, conforme [7], Figura 1.

Figura 1: A generalização do coefiente binomial

The Gaussian coefficients $\left[{n \atop r}\right]$ are a generalization of the binomial coefficients. They can be defined by

$$(1-x)(1-qx)\ldots(1-q^{n-1}x) = \left[{n \atop 0}\right] + \left[{n \atop 1}\right]x + \left[{n \atop 2}\right]qx^2 + \ldots + \left[{n \atop n}\right]q^{n(n-1)/2}x^n.$$

It can then be shown that

$$\left[{n \atop r}\right] = \Pi_{k=1}^{n}(q^{n-k+1}-1)/(q^k-1) = \Sigma_{k=0}^{n(n-r)}A_{n,r}(k)q^k$$

is a polynomial in q with positive integer coefficients. Pólya made the remarkable discovery that $A_{n,r}(k)$ is the number of lattice paths of length $r+n$ from $(0, 0)$ to (r, n) such that the area of the region enclosed by the lattice path, the x-axis, and the line $x = r$ is k.

Fonte: [7], volume 4, na página 444.

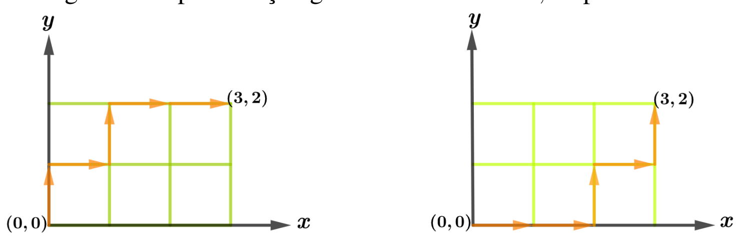
Definição 1. Sejam $\mathrm{m}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}$ diferentes de zero. Considere os $\mathrm{m.n}$ pares ordenados distribuídos no primeiro quadrante do plano carteisano $\mathrm{x0y}$, de origem $(0,0)$ com a orientação usual, ou seja, $\mathrm{M} = \{(0,0),(0,1),\ldots(0,\mathrm{n}),\ldots,(\mathrm{m},0),(\mathrm{m},1),\ldots(\mathrm{m},\mathrm{n})\}$. Um caminho reticulado C consiste de um gráfico formado por meio dos pontos de M que sai da coordenada $(0,0)$ e, em seguida, escolhe ligar o próximo ponto de M uma unidade para a direita ou uma unidade para cima, essa regra vai sendo seguida até chegar a coordenada (m,n), formando o caminho C.

Exemplo 1. Considere

$$\mathrm{M} = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2)\},$$

no caso $\mathrm{m} = 3$ e $\mathrm{n} = 2$. A Figura 2 descreve dois caminhos reticulados, C e C' distintos saindo de $(0,0)$ e chegando em $(3,2)$.

Figura 2: Representação geométrica de C e C', respectivamente.



Fonte: Autor

Observe que, ao desenhar os caminhos C e C', abaixo deles formam-se quadrados unitários limitados pelas retas $\mathrm{y} = 0$, $\mathrm{x} = 0$, $\mathrm{x} = 3$ e o caminho reticulado. No primeiro caso a área dessa região é $\mathrm{A}(\mathrm{C}) = 5$ e, no segundo caso, é $\mathrm{A}(\mathrm{C}') = 1$.

Dados m, n inteiros positivos vamos considerar o conjunto de todos os caminhos reticulados partindo de $(0,0)$ e chegando em (m,n) como segue:

$$\mathcal{C}(\mathrm{m},\mathrm{n}) = \{\mathrm{C}; \mathrm{C} \text{ é um caminho reticulado saindo do } (0,0) \text{ chegando em } (\mathrm{m},\mathrm{n})\}.$$

Segue de [13], $|\mathcal{C}(\mathrm{m},\mathrm{n})| = \binom{\mathrm{m}+\mathrm{n}}{\mathrm{n}} = \binom{\mathrm{m}+\mathrm{n}}{\mathrm{m}}$.

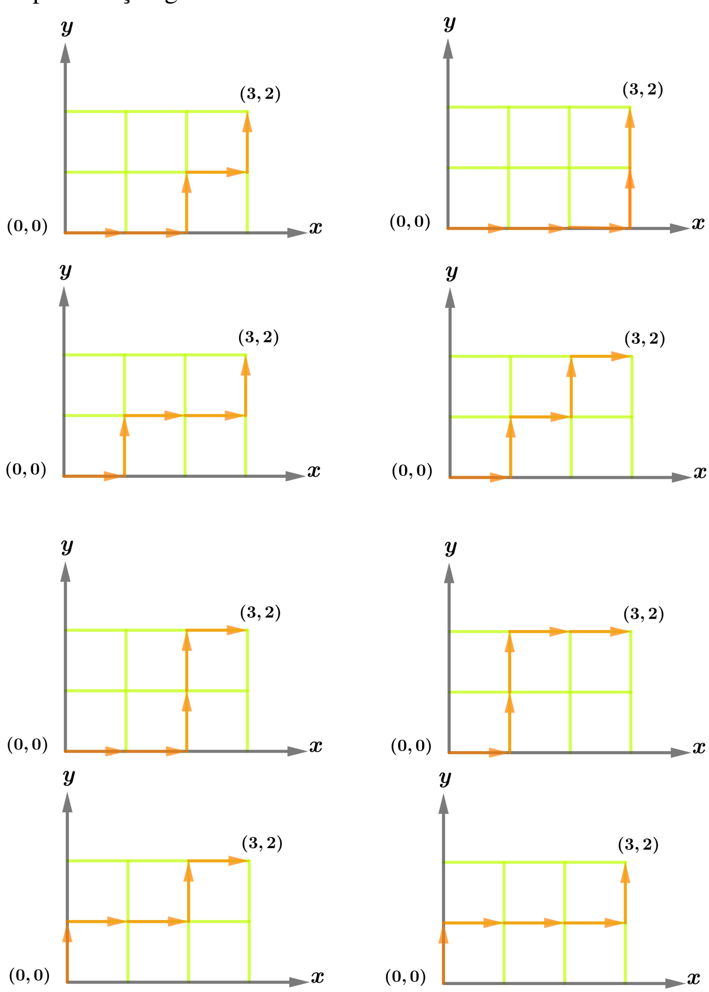
Definição 2. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ diferentes de zero e $C \in \mathcal{C}(m, n)$. A notação $A(C)$ é a representação da área da região limitada abaixo pelo caminho reticulado C, pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = m$. O polinômio na variável q associado ao conjunto $\mathcal{C}(m, n)$ é $F_q(m, n) = \sum_{C \in \mathcal{C}(m,n)} q^{A(C)}$.

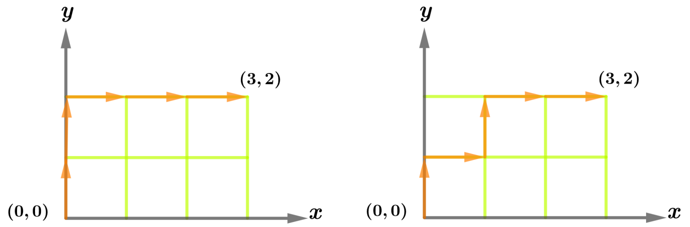
Segue direto da definição que $F_q(0, n) = q^0 = 1$ e $F(m, 0) = q^0 = 1$, para $q \neq 0$ e vamos convencionar $F_q(0, 0) = 1$.

A proposta que seguimos a partir da Figura 2 é determinar uma fórmula explícita para a função geradora que estabelece uma classe de caminhos reticulados $C \in \mathcal{C}(m, n)$ que tem comprimento igual a $m + n$ e a área igual a $A(C)$, essa função geradora é exatamente o polinômio de Gauss.

Exemplo 2. Considere todos os caminhos reticulados $C \in \mathcal{C}(3, 2)$, onde, de acordo com a Figura 3, o total é $\binom{3+2}{2} = \binom{5}{2} = 10$.

Figura 3: Representação geométrica de todos os caminhos reticulados de $C \in \mathcal{C}(3, 2)$.





Fonte: Autor

Observe que

$$F_q(3,2) = \sum_{C \in \mathcal{C}(3,2)} q^{A(C)} = q^6 + q^5 + 2q^4 + 2q^3 + 2q^2 + q^1 + q^0 = 1 + q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6.$$

4. Fórmulas de recorrências para a família de polinômios $F_q(m,n)$

Nosso próximo passo é estabelecer uma fórmula de recorrência para o polinômio $F_q(m,n)$, para isso vamos particionar o conjunto $\mathcal{C}(m,n)$ em dois conjuntos disjuntos:

1) $\mathcal{C}_1$ é formado por todos os caminhos reticulados L que partem do $(0,0)$ até (m,n), cujo o último passo é para cima. Observe que $A(L) = A(C)$ para todo $C \in \mathcal{C}(m,n-1)$ e $|\mathcal{C}_1| = |\mathcal{C}(m,n-1)|$. Logo,

$$F_q(m,n-1) = \sum_{C \in \mathcal{C}(m,n-1)} q^{A(C)} = \sum_{L \in \mathcal{C}_1} q^{A(L)}.$$

2) $\mathcal{C}_2$ é formado por todos caminhos reticulados S que partem do $(0,0)$ até (m,n), cujo o último passo é para direita. Observe que $A(S) \neq A(C)$ para todo $C \in \mathcal{C}(m-1,n)$, pois a região S tem n quadrados unitários a mais do que a área gerada pelo $C \in \mathcal{C}(m-1,n)$. Logo $A(S) = A(C)+n$ e $|\mathcal{C}(m-1,n)| = |\mathcal{C}_2|$. Portanto

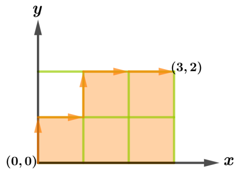
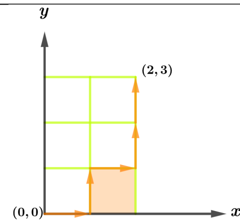
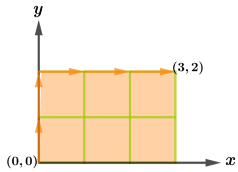
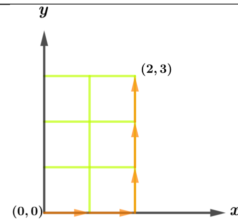
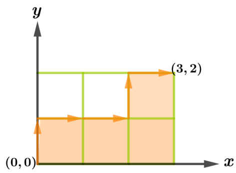
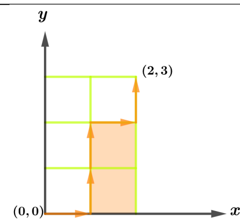
$$\sum_{S \in \mathcal{C}_2} q^{A(S)} = \sum_{C \in \mathcal{C}(m-1,n)} q^{A(C)+n} = \sum_{C \in \mathcal{C}(m-1,n)} q^{A(C)} q^n = q^n \sum_{C \in \mathcal{C}(m-1,n)} q^{A(C)} = q^n F_q(m-1,n).$$

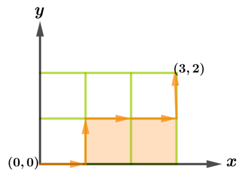
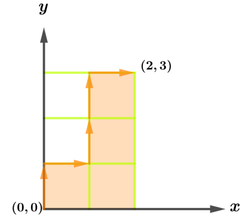
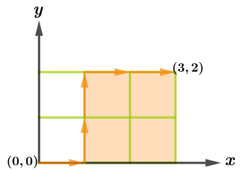
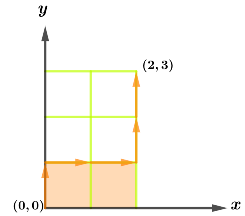
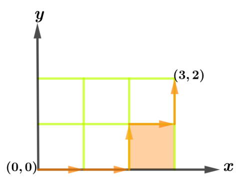
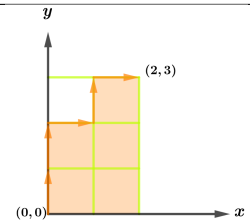
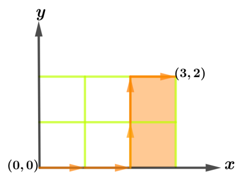
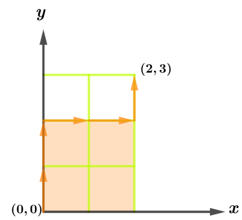
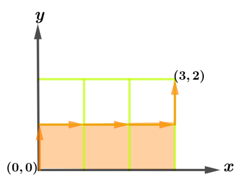
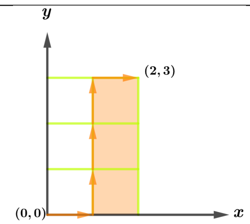
Segue de 1) e 2) que $\mathcal{C}_1 \bigcup \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}(m,n)$ e $\mathcal{C}_1 \bigcap \mathcal{C}_2 = \emptyset$ e, além disso,

$$F_q(m,n) = F_q(m,n-1) + q^n F_q(m-1,n). \tag{1}$$

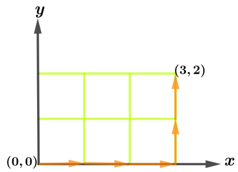
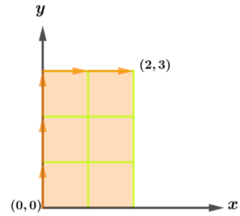
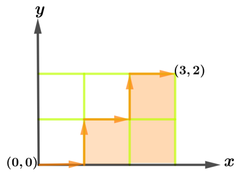
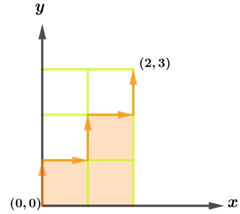
Para ilustrar a Tabela 1 descreve uma bijeção natural entre os conjuntos de caminhos reticulados $C \in \mathcal{C}(3,2)$ e $C' \in \mathcal{C}(2,3)$.

Tabela 1: Bijeção entre os conjuntos de caminhos reticulados $\mathrm{C} \in \mathcal{C}(3,2)$ e $\mathrm{C}^{'} \in \mathcal{C}(2,3)$.

$\mathrm{C} \in \mathcal{C}(3,2)$	Área	$\mathrm{C}^{'} \in \mathcal{C}(2,3)$	Área
	$A(\mathrm{C}) = 5$		$A(\mathrm{C}^{'}) = 1$
	$A(\mathrm{C}) = 6$		$A(\mathrm{C}^{'}) = \varnothing$
	$A(\mathrm{C}) = 4$		$A(\mathrm{C}^{'}) = 2$

<table>
<tr><th>$C \in \mathcal{C}(3,2)$</th><th>Área</th><th>$C' \in \mathcal{C}(2,3)$</th><th>Área</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$A(C) = 2$</td><td>
</td><td>$A(C') = 4$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$A(C) = 4$</td><td>
</td><td>$A(C') = 2$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$A(C) = 1$</td><td>
</td><td>$A(C') = 5$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$A(C) = 2$</td><td>
</td><td>$AC') = 4$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$A(C) = 3$</td><td>
</td><td>$A(C') = 3$</td></tr>
</table>

Fonte: Autor

$C \in \mathcal{C}(3,2)$	Área	$C^{'} \in \mathcal{C}(2,3)$	Área
	$A(C) = \varnothing$		$A(C^{'}) = 6$
	$A(C) = 3$		$A(C^{'}) = 3$

Fonte: Autor

Observe que $F_q(3,2) = F_q(2,3)$, por inspeção, e, além disso, $A(C) = 6 - A(C^{'})$. Essa bijeção é dada pela transformação linear que troca as coordenadas (x,y) por (y,x) como segue:

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

Teorema 1. *Sejam* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $f(x,y) = (y,x)$ *e* $m, n \in \mathbb{N}$*, com* $m, n > 0$*. Então,*

1) f *é bijetora;*

2) Para todo $C \in \mathcal{C}(m,n)$ *existe um* $C^{'} \in \mathcal{C}(n,m)$*, tal que,* $f(C) = C^{'}$*. Além disso,* $A(C) + A(C^{'}) = mn$*. Os caminhos* C *e* $f(C)$ *estão em correspondência biunívoca;*

3) $f(\mathcal{C}(m,n)) = \mathcal{C}(n,m)$.

Demonstração: Faremos agora a prova de 1), para isso considere $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ tais que $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$. Logo, $(y_1,x_1) = (y_2,x_2)$, donde, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$ e, assim, $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ e f é injetora. A função f é sobrejetora, de fato, dado $(w,v) \in \mathbb{R}^2$, tome $(v,w) \in \mathbb{R}^2$ e observe que $f(v,w) = (w,v)$.

O resultado 3) segue direto de 2).

Para verificarmos 2) iremos trabalhar inicialmente com dois caminhos particulares $C_0, C_n \in \mathcal{C}(m,n)$. O caminho C_0 é o caminho que se inicia no ponto $(0,0)$ e se desloca n unidades para cima e em seguida a partir do ponto $(0,n)$, de acordo com a definição, irá se deslocar m unidades para a direita, chegando no ponto (m,n). Por outro lado, o caminho C_n, inicialmente se desloca a partir de $(0,0)$, m unidades para direita até o ponto $(m,0)$ e, a partir daí, se desloca n unidades para cima, chegando em (m,n).

Observe que

$$f(C_0) = \{f(x,y); (x,y) \in C_0\} =$$
$$\{f(x,y); (x,y) \in \{(0,y); 0 \le y \le n\}\} \cup \{f(x,y); (x,y) \in \{(x,n); 0 \le x \le m\}\} =$$

$$\{(y,x); x = 0 \text{ e } 0 \leq y \leq n\} \cup \{(y,x); y = n \text{ e } 0 \leq x \leq m\} =$$
$$\{(u,0); 0 \leq u \leq n\} \cup \{(n,v); 0 \leq x \leq v\} = C_0' \in \mathcal{C}(n,m).$$

De acordo com a definição, $A(C_0) = mn$ e $A(f(C_0)) = A(C_0') = 0$.

Com relação ao caminho C_n temos

$$f(C_n) = \{f(x,y); (x,y) \in C_n\} =$$
$$\{f(x,y); (x,y) \in \{(x,0); 0 \leq x \leq m\}\} \cup \{(f(x,y); (x,y) \in \{(m,y); 0 \leq y \leq n\}\} =$$
$$\{(y,x); y = 0 \text{ e } 0 \leq x \leq m\} \cup \{(y,x); x = m \text{ e } 0 \leq y \leq n\} =$$
$$\{(0,x); 0 \leq x \leq m\} \cup \{(y,m); 0 \leq y \leq n\} =$$
$$\{(0,v); 0 \leq v \leq m\} \cup \{(u,m); 0 \leq u \leq n\} = C_n' \in \mathcal{C}(n,m).$$

De acordo com a definição, $A(C_n) = 0$ e $A(f(C_n)) = A(C_n') = mn$.

Note que, nesses dois casos particulares ocorre que $A(C_0) + A(f(C_0)) = mn$ e $A(C_n) + A(f(C_n)) = mn$.

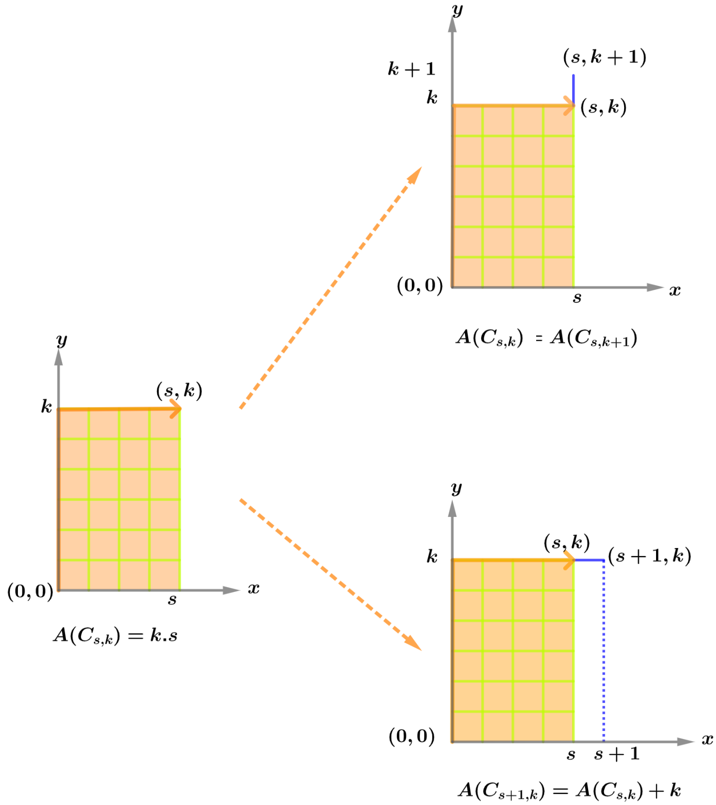
Agora, considere um caminho $C \in \mathcal{C}(m,n)$ que se inicia no $(0,0)$ e desloca-se k unidades para cima até o ponto $(0,k)$, em seguida, a partir de $(0,k)$, desloca-se s unidades para direita, chegando no ponto (s,k). Observa-se nesse instante que abaixo desse pedaço do caminho C há $S.k$ quadrados de unidades 1, limitados pelos eixo x, eixo y, a reta $x = s$ e $y = k$. Vamos denotar esse pedaço de C de C_{sk}, $0 \leq k \leq n$ e $0 \leq s \leq m$.

$$f(C_{sk}) = \{f(x,y); (x,y) \in C_{sk}\} =$$
$$\{f(x,y); (x,y) \in \{(0,t); 0 \leq t \leq k\}\} \cup \{f(x,y); (x,y) \in \{(l,k); 0 \leq l \leq s\}\}$$
$$\{(y,x); x = 0 \text{ e } y = t, \text{ com } 0 \leq t \leq k\} \cup \{(y,x); x = l \text{ e } y = k, \text{ com } 0 \leq l \leq s\}$$
$$\{(t,0); 0 \leq t \leq k\} \cup \{(k,l); 0 \leq l \leq s\} = C_{sk}'.$$

Observe que C_{sk}' desloca-se do $(0,0)$ k unidades para direta e depois de $(k,0)$ desloca-se s unidades para cima, não contribuindo com quadrados de 1 unidade para $f(C_{sk})$. Logo $A(C_{sk}) = ks$ e $A(f(C_{sk})) = 0$.

Agora vamos considerar o pedaço do caminho C, C_{sk}, e partir do ponto (s,k) podemos optar ir uma unidade para direta, denotando por $C_{s+1,k}$ ou uma unidade para cima, denotando $C_{s,k+1}$. No primeiro caso, $A(C_{s+1,k}) = A(C_{sk}) + k$, no segundo caso, $A(C_{s,k+1}) = A(C_{sk})$.

Figura 4: Diagrama instrutivo, para $0 < k < n$ e $0 < s < m$



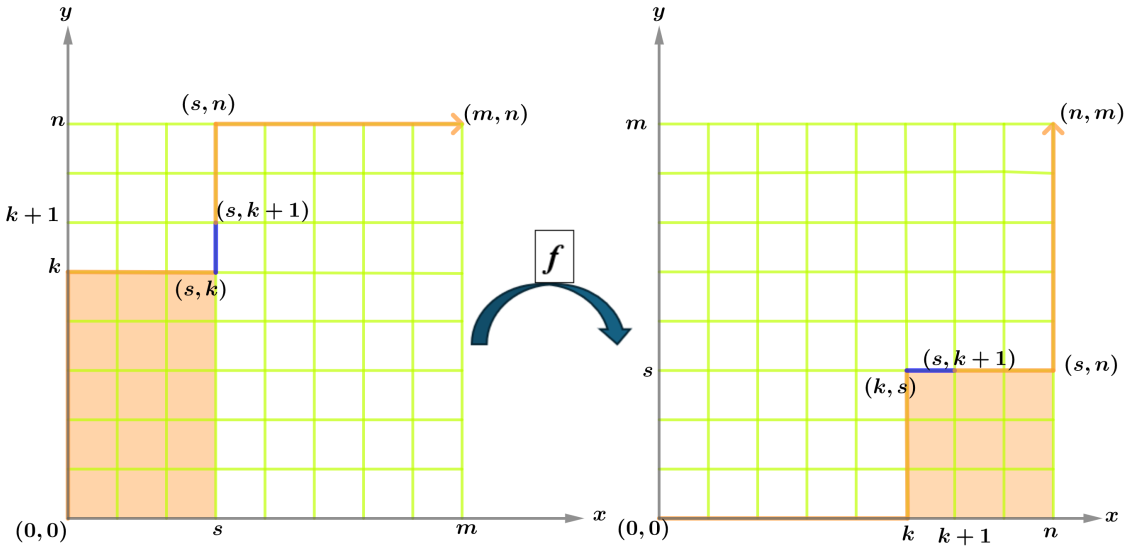
Fonte: Autor

Vamos calcular as imagens por meio da f dos possíveis subconjuntos de C, $C_{s,k+1}$ e $C_{s+1,k}$. Assim

a) $f(C_{s,k+1}) = \{f(x, y); (x, y) \in C_{sk}\} \cup \{f(s, k+1)\} = C'_{sk} \cup \{(k+1, s)\} = f(C_{sk}) \cup \{(k+1, s)\}$;

b) $f(C_{s+1,k}) = \{f(x, y); (x, y) \in C_{sk}\} \cup \{f(s+1, k)\} = C'_{ks} \cup \{(k, s+1)\} = f(C_{ks}) \cup \{(k, s+1)\}$.

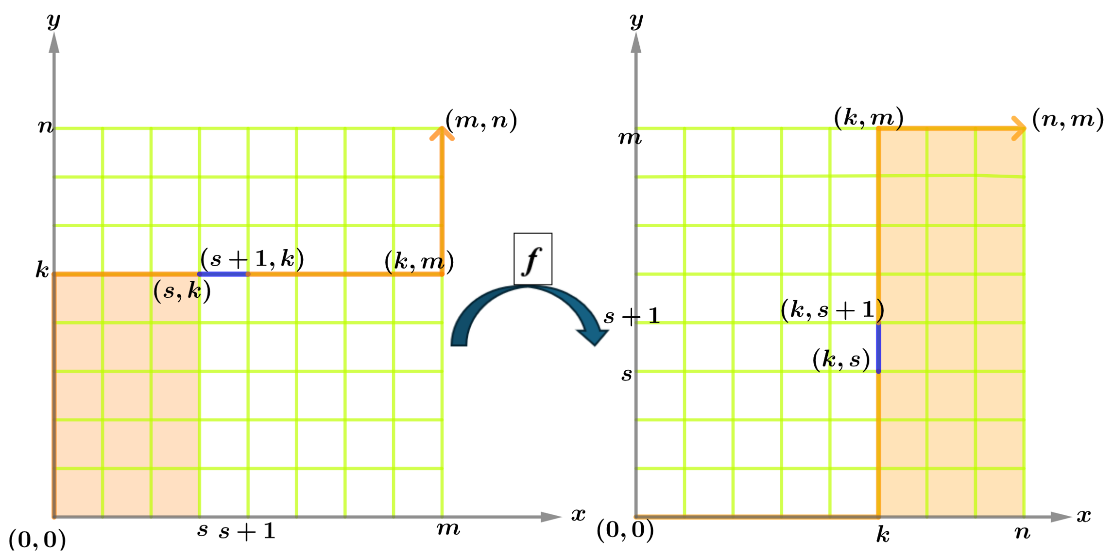
Figura 5: Esquema geométrico do caso a).



Fonte: Autor

No caso a) se fizermos o valor k variar de $\mathrm{k}+1$ até n Temos que $\mathrm{A(C)} = \mathrm{ks}+(\mathrm{m}-\mathrm{s})\mathrm{n}$ e $\mathrm{A(f(C))} = (\mathrm{n}-\mathrm{k})\mathrm{s}$, Assim $\mathrm{A(C)} + \mathrm{A(f(C))} = \mathrm{ks} + (\mathrm{m}-\mathrm{s})\mathrm{n} + (\mathrm{n}-\mathrm{k})\mathrm{s} = \mathrm{ks} + \mathrm{mn} - \mathrm{ns} + \mathrm{ns} - \mathrm{ks} = \mathrm{mn}$.

Figura 6: Esquema geométrico do caso b).



Fonte: Autor

No caso b) , fazendo o valor s variar de $\mathrm{s}+1$ até m temos $\mathrm{A(C)} = \mathrm{mk}$ e $\mathrm{A(f(C))} = (\mathrm{n}-\mathrm{k})\mathrm{m}$. Assim,

$$A(C) + A(f(C)) = mk + (n-k)m = mk + mn - mk = mn.$$

□

Segue do Teorema (1) que

$$F_q(m,n) = \sum_{C\in\mathcal{C}(m,n)} q^{A(C)} = \sum_{f(C)\in\mathcal{C}(n,m)} q^{mn-A(f(C))} = \sum_{C^1\in\mathcal{C}(m,n)} q^{A(C')} = F_q(n,m).$$

Portanto

$$F_q(m,n) = F_q(n,m). \tag{2}$$

Segue de (1) e (2) que

$$F_q(m,n) = F_q(n,m) = F_q(n,m-1) + q^m F_q(n-1,m) =$$
$$F_q(m-1,n) + q^m F_q(m,n-1). \tag{3}$$

Fazendo a diferença das identidades (1) e (3) obtemos:

$$0 = F_q(m,n-1) + q^n F_q(m-1,n) - F_q(m-1,n) - q^m F_q(m,n-1),$$

ou seja,

$$0 = (1-q^m)F_q(m,n-1) + (q^{n-1} - 1)F_q(m-1,n),$$

isto é,

$$(1-q^m)F_q(m,n-1) = (1-q^n)F_q(m-1,n).$$

Logo, para $q \neq 1$

$$F_q(m-1,n) = \frac{1-q^m}{1-q^n} F_q(m,n-1). \tag{4}$$

Exemplo 3. Calcule $F_q(m,1)$, para o inteiro $m > 0$.

Segue de (4) que

$$F_q(m,1) = F_q(m+1-1,1) = \frac{1-q^{m+1}}{1-q} F_q(m+1,0) = \frac{1-q^{m+1}}{1-q},$$

pois, $F_q(m+1,0) = 1$. Logo,

$$F_q(m,1) = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}. \tag{5}$$

5. Fórmula explícita para a família de polinômios $F_q(m,n)$

Em [12], $F_q(m,n)$ para m,n inteiros positivos fixos é definida como uma função racional na variável q e a prova que essa família de funções são polinomiais seque por indução sobre n. Com relação a esse trabalho, segue, direto da definição que $F_q(m,n)$ é uma função polinomial na variável q e sua fórmula explicita e dada pela razão de dois polinômios na variável q, como segue.

Proposição 1. *Dados inteiros positivos* m,n *com* $q \neq 1$ *o polinômio*

$$F_q(m,n) = \frac{(1-q^{m+1})(1-q^{m+2})\ldots(1-q^{m+n})}{(1-q^n)(1-q^{n-1})\ldots(1-q^2)(1-q)}.$$

Demonstração: Esse resultado segue de (4) e do exemplo (3) , recursivamente, pois

$$F_q(m,n) = \frac{1-q^{m+1}}{1-q^n} F_q(m+1,n-1) = \frac{1-q^{m+1}}{1-q^n} \times \frac{1-q^{m+2}}{1-q^{n-1}} F_q(m+2,n-2) =$$

$$\frac{1-q^{m+1}}{1-q^n} \times \frac{1-q^{m+2}}{1-q^{n-1}} \times \frac{1-q^{m+3}}{1-q^{n-2}} F_q(m+3,n-3) = \cdots =$$

$$\frac{1-q^{m+1}}{1-q^n} \times \frac{1-q^{m+2}}{1-q^{n-1}} \times \frac{1-q^{m+3}}{1-q^{n-2}} \times \cdots \times \frac{1-q^{m+n-1}}{1-q^2} F_q(m+n-1,2-1) =$$

$$\frac{(1-q^{m+1})(1-q^{m+2})\dots(1-q^{m+n-1})}{(1-q^n)(1-q^{n-1})\dots(1-q^2)} F_q(m+n-1,1).$$

Segue do exemplo (3) que $F_q(m+n-1,1) = \dfrac{1-q^{m+n}}{1-q}$. Portanto

$$F_q(m,n) = \frac{(1-q^{m+1})(1-q^{m+2})\dots(1-q^{m+n})}{(1-q^n)(1-q^{n-1})\dots(1-q^2)(1-q)}.$$

□

É usual na literatura, tais como, [3], [9], [14] e [12] para cada m, n positvo denotar a família de polinômios na indeterminada q, $F_q(m,n) = \begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix}$, e, para m, n fixos, chamá-los de coeficiente q–binomial ou polinômio de Gauss.

Durante a construção dessas seções chegamos à conclusão que o coeficiente de q^s na expansão do polinômio $\begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix}$ é total de caminhos reticulados C que partem de $(0,0)$ e chegam em (m,n), cujo comprimento do caminho é $m+n$ e a área da região limitada pelas retas $x = 0$, $y = 0$, $x = m$ e o caminho C é igual a $A(C) = s$.

Segue direto da definição e resultados que $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$ e, por convenção, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$. Além disso, podemos escrever $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (n-k)+k \\ k \end{bmatrix}$, para $n \geq k$ inteiros positivos e, no caso $n < k$, definimos como $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$ e fazendo $m = n-k$, temos

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(1-q^{n-k+1})(1-q^{n-k+2})\dots(1-q^n)}{(1-q^k)(1-q^{k-1})\dots(1-q^2)(1-q)}.$$

Segue de [12] que $\lim_{q\to 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n}{k}$, ou seja, o polinômio de Gauss é uma extensão do coeficiente binomial.

Exemplo 4. Iremos calcular alguns coeficientes binomiais

1. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1-q^2}{1-q} = 1+q.$

2. $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1-q^3}{1-q} = 1+q+q^2.$

3. $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \dfrac{(1-q^4)(1-q^3)}{(1-q^2)(1-q)} = 1+q+2q^2+q^3+q^4.$

4. $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1-q^n}{1-q} = 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}.$

5. $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \dfrac{(1-q^2)(1-q^3)\ldots(1-q^n)}{(1-q^{n-1})(1-q^{n-2})\ldots(1-q)} = 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q} = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}.$

Fazendo $m = n-k$ e $n = k$ em (1) temos:

$$F_q(n-k,k) = F_q(n-k,k-1) + q^k F_q(n-k-1,k). \tag{6}$$

Ou seja,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Calculando o limite quando q tende a 1 em (7) temos a relação de Stifel,

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Em 5) do exemplo 4, temos que

$\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$. Em geral, a simetria $\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, com $n \geq k$, é válida e segue de (2), quando fazemos $m = n-k$ e $n = k$

$$F_q(n-k,k) = F_q(k,n-k). \tag{9}$$

Ou seja,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+n-k \\ n-k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Fazendo o limite quando q tende a 1 em (10) temos

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Outra generalização da relação de Stifel é obtida por meio de (3), pois fazendo $m = n-k$ com $n \geq k$ e $n = k$ temos:

$$F_q(n-k,k) = F_q(n-k-1,k) + q^{n-k}F_q(n-k,k-1). \tag{12}$$

Ou seja,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

E, novamente fazendo o limite quando q tende a 1 em (13) obtemos a relação de Stifel.

6. O Teorema q-binomial via Polya

De acordo com [6], para provar uma generalização Teorema q-binomial é considerado um polinômio na indeterminada x definido por

$$f(x) = (1+x)(1+xq)(1+xq^2)\dots(1+xq^{n-1}). \tag{14}$$

Por outro lado, [6] supõe que $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. Usando igualdade de polinômios, os coeficientes $a_0, a_1, \dots a_n$ dependem do parâmetro q . Um fato que é observado diretamente em (14) é que $a_0 = 1$. Além disso, para gerar o coeficiente de x^n em (14) temos uma contribuição no primeiro fator do número de x, de xq no segundo fator, xq^2 no terceiro fator e assim sucessivamente até o n–ésimo fator com xq^{n-1}. Dessa forma, o coeficiente de x^n é igual a $a_n = 1\times q\times q^2\times\cdots\times q^{n-1} = q^{1+2+\cdots+(n-1)} = q^{\frac{n(n-1)}{2}}$. E assim, por meio de [6] é construída a demonstração do Teorema q–binomial.

Observe que $f(qx) = (1+qx)(1+q^2x)\dots(1+q^{n-1}x)(1+q^nx)$. Assim, $(1+x)f(qx) = f(x)(1+xq^n)$ e

$$(1+x)(a_0 + a_1qx + a_2q^2x^2 + \cdots + a_nq^nx^n) = (1+q^nx)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) \tag{15}$$

O coeficiente de $x^k, 0 < k < n$, deve satisfazer, de acordo com (15):

$$a_kq^k + a_{k-1}q^{k-1} = a_k + q^na_{k-1},$$

ou seja,

$$a_k(q^k-1) = a_{k-1}(q^n - q^{k-1}).$$

Portanto

$$a_k = a_{k-1}\frac{q^n-q^{k-1}}{q^k-1},$$

$$a_k = a_{k-1}\frac{q^n-q^{k-1}}{q^k-1} = a_{k-1}\frac{q^{k-1}(q^{n-k+1}-1)}{q^k-1} = a_{k-1}q^{k-1}\frac{1-q^{n-k+1}}{1-q^k}.$$

Fazendo $k = 1$, temos

$$a_1 = a_0q^0\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-q^n}{1-q};$$

Fazendo $k = 2$, temos

$$a_2 = a_1q^1\frac{1-q^{n-1}}{1-q^2} = q^1\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)};$$

Fazendo $k = 3$, temos

$$a_3 = a_2 q^2 \frac{1-q^{n-2}}{1-q^3} = q^1 q^2 \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})(1-q^{n-2})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)};$$

Fazendo $k = 4$, temos

$$a_4 = a_3 q^3 \frac{1-q^{n-3}}{1-q^4} = q^1 q^2 q^3 \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})(1-q^{n-2})(1-q^{n-3})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)}.$$

Em geral, fazendo $k = s$ temos

$$a_s = q^1 q^2 q^3 \times \cdots \times q^{s-1} \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})(1-q^{n-2})(1-q^{n-3})\dots(1-q^{n-s+1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\dots(1-q^s)}. \tag{16}$$

$$a_s = q^1 q^2 q^3 \times \cdots \times q^{s-1} \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix} = q^{\frac{s(s-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Portanto

$$(1+x)(1+xq)(1+xq^2)\dots(1+xq^{n-1}) = \sum_{s=0}^{n} q^{\frac{s(s-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix} x^s. \tag{18}$$

Segue de (18) o Teorema $q-$binomial. Ao calcularmos o limite quando q tende a 1 obtemos o Teorema Binomial

$$(1+x)^n = (1+x)(1+x)\dots(1+x) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^s.$$

Teorema 2. *Dados inteiros positivos* m, n *com* $q \neq 1$

$$(1+x)(1+xq)(1+xq^2)\dots(1+xq^{n-1}) = \sum_{s=0}^{n} q^{\frac{s(s-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ s \end{bmatrix} x^s.$$

Assim, em [6], é provado o Teorema (2) usando o conceito de polinômio e suas propriedades, além disso é possível por meio deste teorema estabelecer uma identidade similar a relação de Stífel.

Segue que o coeficiente de x^k em

$$p(x) = (1+x)(1+xq)(1+xq^2)\dots(1+xq^{n-1})(1+xq^n) \tag{19}$$

é igual a $q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}$. Por outro lado, podemos escrever

$$p(x) = (1+x)(1+xq)(1+xq^2)\dots(1+xq^{n-1}) + xq^n(1+x)(1+xq)(1+xq^2)\dots(1+xq^{n-1}). \tag{20}$$

Temos que o coeficiente de x^k em (19), de acordo com Teorema (2) é igual a $q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} q$

Logo, $q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{\frac{k(k-1)}{2}} q^{\frac{-2(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} q^n.$

Portanto

$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$. Com relação a fórmula explícita para o coeficiente $q-$binomial via Pólya aparece naturalmente na demonstração do Teorema $q-$binomial, como pode ser comprovado através de (16).

Considerações Finais

Os coeficientes binomiais constituem uma parte essencial do currículo do Ensino Médio, estabelecendo conexões fundamentais com a combinatória e remontando aos tempos de Leibniz, Pascal e Jacob Bernoulli. A integração da componente combinatória com o aspecto algébrico oferece uma abordagem promissora para explorar a contagem, permitindo uma conexão mais flexível entre expressões binomiais ou monômios, facilitando assim a aplicação de regras e propriedades. Ao escrever este artigo optamos por definir o coefiente $q-$binomial por meio de caminhos reticulados, definindo uma classe de polinômios na variável q para cada m, n inteiros positivos relacionados a estes caminhos e, assim, desenvolvemos recorrências, fórmula explícita e desccrevemos a estreita relação com coeficiente binomial nas Seções 3, 4 e 5. Na Seção 6 fizemos o tratamento do coeficiente $q-$binomial sob a perspectiva de George Pólya, onde é possível estabelecer os mesmos resultados que haviamos desenvovido nas seções anteriores. O ponto de vista de Pólya é interessante por tratar somente do conteúdo de polinômios, alem do mais, a demonstração do Teorema $q-$binomial apresenta uma álgebra de polinômios de forma elegante e acessível, adequada ao nível de compreensão dos alunos do Ensino Médio. Ao introduzir essas ideias em sala de aula e mencionar o matemático responsável pela apresentação desse resultado, podemos iniciar um processo de estimular a curiosidade dos alunos e despertar seu interesse pelo tema.

Referências

[1] Anderson, P. *Linhagens do Estado Absolutista.* 3.ed. São Paulo: Brasiliense, 2004.

[2] Andrews, G. E; Askey, R.; Roy, R. *Special Functions Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Series Number 71. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[3] Andrade, C. P. *Uma Introdução à Teoria das Partições*, 58f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas 2009.

[4] Chung, K.L., Boas, R.P., Lehmer, D.H., Schattschneider, D., Read, R.C., Schiffer, M.M. and Schoenfeld, A.H.*George Pólya*. Bulletin of the London Mathematical Society, 19:p.559-608,1987. ttps://doi.org/10.1112/blms/19.6.559

[5] Pinheiro, L. A. S.S. *A Heurística de Pólya e a Resolução de Problemas de Trigonometria.* Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Roraima. Boa Vista, 2017.

[6] Polya, G. and G.L. Alexanderson, *Gaussian binomial coefficients*, Elem. Math., 26,102-109p., 1971.

[7] Polya,G. *Collected Papers*. Vols.I-IV, MIt Press, Cambridge MA, 1984.

[8] Robertson, E.; O´Connor J. MacTutor. *History of Mathematics Archive.School of Mathematics and Statistics University of St Andrews*, Scotland. In MacTutor History of Mathematics Archive - MacTutor History of Mathematics (st-andrews.ac.uk), 2015.
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Polya/

[9] Santos, J.P.O.; Silva, R. V *Aspectos Combinatórios da Teoria Aditiva dos números.* http://emis.muni.cz/journals/em/docs/coloquios/SU-1.03.pdf, acesso em 07 de maio de 2024

[10] Stedall, J. A. *A discourse concerning algebra:English algebra to 1685*. New York,Oxford University Press Inc,p.23,2002.

[11] Strick, H. K.*George Polya*. Germany, 2022. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Strick/polya.pdf>. Acesso em: 03 de junho de 2024.

[12] Teixeira, M. A. G.; Travassos, M. F. G. and Craveiro, I. M. *Polinômio de Gauss: uma investigação da origem do conceito e a relação com coeficiente binomial.*Boletim Cearense de

Educação e História da Matemática, [S. l.], v. 11, n. 31, p. 1–15, 2024. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/11108.

[13] Teixeira, M. A. G. *Aspectos Algébricos e Combinários dos Números de Pell e Catalan*. Dissertação (PROFMAT). Universidade Federal da Grande Dourados, Dourados, 2018.

[14] Travassos, M. F. G. *Abordagem Algébrica e Combinatória para o Polinômio de Gauss*. Dissertação (PROFMAT). Universidade Federal da Grande Dourados, Dourados, 2017.

Marcia A. G. Teixeira
Escola Estadual Bonifácio Camargo Gomes
<teixe_ira@hotmail.com>

Irene M. Craveiro
UFGD - Universidade Federal da Grande Dourados
<irenecraveiro@ufgd.edu.br>

Recebido: 03/06/2024
Publicado: 11/12/2024