PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.12, n.3, 2024
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2024/pmo1228

Retas tangentes a cônicas e suas unicidades

Moacir Rosado Filho   Wagner de Oliveira Delatorre   Fidelis Zanetti de Castro

Resumo

O presente artigo investiga a existência e a unicidade da reta tangente em cada ponto das cônicas – elipse, parábola e hipérbole. Diferentemente do que é abordado nos currículos do Ensino Médio, em que somente a tangência à circunferência (uma elipse com focos coincidentes) é explorada, o artigo demonstra que, para cada tipo de cônica, existe uma única reta tangente em cada ponto e caracteriza essa reta. No Ensino Superior, tal caracterização costuma ser realizada com ferramentas do Cálculo Diferencial. No entanto, este artigo fornece uma abordagem alternativa que revela a unicidade da reta tangente em um dado ponto de cada cônica exclusivamente em termos de conceitos elementares de Geometria plana. O artigo apresenta também as chamadas propriedades refletoras das cônicas, que são consequências imediatas dessa caracterização e são utilizadas em várias aplicações práticas e tecnológicas.

Palavras-chave: Cônicas; Reta tangente; Propriedades refletoras das cônicas.

Abstract

This paper investigates the existence and uniqueness of the tangent line at each point of conic sections – ellipse, parabola, and hyperbola. Unlike high school curricula, which typically explore only the tangency of the circle (a special case of an ellipse with coincident foci), this paper demonstrates that for each type of conic section, there is a unique tangent line at each point and characterizes this line. In higher education, such a characterization is usually performed using tools from Differential Calculus. However, this paper offers an alternative approach that reveals the uniqueness of the tangent line at a given point of each conic section solely through elementary plane geometry concepts. Additionally, the paper presents the so-called reflective properties of conics, which are immediate consequences of this characterization and are utilized in various practical and technological applications.

Keywords: Conics; Tangent line; Reflective properties of conics.

1. Introdução

A determinação da reta tangente a uma curva é um problema central na História da Matemática, intimamente ligado ao desenvolvimento do Cálculo Diferencial [1]. Intuitivamente, uma reta é tangente a uma curva C em um ponto $P \in C$ quando passa por P e, em uma vizinhança de P, não intersecta a curva em outro ponto. Para uma curva qualquer, a reta tangente em um ponto P da curva pode intersectá-la em outros pontos fora de uma vizinhança de P, mas isso não ocorre com cônicas.

Em [2], [3] e [4], é demonstrado que a bissetriz de um determinado ângulo com vértice em um ponto da cônica é uma reta tangente a essa cônica naquele ponto, para os casos da parábola, elipse e hipérbole, respectivamente. No entanto, esses artigos não abordam se é possível a existência de outras retas tangentes à cônica além das bissetrizes mencionadas.

Neste trabalho, abordamos o problema de caracterizar a reta tangente a uma cônica e provar sua unicidade, utilizando apenas conceitos de Matemática básica, sem recorrer a técnicas de Cálculo Diferencial. Não encontramos uma demonstração da unicidade, usando apenas Matemática básica, em livros didáticos ou em artigos pesquisados. Os argumentos apresentados são análogos para cada tipo de cônica e baseiam-se em resultados elementares da Geometria Euclidiana Plana.

Na Seção 2, são apresentadas algumas definições e notações, dentre elas definições válidas de reta tangente a cada um dos três tipos de cônicas.

Na Seção 3, são apresentadas as Proposições 1, 2 e 3, que caracterizam as retas tangentes e estabelecem suas unicidades para cada um dos três tipos de cônicas, elipse, hipérbole e parábola, respectivamente. Os argumentos usados nas demonstrações das proposições 1 e 2 são análogos.

Na Seção 4, são apresentadas as propriedades refletoras das cônicas, que são consequências imediatas das caracterizações das retas tangentes para cada tipo de cônica. Apesar de essas propriedades serem muito conhecidas, é sempre bom citá-las, considerando as importantes aplicações tecnológicas por elas geradas.

Ao final do artigo, algumas conclusões são apresentadas.

2. Definições

Sejam A e B pontos distintos do plano. Neste artigo, a reta que passa por A e B será denotada por $\overleftrightarrow{AB}$. O segmento de reta com extremos A e B será denotado por AB e o seu comprimento por $\overline{AB}$.

As definições das cônicas estão apresentadas a seguir.

Definição 1.

[Parábola] Sejam d uma reta do plano e F um ponto fora dela. A *parábola* $\mathcal{P}$ de foco F e diretriz d é o lugar geométrico dos pontos P do plano que equidistam de F e d, ou seja, tais que $\overline{PF} = \overline{PP_d}$, sendo P_d o pé da reta perpendicular baixada de P sobre a diretriz d. O eixo dessa parábola é a reta perpendicular a d passando por F.

[Elipse] Sejam F_1 e F_2 pontos distintos do plano, e k um número real positivo. Uma *elipse* $\mathcal{E}$ *de focos* F_1 *e* F_2 é o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = k$. O eixo dessa elipse é a reta passando por F_1 e F_2.

[Hipérbole] Sejam F_1 e F_2 pontos distintos do plano, e k um número real positivo. Uma *hipérbole* $\mathcal{H}$ *de focos* F_1 *e* F_2 é o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = k$. O eixo dessa hipérbole é a reta que passa por F_1 e F_2.

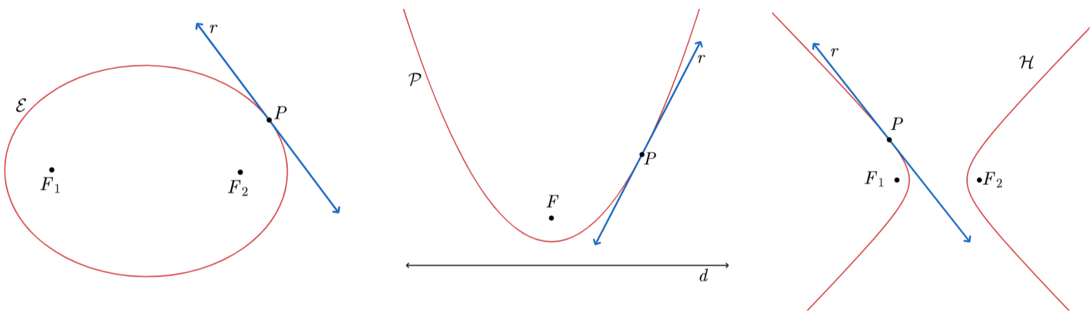
Adotaremos as seguintes definições para as retas tangentes às cônicas.

Definição 2. [Reta tangente a uma cônica]
Sejam $\mathcal{P}$ a parábola de foco F e diretriz d, P um ponto de $\mathcal{P}$ e r uma reta do plano passando por P. A reta r é dita uma *reta tangente a* $\mathcal{P}$ *em* P quando, para todo ponto $Q \in r$, com $Q \neq P$, tem-se que a distância $\overline{QF}$ de Q a F é maior do que a distância de Q a d, ou seja, tem-se $\overline{QF} > \overline{QQ_d}$, sendo Q_d o pé da perpendicular baixada de Q sobre d.

Seja $\mathcal{E}$ uma elipse de focos F_1 e F_2, ou seja, existe um número real positivo k tal que $\mathcal{E}$ é o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = k$. Sejam P um ponto de $\mathcal{E}$ e r uma reta do plano passando por P. A reta r é dita uma *reta tangente a $\mathcal{E}$ em P* quando, para todo ponto $Q \in r$, com $Q \neq P$, tem-se $\overline{QF_1} + \overline{QF_2} > k$.

Seja $\mathcal{H}$ uma hipérbole de focos F_1 e F_2, ou seja, existe um número real positivo k tal que $\mathcal{H}$ é o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = k$. Sejam P um ponto de $\mathcal{H}$ e r uma reta do plano passando por P. Então, $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = k$ ou $\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = k$. Se $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = k$, então a reta r é dita uma *reta tangente a $\mathcal{H}$ em P* quando, para todo ponto $Q \in r$, com $Q \neq P$, tem-se $\overline{QF_1} - \overline{QF_2} < k$. Se $\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = k$, a reta r é dita uma *reta tangente a $\mathcal{H}$ em P* quando, para todo ponto $Q \in r$, com $Q \neq P$, tem-se $\overline{QF_2} - \overline{QF_1} < k$.

A Figura 1 ilustra as cônicas $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{H}$ e suas respectivas tangentes.



(a) Elipse $\mathcal{E}$. (b) Parábola $\mathcal{P}$. (c) Hipérbole $\mathcal{H}$.

Figura 1: Cônicas e suas retas tangentes.

Usaremos a noção de ponto simétrico de um ponto em relação a uma reta do plano, a qual é apresentada na Definição 3.

Definição 3. Sejam r uma reta e F um ponto do plano. O *simétrico de F em relação a r* é o próprio ponto F, se $F \in r$, ou é o ponto F' tal que r é a mediatriz do segmento de reta FF', se $F \notin r$ (ver Figura 2).

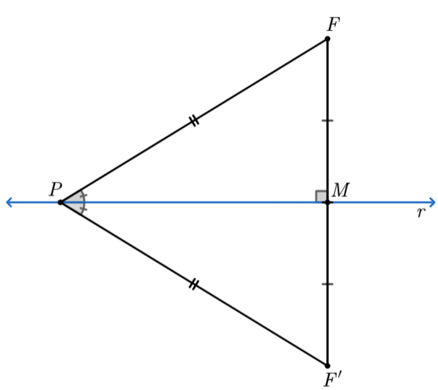


Figura 2: F' é o simétrico de F em relação à reta r.

As Observações 1 e 2, a seguir, serão amplamente utilizadas ao longo da Seção 3.

Observação 1. Quando $F \neq F'$, a *mediatriz do segmento de reta* FF' é a reta do plano perpendicular a esse segmento de reta e que passa pelo seu ponto médio.

Observação 2. Seja r a mediatriz do segmento de reta FF' e P um ponto de r, distinto do ponto médio M de FF'. Como M é o ponto médio de FF', então $\overline{FM} = \overline{F'M}$. Sendo r é perpendicular a FF' em M, então os ângulos $\widehat{PMF}$ e $\widehat{PMF'}$ são ambos retos. Como $\overline{FM} = \overline{F'M}$, $\widehat{PMF} = \widehat{PMF'}$ e PM é lado comum a ambos os triângulos FPM e $F'PM$, então esses triângulos são congruentes, pelo caso de congruência de triângulos LAL, e, portanto, $\overline{PF} = \overline{PF'}$ e os ângulos $\widehat{FPM}$ e $\widehat{F'PM}$ são iguais. Logo, o triângulo FPF' é isósceles, com $\overline{PF} = \overline{PF'}$, e a reta r é a bissetriz interna desse triângulo relativa ao vértice P (ver Figura 2).

Assim, se F' é o simétrico do ponto F em relação à reta r, com $F \notin r$, então, para cada ponto P de r, tem-se que $\overline{PF} = \overline{PF'}$ e, se P for diferente do ponto médio de FF', tem-se que r é a bissetriz interna do triângulo FPF' relativa ao vértice P.

3. Retas Tangentes a Cônicas e suas Unicidades

A Proposição 1 caracteriza a reta tangente a uma elipse e mostra a sua unicidade.

Proposição 1. *Seja $\mathcal{E}$ uma elipse de focos F_1 e F_2, ou seja, existe um número real positivo k tal que $\mathcal{E}$ é o lugar geométrico dos pontos P do plano tais que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = k$. Sejam P um ponto de $\mathcal{E}$ e r uma reta do plano passando por P. Então,*

(i) se P não está no eixo de $\mathcal{E}$, então a reta r é reta tangente a $\mathcal{E}$ em P se, e somente se, r é a bissetriz externa do triângulo F_1PF_2 relativa ao vértice P.

(ii) se P está no eixo de $\mathcal{E}$, então a reta r é reta tangente a $\mathcal{E}$ em P se, e somente se, r é perpendicular ao eixo de $\mathcal{E}$.

Demonstração. Vamos provar apenas o item *(i)*, uma vez que a prova do item *(ii)* é completamente análoga. Inicialmente, mostraremos que se r é a bissetriz externa do triângulo F_1PF_2 relativa ao vértice P, então r é reta tangente a $\mathcal{E}$ em P.

De fato, seja r a bissetriz externa do triângulo F_1PF_2 relativa ao vértice P. Então, r é a bissetriz do ângulo $\widehat{F_2PR}$, sendo R um ponto da reta $\overleftrightarrow{F_1P}$ tal que P está entre F_1 e R. Seja F_2' o simétrico de F_2 em relação a r. Então, r é a é bissetriz interna do triângulo F_2PF_2' relativa ao vértice P, ou seja, r é a bissetriz do ângulo $\widehat{F_2PF_2'}$. Como r é bissetriz de ambos os ângulos $\widehat{F_2PR}$ e $\widehat{F_2PF_2'}$, então F_1, P e F_2' são colineares.

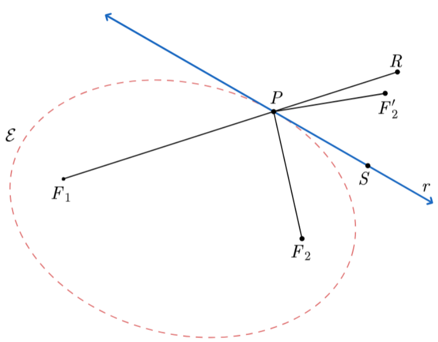


Figura 3: Figura auxiliar para demonstração da Proposição 1.

Na Figura 3, tem-se $\widehat{F_2PS} = \widehat{RPS} = \widehat{F_2'PS}$ e, logo, $\widehat{F_2'PR} = 0$, sendo que, se nessa figura o ponto F_2' estivesse no outro semiplano determinado pela reta $\overleftrightarrow{F_1P}$, também se concluiria que $\widehat{F_2'PR} = 0$.

Assim, F_2' pertence à reta $\overleftrightarrow{F_1P}$ (ver Figura 4.)

Seja Q um ponto de r, com $Q \neq P$. Como F_2' é o simétrico de F_2 em relação a r e P e Q são pontos de r, então $\overline{PF}_2 = \overline{PF'_2}$ e $\overline{QF}_2 = \overline{QF'_2}$. Como $\overline{QF}_2 = \overline{QF'_2}$, $\overline{PF}_2 = \overline{PF'_2}$ e $\overline{F_1F'_2} = \overline{PF}_1 + \overline{PF'_2}$, então, aplicando a Desigualdade Triangular ao triângulo F_1QF_2', tem-se $\overline{QF}_1 + \overline{QF}_2 = \overline{QF}_1 + \overline{QF'_2} > \overline{F_1F'_2} = \overline{PF}_1 + \overline{PF'_2} = \overline{PF}_1 + \overline{PF}_2 = k$ e, portanto, $\overline{QF}_1 + \overline{QF}_2 > k$. Logo, r é uma reta tangente a $\mathcal{E}$ em P.

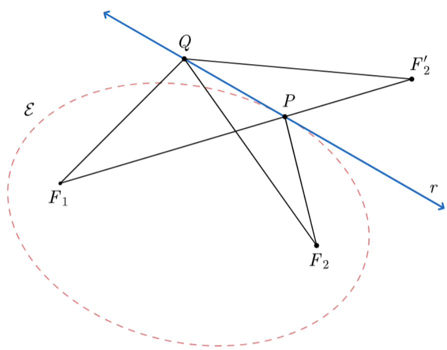


Figura 4: Figura auxiliar para demonstração da Proposição 1.

Agora, vamos mostrar que se r é uma reta tangente a $\mathcal{E}$ em P, então r é a bissetriz externa do triângulo F_1PF_2 relativa ao vértice P.

De fato, seja r uma reta tangente a $\mathcal{E}$ em P. Então, para todo ponto $Q \in r$, com $Q \neq P$, tem-se $\overline{QF}_1 + \overline{QF}_2 > k = \overline{PF}_1 + \overline{PF}_2$.

Seja F_2' o simétrico de F_2 em relação a r. Afirmamos que F_1, P e F_2' são colineares. De fato, suponhamos, por contradição, que F_1, P e F_2' sejam não colineares (ver Figura 5).

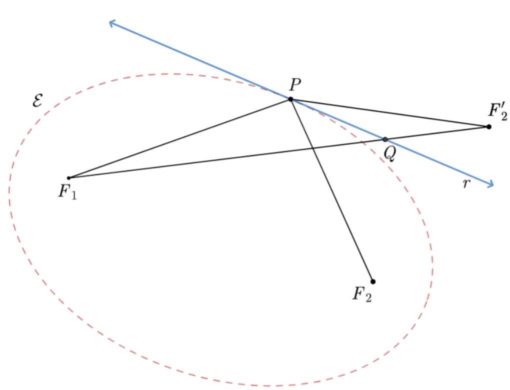


Figura 5: Figura auxiliar para demonstração da Proposição 1.

Seja Q o ponto de interseção de r e F_1F_2'.

Então, $Q \neq P$ e, portanto, $\overline{QF_1} + \overline{QF_2} > k$, já que $Q \in r$. Como F_2' é o simétrico de F_2 em relação a r e P e Q são pontos de r, então $\overline{PF_2} = \overline{PF_2'}$ e $\overline{QF_2} = \overline{QF_2'}$.

Como $\overline{QF_2} = \overline{QF_2'}$, $\overline{QF_1} + \overline{QF_2'} = \overline{F_1F_2'}$ e $\overline{PF_2} = \overline{PF_2'}$, então, aplicando a Desigualdade Triangular ao triângulo F_1PF_2', tem-se $\overline{QF_1} + \overline{QF_2} = \overline{QF_1} + \overline{QF_2'} = \overline{F_1F_2'} < \overline{PF_1} + \overline{PF_2'} = \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = k$ e, portanto, $\overline{QF_1} + \overline{QF_2} < k$, o que contradiz $\overline{QF_1} + \overline{QF_2} > k$.

Logo, de fato, F_1, P e F_2' são colineares e, como r é a bissetriz interna do triângulo F_2PF_2' relativa ao vértice P, então r é a bissetriz externa do triângulo F_1PF_2 relativa ao vértice P. ■

A Proposição 2, a seguir, caracteriza a reta tangente a uma hipérbole e mostra a sua unicidade. Na Proposição 1, é utilizado que, em um triângulo, o comprimento de um lado é menor do que a soma dos comprimentos dos outros dois lados. A demonstração da Proposição 2 segue, essencialmente, o mesmo raciocínio utilizado na demonstração da Proposição 1, usando que, em um triângulo, o comprimento de um lado é maior do que o valor absoluto da diferença dos outros dois lados.

Proposição 2. *Seja $\mathcal{H}$ uma hipérbole de focos F_1 e F_2, ou seja, existe um número real positivo k tal que $\mathcal{H}$ é o lugar geométrico dos pontos P do plano tais $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = k$. Sejam P um ponto de $\mathcal{H}$ e r uma reta do plano passando por P. Então,*

(i) se P não está no eixo de $\mathcal{H}$, então a reta r é reta tangente a $\mathcal{H}$ em P se, e somente se, r é a bissetriz interna do triângulo F_1PF_2 relativa ao vértice P.

(ii) se P está no eixo de $\mathcal{H}$, então a reta r é reta tangente a $\mathcal{H}$ em P se, e somente se, r é perpendicular ao eixo de $\mathcal{H}$.

Demonstração. Vamos provar apenas o item *(i)*, uma vez que a prova do item *(ii)* é completamente análoga. Suponhamos que $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = \overline{PF_2} - \overline{PF_1} = k$ (o caso em que $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = PF_1 - PF_2 = k$ é tratado de maneira completamente análoga). Neste caso, r é reta tangente a $\mathcal{H}$ em P quando, para todo ponto $Q \in r$, com $Q \neq P$, tem-se $QF_2 - QF_1 < k$.

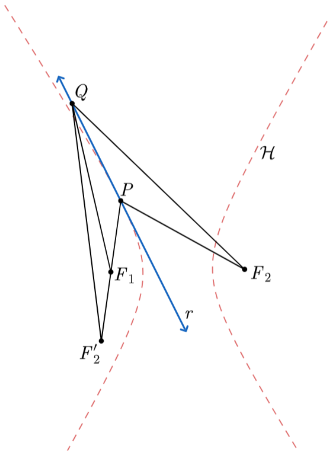


Figura 6: Figura auxiliar para a demonstração da Proposição 2.

Inicialmente, vamos mostrar que se r é a bissetriz interna do triângulo F_1PF_2 relativa ao vértice P, então r é uma reta tangente a $\mathcal{H}$ em P.

De fato, sejam r a bissetriz interna do triângulo F_1PF_2 relativa ao vértice P e F_2' o simétrico de F_2 em relação a r. Então, r é a é bissetriz interna do triângulo F_2PF_2' relativa ao vértice P. Como r também é a bissetriz interna do triângulo F_2PF_1 relativa o vértice P, então F_2' pertence à reta $\overleftrightarrow{F_1P}$ (ver Figura 6). Seja Q um ponto de r, com $Q \neq P$. Então, F_1, F_2' e Q são não colineares (pois, se F_1, F_2' e Q fossem colineares, então ocorreria de Q e P serem, simultaneamente, pontos da reta $\overleftrightarrow{F_1F_2'}$ e da reta r e, logo, teriam de ser iguais). Como F_2' é o simétrico de F_2 em relação a r e P e Q são pontos de r, então $\overline{PF_2} = \overline{PF_2'}$ e $\overline{QF_2} = \overline{QF_2'}$. Como $\overline{QF_2} = \overline{QF_2'}$, $\overline{F_1F_2'} = \overline{PF_2'} - \overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2} = \overline{PF_2'}$, então, aplicando a Desigualdade Triangular ao triângulo F_1QF_2', tem-se $\overline{QF_2} - \overline{QF_1} = \overline{QF_2'} - \overline{QF_1} \leq |\overline{QF_2'} - \overline{QF_1}| < \overline{F_1F_2'} = \overline{PF_2'} - \overline{PF_1} = \overline{PF_2} - \overline{PF_1} = k$ e, portanto, $\overline{QF_2} - \overline{QF_1} < k$. Logo, r é uma reta tangente a $\mathcal{H}$ em P.

Agora, vamos mostrar que se r é uma reta tangente a $\mathcal{H}$ em P, então r é a bissetriz interna do triângulo F_1PF_2 relativa ao vértice P.

De fato, seja r uma reta tangente a $\mathcal{H}$ em P. Então, para todo ponto $Q \in r$, com $Q \neq P$, tem-se $\overline{QF_2} - \overline{QF_1} < k = \overline{PF_2} - \overline{PF_1}$. Seja F_2' o simétrico de F_2 em relação a r.

Afirmamos que F_1, P e F_2' são colineares. De fato, suponhamos, por contradição, que F_1, P e F_2' sejam não colineares (ver Figura 7).

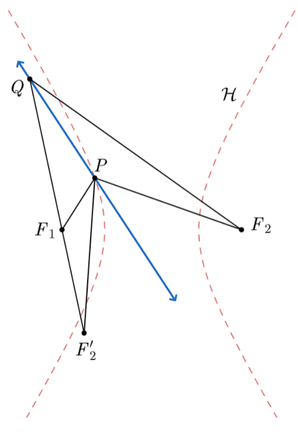


Figura 7: Figura auxiliar para a demonstração da Proposição 2.

Seja Q o ponto de interseção de r e $\overleftrightarrow{F_1F_2'}$. Então, $Q \neq P$ e, portanto, $\overline{QF_2} - \overline{QF_1} < k$, já que $Q \in r$. Como F_2' é o simétrico de F_2 em relação a r e P e Q são pontos de r, então $\overline{PF_2} = \overline{PF_2'}$ e $\overline{QF_2} = \overline{QF_2'}$. Como $\overline{QF_2} = \overline{QF_2'}$, $\overline{QF_2'} - \overline{QF_1} = \overline{F_1F_2'}$ e $\overline{PF_2} = \overline{PF_2'}$, então, aplicando a Desigualdade Triangular ao triângulo F_1PF_2', tem-se $\overline{QF_2} - \overline{QF_1} = \overline{QF_2'} - \overline{QF_1} = \overline{F_1F_2'} > |\overline{PF_2'} - \overline{PF_1}| = |\overline{PF_2} - \overline{PF_1}| = \overline{PF_2} - \overline{PF_1} = k$ e, portanto, $\overline{QF_2} - \overline{QF_1} > k$ o que contradiz $\overline{QF_2} - \overline{QF_1} < k$.

Logo, de fato, F_1, P e F_2' são colineares e, como r é a bissetriz interna do triângulo F_2PF_2' relativa ao vértice P, então r é a bissetriz interna do triângulo F_1PF_2 relativa ao vértice P. ■

A Proposição 3, a seguir, caracteriza a reta tangente a uma parábola e mostra a sua unicidade.

Proposição 3. *Seja $\mathcal{P}$ a parábola de foco F e diretriz d. Sejam P um ponto de $\mathcal{P}$ e P_d o pé da perpendicular baixada de P sobre d. Seja r uma reta passando por P. Então,*

(i) se P não está no eixo de $\mathcal{P}$, então a reta r é reta tangente a $\mathcal{P}$ em P se, e somente se, r é a bissetriz interna do triângulo FPP_d relativa ao vértice P.

(ii) se P está no eixo de $\mathcal{P}$, então a reta r é reta tangente a $\mathcal{P}$ em P se, e somente se, r é perpendicular ao eixo de $\mathcal{P}$.

Demonstração. Vamos provar apenas o item *(i)*, uma vez que a prova do item *(ii)* é completamente análoga.

Como $P \in \mathcal{P}$, então $\overline{PF} = \overline{PP_d}$. Inicialmente, vamos mostrar que se r é a bissetriz interna do triângulo FPP_d relativa ao vértice P, então r é uma reta tangente a $\mathcal{P}$ em P.

De fato, seja r a bissetriz interna do triângulo FPP_d relativa ao vértice P. Como $P \in \mathcal{P}$, então $\overline{PF} = \overline{PP_d}$ e, logo, o triângulo FPP_d é isósceles de base FP_d. Como r é a bissetriz interna relativa ao vértice P do triângulo isósceles FPP_d de base FP_d, então r é a mediatriz de FP_d. Logo, $P_d = F'$, sendo F' o simétrico de F em relação a r (ver Figura 8).

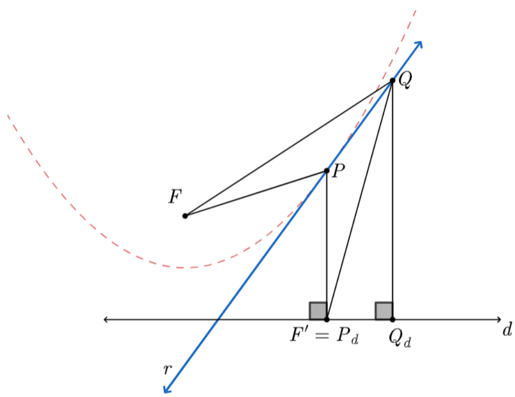


Figura 8: Figura auxiliar para a demonstração da Proposição 3.

Sejam Q um ponto de r, com $Q \neq P$, e Q_d o pé da perpendicular baixada de Q sobre d. Como F' é o simétrico de F em relação a r e $Q \in r$, então $\overline{QF} = \overline{QF'}$. Como o triângulo QP_dQ_d é retângulo com hipotenusa QP_d e QQ_d é um de seus catetos, então $\overline{QP_d} > \overline{QQ_d}$. Como $\overline{QF} = \overline{QF'}$, $F' = P_d$ e $\overline{QP_d} > \overline{QQ_d}$, então tem-se $\overline{QF} = \overline{QF'} = \overline{QP_d} > \overline{QQ_d}$ e, portanto, $\overline{QF} > \overline{QQ_d}$. Logo, r é uma reta tangente a $\mathcal{P}$ em P.

Agora, vamos mostrar que se r é uma reta tangente a $\mathcal{P}$ em P, então r é a bissetriz interna do triângulo FPP_d relativa ao vértice P.

De fato, seja r uma reta tangente a $\mathcal{P}$ em P. Então, para todo ponto $Q \in r$, com $Q \neq P$, tem-se $\overline{QF} > \overline{QQ_d}$, sendo Q_d o pé da perpendicular baixada de Q sobre d. Seja F' o simétrico de F em relação a r. Como $P \in r$ e F' é o simétrico de F em relação a r, então $\overline{PF} = \overline{PF'}$.

Afirmamos que F' pertence a d e coincide com P_d. De fato, suponhamos, por contradição, que F' não pertença à diretriz d. Então, temos os seguintes dois casos possíveis.

Caso 1: F' e F estão em um mesmo semiplano determinado por d (ver a Figura 9).

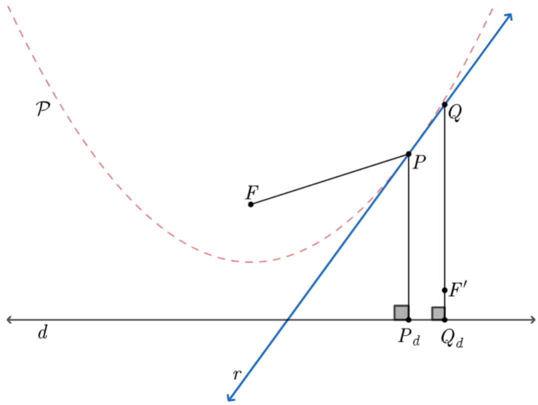


Figura 9: Figura auxiliar para a demonstração da Proposição 3.

Neste caso, a reta perpendicular a d passando por F' intersecta r em um ponto Q e intersecta d em um ponto Q_d.

Como F' é o simétrico de F em relação a r e $Q \in r$, então $\overline{QF} = \overline{QF'}$. Como $\overline{PF} = \overline{PP_d}$ e $\overline{PF} = \overline{PF'}$, então $\overline{PF'} = \overline{PP_d}$. Note que F' está entre Q e Q_d, com $F' \neq Q$ e $F' \neq Q_d$ e, portanto, $\overline{QQ_d} > \overline{QF'}$. Tem-se que $Q \neq P$, pois, se ocorresse $Q = P$, então teríamos $Q_d = P_d$ e, como, $\overline{PF'} = \overline{PP_d}$, valeria $\overline{QF'} = \overline{QQ_d}$, o que não é possível, uma vez que $\overline{QQ_d} > \overline{QF'}$.

Como $Q \neq P$ e $P \in r$, então $\overline{QF} > \overline{QQ_d}$. Como $\overline{QF} > \overline{QQ_d}$ e $\overline{QQ_d} > \overline{QF'}$, então $\overline{QF} > \overline{QF'}$, o que contradiz $\overline{QF} = \overline{QF'}$.

Caso 2: F' e F estão em semiplanos distintos determinados por d (ver Figura 10).

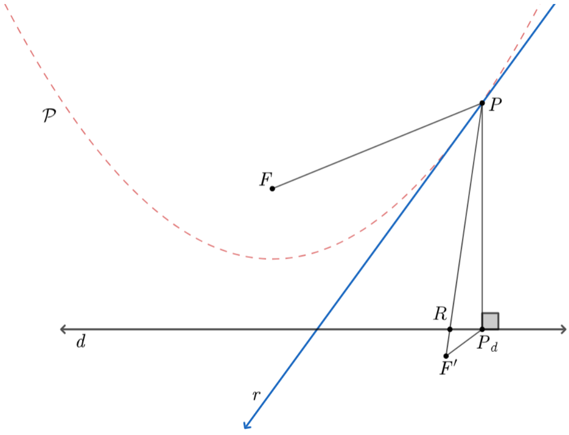


Figura 10: Figura auxiliar para a demonstração da Proposição 3.

Neste caso, seja R o ponto de interseção do segmento de reta PF' com a reta d. Como P e F' estão em semiplanos diferentes determinados por d, então $\overline{PF'} > \overline{PR}$. Se $R = P_d$, então $\overline{PR} = \overline{PP_d}$. Se $R \neq P_d$, então o triângulo PP_dR é retângulo com ângulo reto no vértice P_d e, logo, $\overline{PR} > \overline{PP_d}$. De todo, $\overline{PR} \geq \overline{PP_d}$. Como $PP_d = PF = PF'$ e $\overline{PR} \geq \overline{PP_d}$, então $\overline{PR} \geq \overline{PF'}$, o que contradiz $\overline{PF'} > \overline{PR}$.

Como cada um dos casos 1 e 2 conduz a uma contradição, conclui-se que F' pertence à diretriz d.

Finalmente, vamos mostrar que $F' = P_d$.

De fato, se F' não coincidesse com P_d, então teríamos um triângulo retângulo PP_dF' com ângulo reto no vértice P_d (ver Figura 11) e. logo, valeria $PF' > PP_d$, o que não é possível, já que $PF' = PF = PP_d$. Portanto, $F' = P_d$. Como $F' = P_d$, F' é o simétrico de F em relação a r e $P \in r$, então r é a bissetriz interna do triângulo FPP_d relativa ao vértice P.

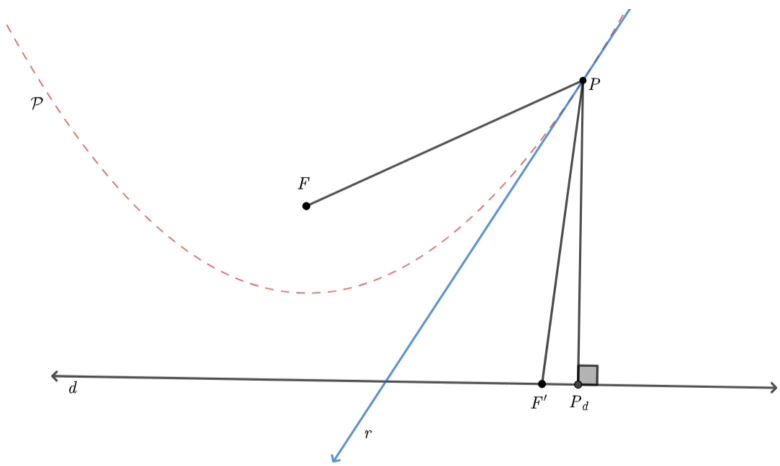


Figura 11: Figura auxiliar para a demonstração da Proposição 3.

■

Em suma, para uma reta ser tangente a uma cônica em um ponto P é necessário e suficiente que ela seja a bissetriz externa ou a bissetriz interna do triângulo F_1PF_2 relativa ao vértice P, nos casos da cônica ser, respectivamente, uma elipse ou uma hipérbole de focos F_1 e F_2, ou que ela seja a bissetriz interna do triângulo F_1PP_d relativa ao vértice P, no caso da cônica ser uma parábola de foco F e diretriz d, sendo P_d o pé da perpendicular baixada de P sobre d.

4. Propriedades Refletoras das Cônicas

A reflexão de um raio luminoso é um fenômeno físico estudado na Óptica. A reflexão ocorre quando um raio luminoso, ao incidir sobre uma superfície, dita refletora, retorna ao meio de origem. No caso de uma superfície plana a reta perpendicular a essa superfície no ponto de incidência do raio é chamada de reta normal naquele ponto. Os ângulos de incidência e de reflexão são, respectivamente, os ângulos que a reta normal forma com os raios incidente e refletido no ponto de incidência. Então, é válida a Lei da Reflexão, que estabelece que, quando um raio luminoso incide em um ponto de uma superfície plana refletora, a reta normal nesse ponto e os raios incidente e refletido estão em um mesmo plano e o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Como a reta normal e os raios incidente e refletido estão em um mesmo plano, pode-se supor que a reflexão ocorre nesse plano com o raio luminoso incidindo sobre a curva obtida pela interseção desse plano com a superfície refletora.

Um *elipsoide de revolução* é a superfície obtida ao se girar uma elipse em torno de seu eixo. De maneira análoga, definem-se *hiperboloide de revolução* e *paraboloide de revolução*. Vamos supor que essas superfícies sejam refletoras. Conforme explicado no parágrafo anterior, ao considerar a reflexão de um raio luminoso, o elipsoide de revolução pode ser substituído pela elipse que é a interseção desse elipsoide com o plano contendo o raio incidente, o raio refletido e o eixo de rotação, que é o eixo da elipse. O mesmo vale para o hiperboloide de revolução e para o paraboloide de revolução. Nesse caso, os ângulos de incidência e de reflexão são, respectivamente, os ângulos complementares dos ângulos que os raios incidente e de reflexão formam com a reta tangente à cônica correspondente no ponto de incidência.

Seguem das Proposições 1, 2 e 3, as seguintes propriedades refletoras das cônicas, respectivamente (ver Figura 12 abaixo).

Um raio de luz paralelo ao eixo de uma parábola (refletora), ao nela incidir, é refletido de modo que o raio de luz refletido passa pelo seu foco, valendo o mesmo na reflexão inversa, ou seja, raio de luz passando pelo foco de uma parábola (refletora), ao nela incidir, é refletido de modo que o raio de luz refletido seja paralelo ao eixo [2].

Um raio de luz que passa pelo foco de uma elipse (refletora), ao nela incidir, é refletido de modo que o raio de luz refletido passe pelo outro foco [3].

Um raio de luz que passa pelo foco de uma hipérbole (refletora), ao nela incidir, é refletido de modo que o prolongamento do raio de luz refletido passe pelo outro foco [4].

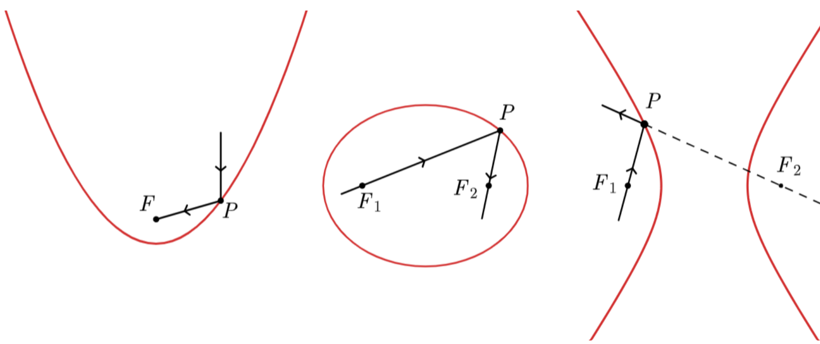


Figura 12: Propriedades refletoras das cônicas.

A propriedade refletora da parábola é usada em antenas parabólicas, que são antenas refletoras com formato de parte de um paraboloide de revolução. A antena parabólica é posicionada com o seu eixo apontando em direção a uma fonte de sinais de rádio e televisão localizada no espaço. Esses sinais, praticamente paralelos ao eixo da antena, são nela refletidos e concentram-se em seu foco, onde fica o receptor da antena. Em holofotes, faróis de automóveis e lanternas há espelhos com o mesmo formato. Raios de luz provenientes de uma fonte luminosa posicionada no foco do espelho são nele refletidos e seguem em direção paralela ao seu eixo, iluminando, assim, objetos que estejam em frente da lanterna.

A propriedade refletora da elipse é usada em luminária de consultório odontológico, na qual um espelho refletor com formato de parte de um elipsoide de revolução, ao nele incidir raios de luz provenientes de uma fonte luminosa em um dos focos, os refletem concentrando-os no outro foco, que é posicionado para coincidir com o local do dente a ser tratado sem ofuscar o paciente. Aparelhos com formato de elipsoides de revolução são utilizados em tratamentos radioterápicos. Esses aparelhos emitem radiações de alta energia em um dos focos da elipse para combater células de tumor maligno localizadas na posição do outro foco, sem atingir tecidos sadios que se encontram próximos. Outro aparelho no mesmo formato é utilizado no tratamento de cálculo renal. Nesse aparelho, ondas sonoras de alta frequência (ultrassom) são emitidas em um dos focos e refletidas para o outro foco onde está localizado o cálculo. Essas ondas sonoras provocam vibrações no cálculo renal com o objetivo de pulverizá-lo, de modo que ele possa ser expelido pela urina. Outra aplicação da propriedade refletora da elipse ocorre em salas de museus de ciência, castelos e catedrais, chamadas de salas de sussurros. Essas salas são construídas com formato de parte de um elipsoide, nas quais são marcados dois pontos no chão, que são os focos da elipse, de modo que uma pessoa em um desses pontos pode conversar com outra pessoa com a outra em voz sussurrada, sem que o resto da sala ouça a conversa.

A propriedade refletora da hipérbole é usada em espelhos hiperbólicos de telescópios e em sistemas de navegação.

Como consequência da Proposição 1, vamos demonstrar a propriedade refletora da elipse. As provas das propriedades refletoras da hipérbole e da parábola, como consequências das proposições 2 e 3, respectivamente, são análogas.

Sejam $\mathcal{E}$ uma elipse de focos F_1 e F_2, e um raio luminoso passando por F_1 e incidindo em $\mathcal{E}$ no ponto P, sendo que P não está no eixo de $\mathcal{E}$ (o caso de P estar no eixo de $\mathcal{E}$ é análogo) (ver Figura 13 abaixo). Pela Proposição 1, a reta tangente r a $\mathcal{E}$ em P é a bissetriz externa do triângulo F_1PF_2 relativa ao vértice P. Então, a reta r é a bissetriz do ângulo $\widehat{F_2PQ}$, sendo Q um ponto da reta $\overleftrightarrow{F_1P}$ tal que P está entre F_1 e Q. Como a reta r é a bissetriz de $\widehat{F_2PQ}$, então $\widehat{F_2PS} = \widehat{QPS}$, sendo S um ponto de r no semiplano determinado pela reta $\overleftrightarrow{F_1P}$ que contém F_2.

Por outro lado, se R é um ponto de r no semiplano determinado pela reta $\overleftrightarrow{F_1P}$ que não contém F_2, então os ângulos $\widehat{F_1PR}$ e $\widehat{QPS}$ são iguais, já que são opostos pelo vértice P.

Como $\widehat{F_1PR} = \widehat{QPS}$ e $\widehat{F_2PS} = \widehat{QPS}$, então $\widehat{F_1PR} = \widehat{F_2PS}$. Como $\widehat{F_1PR} = \widehat{F_2PS}$, então os ângulos complementares de $\widehat{F_1PR}$ e $\widehat{F_2PS}$ são iguais e, logo, pela Lei da Reflexão, o raio refletido em P passa por F_2.

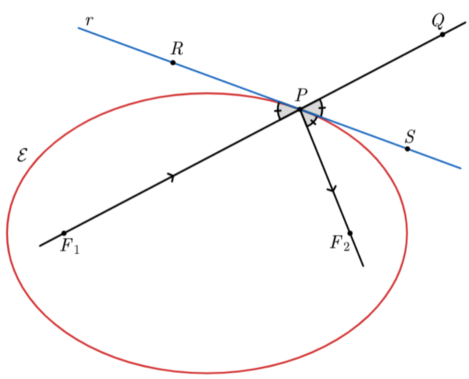


Figura 13: Propriedade refletora da elipse.

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Conclusões

No presente artigo, demonstramos a unicidade da reta tangente a cada um dos tipos de cônicas e a caracterizamos, usando apenas resultados básicos de Geometria Euclidiana Plana em nível de ensino médio. As demonstrações nos casos da elipse e da hipérbole são bem semelhantes. A abordagem da unicidade de retas tangentes a cônicas, usando apenas Matemática básica, não é apresentada em textos de Ensino Médio de Matemática e também não a encontramos em nenhum artigo por nós pesquisado. Mesmo a caracterização dessas retas tangentes não é apresentada em muitos textos de Ensino Médio de Matemática. Ao final do artigo, apresentamos as propriedades refletoras das cônicas, que são fontes de várias aplicações práticas e tecnológicas.

Referências

[1] Edwards Jr., C. H. *The Historical Development of the Calculus*. Springer Science & Business Media, 2012.

[2] Wagner, E. *Por que as Antenas são Parabólicas*. Revista do Professor de Matemática, nº 33.

[3] Valladares, R. J. C. *Elipse, Sorrisos e Sussurros*. Revista do Professor de Matemática, nº 36.

[4] Ávila, G. *A Hipérbole e os Telescópios*. Revista do Professor de Matemática, nº 34.

[5] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. e Morgado, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*. v. 1, SBM, 2016.

[6] Akopyan, A. V. e Zaslavsky, A. A. *Geometry of Conics*. American Mathematical Society, 2007.

Moacir Rosado Filho
Universidade Federal do Espírito Santo
<moacrosa@gmail.com>

Wagner de Oliveira Delatorre
Centro de Ensino Charles Darwin
<wagnerdelatorre70@gmail.com>

Fidelis Zanetti de Castro
Instituto Federal do Espírito Santo
<fidelis@ifes.edu.br>

Recebido: 26/07/2024
Publicado: 22/11/2024