PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.12, n.3, 2024
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2024/pmo1229

Construção de materiais manipulativos para atividades envolvendo a completude dos números reais

Jocemar Q. Chagas[1] Giuliano G. La Guardia[2] Christian J. Mainardes Leonardo Pires

Resumo

Neste artigo apresentamos uma reflexão sobre algumas dificuldades encontradas no processo ensino - aprendizagem da Matemática no Ensino Fundamental; mais precisamente, no que concerne à completude dos números reais. Propomos a construção de materiais manipulativos que permitam aos alunos, mediante questões investigativas, descobrir o conjunto dos números irracionais por meio do estudo de segmentos não comensuráveis.

Palavras-chave: Materiais manipulativos; completude dos números reais; segmentos comensuráveis; segmentos incomensuráveis.

Abstract

In this paper we present a reflection on some difficulties encountered in the teaching/learning process of Mathematics in Basic Education; more precisely, concerning the completeness of real numbers. We propose the construction of manipulative materials that allow students, through investigative questions, to discover the set of irrational numbers by studying non-commensurable segments.

Keywords: Manipulative materials; completeness of real numbers; commensurable segments; incommensurable segments.

1. Introdução

Uma das grandes realizações dos Pitagóricos foi a descoberta da existência de pontos na reta cuja abscissa não corresponde a nenhum número racional. Em particular, eles descobriram que não existe nenhum número racional ao qual corresponda a abscissa de um ponto P da reta, com origem O, de modo que o segmento OP seja congruente à diagonal de um quadrado cujos lados medem uma unidade. A descoberta desses "novos" números, os "não racionais", denominados irracionais, foi de grande importância no desenvolvimento da Matemática.

Tempos depois, segundo [1], o matemático alemão George Cantor, num de seus primeiros artigos, provou que o conjunto dos números racionais é enumerável. Ademais, utilizando um argumento conhecido como

[1]Parcialmente apoiado pela Fundação Araucária, #PBA2022011000222.
[2]Parcialmente apoiado pelo CNPq #302984/2022-4

processo da diagonal de Cantor, provou que o conjunto dos números reais pertencentes ao intervalo $[0, 1]$ constituem um conjunto não enumerável. Como consequência, os números reais formam um conjunto não enumerável, donde segue-se que o conjunto dos números irracionais é não enumerável. Portanto, a cardinalidade do conjunto dos números irracionais, descobertos pelos Pitagóricos, é uma quantidade infinita maior (em algum sentido) que a quantidade infinita dos números racionais. Esse fato, abstratamente, implica que ao se aplicar um processo aleatório de medição, ter-se-á, como resultado, um número irracional. No entanto, devido às limitações dos instrumentos e dos processos de medição, tal fato foge à compreensão comum, pois tais limitações acarretam que, por exemplo, ao esticarmos uma fita métrica para realizar medições, obtenha-se como resultado um número racional.

Essas diferenças entre a formulação do conceito matemático de forma abstrata e a limitação imposta pelos instrumentos e processos de medida faz com que a percepção de número irracional seja um desafio considerável no ensino dos números reais em todos os níveis da Educação Básica, sobretudo nos anos finais do Ensino Fundamental, em que o aluno está iniciando a desenvolver o raciocínio matemático abstrato.

Neste artigo, propomos uma atividade visando discutir e refletir sobre como introduzir o pensamento abstrato acerca dos números irracionais. Propomos a construção de um material manipulativo a ser construído segundo as propriedades matemáticas encontradas no processo dedutivo proposto, em que cada etapa da construcão é justificada por uma respectiva propriedade ou condição matemática estabelecida axiomaticamente ou demonstrada anteriormente.

Nossa proposta é utilizar a noção de segmentos incomensuráveis para introduzir o conceito de número irracional mediante questões investigativas. Pretende-se que os alunos "descubram" os números irracionais e, tal qual os Pitagóricos, se surpreendam com o fato de que existem pontos na reta com abcissa irracional, ou equivalentemente, que existam segmentos incomensuráveis. Num contexto mais formal, explorarmos a completude dos números reais de forma que o limite de uma sequência convergente de números reais possa ser encarado no Ensino Básico como um processo de comparação entre segmentos incomensuráveis.

O trabalho está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, definimos formalmente os conceitos de segmentos comensuráveis e incomensuráveis. Na Seção 3, elaboramos a construção de um material manipulativo para ser aplicado em sala de aula, visando explorar a completude dos números reais. Todos os passos da construção são formalmente justificados. Na Seção 4, descrevemos a aplicação de uma atividade aos alunos da oitava série do Ensino Fundamental, utilizando-se o material construído. Na Seção 5, apresentamos as considerações finais do artigo e destacamos a possibilidade da contrução proposta neste trabalho ser realizada em outros contextos.

2. Segmentos comensuráveis e incomensuráveis

Problemas envolvendo medidas que resultam na compreensão sobre os conceitos de frações, razões entre comprimentos, e por fim números racionais, eram conhecidos antes mesmo da concepção dos números inteiros. O centro da questão orbita na necessidade de se medir um segmento de comprimento ℓ utilizando-se como padrão uma unidade de medida u. A Figura 1 mostra alguns segmentos de reta de medida ℓ em função do segmento u considerado como unidade, representando alguns possíveis múltiplos e frações de u.

Informalmente, a razão $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ é o resultado da comparação de dois segmentos A e B de comprimentos a e b, respectivamente, com o intuito de estabelecer quantas vezes o segmento A "cabe" no segmento B. Mais precisamente, dizemos que um segmento A *cabe* n vezes em um segmento B quando $\mathrm{n}-1$ pontos decompuserem o segmento B em n segmentos congruentes de forma que $\mathrm{b} = \mathrm{na}$. Assim, quando o resultado dessa comparação $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ é um número inteiro, dizemos que a cabe um número exato de vezes em b. Quando o resultado da comparação $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ não é um número inteiro, dizemos que a não cabe um número exato de vezes em b.

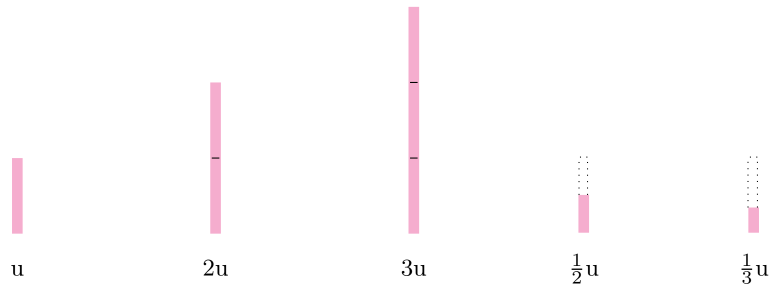

Figura 1: Comprimento e unidade

Durante muito tempo pensou-se que tal fração sempre representaria um número racional. Assim, caso não fosse possível colocar sobre um comprimento b uma quantidade exata de vezes um comprimento a, utilizava-se, nesse caso, um número inteiro adicionado de uma fração da unidade. Na Figura 2 representamos geometricamente a razão entre dois segmentos de comprimentos a e b, respectivamente, cujo resultado não é um número inteiro, mas sim um número inteiro adicionado de uma fração da unidade.

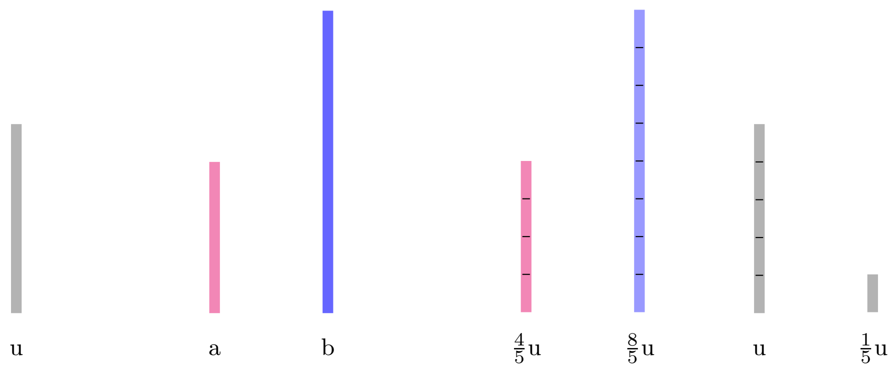

Figura 2: Razão e proporção

Baseando-nos na representação geométrica, tem-se, ao se considerar u como unidade, as seguintes relações: $\mathrm{a} = 4 \cdot \dfrac{1}{5}\mathrm{u}$ e $\mathrm{b} = 8 \cdot \dfrac{1}{5}\mathrm{u}$. Dessa forma, obtemos a razão:

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{\frac{4\mathrm{u}}{5}}{\frac{8\mathrm{u}}{5}} = \frac{1}{2}.$$

Se definirmos $\mathrm{u}' = \dfrac{1}{5}\mathrm{u}$, então podemos considerar u' como uma unidade de medida. Nessa nova unidade temos que $\mathrm{a} = 4\mathrm{u}'$ e $\mathrm{b} = 8\mathrm{u}'$ e, da mesma forma, obtemos

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{4\mathrm{u}'}{8\mathrm{u}'} = \frac{1}{2}.$$

Como sabemos, a existência de segmentos de comprimentos a e b cuja razão não pode ser expressa como uma divisão entre inteiros é conhecida desde os primórdios do desenvolvimento da Matemática. A existência de segmentos a e b de forma a não ser possível encontrar uma unidade u tal que a e b sejam múltiplos de u reflete o início da concepção de número irracional. Segundo [2], tal descoberta foi feita no quarto século antes de Cristo por um discípulo de Pitágoras, ao observar a razão entre as medidas do lado e da diagonal de um quadrado.

Diz-se que dois segmentos de reta são *comensuráveis* quando são múltiplos de um segmento comum e que são *incomensuráveis* quando não forem comensuráveis.

Do ponto de vista didático, a existência de segmentos incomensuráveis explicita a ineficiência dos números racionais para processos de medição. Com relação ao ponto de vista histórico tal existência acarreta na introdução dos números irracionais, de tal forma que a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais resulta na definição do conjunto dos números reais, que é utilizado principalmente como modelo de processos de medida. De fato, um dos axiomas da Geometria Plana garante a existência de uma bijeção entre o conjunto dos números reais e qualquer que seja a reta do plano. Atualmente, a noção de número real pode ser introduzida como um conceito primitivo, e as propriedades iniciais acerca de números reais como axiomas [3]. A existência de segmentos incomensuráveis e, por conseguinte, a existência dos números irracionais, expressa-se por meio da completude dos números reais: todo conjunto não vazio de números reais limitado superiormente possui supremo, que é a menor cota superior de tal conjunto [3, Cap. 2]. Mais exemplos sobre segmentos comensuráveis e incomensuráveis podem ser encontrados nas referências [4] e [5].

3. Fundamentos para a construção de materiais manipulativos

O formalismo e a abstração que tornam a abordagem dos números reais sistemática e elegante através da concepção de números irracionais pode ser explorada no Ensino Básico de maneira prática, proporcionando aos alunos a surpreendente descoberta da existência de segmentos incomensuráveis, tal qual o realizado pelo discípulo de Pitágoras ao comparar as medidas do lado e da diagonal de um quadrado. Tal abordagem é o que propomos nesta seção.

Consideremos um quadrado Q com lado L e diagonal D, cujas medidas são ℓ e d, respectivamente. De Q, destacamos dois segmentos congruentes a L e D, respectivamente, e os colocamos na vertical, um paralelo ao outro, de forma que ambos tenham as extremidades equivalentes numa mesma reta suporte (veja a Figura 3). Sabemos, do Teorema de Pitágoras, que $\mathrm{d} = \ell\sqrt{2}$. Portanto, L e D são incomensuráveis. O Teorema 1, apresentado a seguir, é de fundamental importância para nosso estudo.

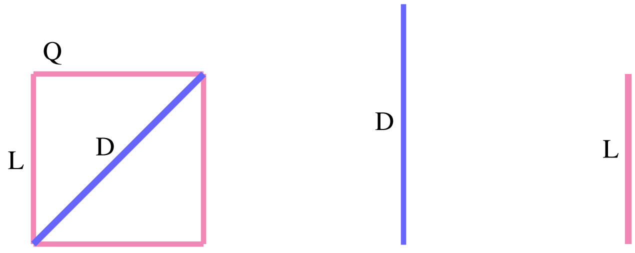

Figura 3: Dois segmentos incomensuráveis

Teorema 1. *Seja* Q *um quadrado de lado* L *com medida* ℓ *e diagonal* D *de medida* d. *São válidas as seguintes inequações:*

$$0 < \ell < \mathrm{d} < 2\ell. \tag{1}$$

Demonstração. Decompomos o quadrado Q em dois triângulos retângulos com diagonal D como hipotenusa. Como ao maior lado de um triângulo se opõe o maior ângulo, e num triângulo retângulo a medida da hipotenusa é maior que a medida dos catetos, segue-se que $0 < \ell < d$. Por outro lado, a desigualdade triangular garante que $d < 2\ell$. □

Pelo Teorema 1, temos que $d > \ell$, ou seja, $d - \ell > 0$. Assim, é possível sobrepor o lado L sobre a diagonal D de forma a "sobrar um segmento que denotaremos por C_1, cuja medida é $c_1 := d - \ell$ (veja a Figura 4).

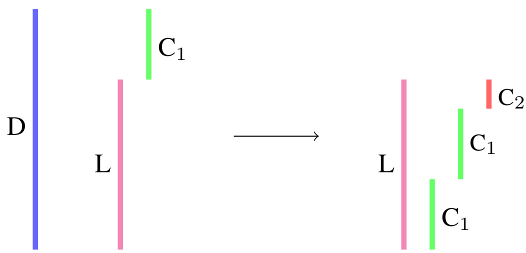

Figura 4: Construção dos segmentos C_1 e C_2

A medida de C_1 é, pelo Teorema 1, estritamente menor que ℓ, isto é, $d - \ell < \ell$. Portanto, podemos sobrepor o segmento C_1 sobre o lado L para descobrir se C_1 "cabe" um número exato de vezes em L. Para isso, consideramos os segmentos L e C_1 com uma de suas extremidades na mesma reta suporte, como ilustrado na Figura 4.

Afirmação 1. Os segmentos C_1 e L são incomensuráveis.

Demonstração. Suponha por absurdo que C_1 e L sejam comensuráveis. Logo, existem um segmento U_1 de comprimento u_1 e inteiros positivos m e n tais que $c_1 = nu_1$ e $\ell = mu_1$, ou seja, $\ell = (m/n)c_1$. Assim,

$$\sqrt{2} = \frac{d}{\ell} = \frac{\ell + c_1}{\ell} = 1 + \frac{c_1}{\frac{mc_1}{n}} = 1 + \frac{n}{m},$$

o que é um absurdo pois $1 + n/m$ é um número racional e a igualdade acima implicaria no fato de que $\sqrt{2}$ seria racional. Portanto, C_1 e L são incomensuráveis. □

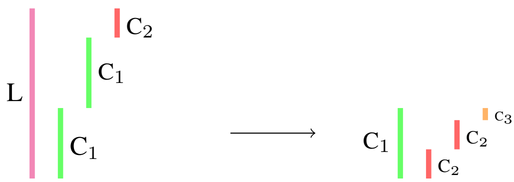

Figura 5: Construção dos segmentos C_2 e C_3

Agora, como na Figura 5, podemos sobrepor C_1 em L. Pela Afirmação 1, temos que C_1 não cabe um número exato de vezes em L; assim, obtemos um segmento C_2 cuja medida c_2 é dada por $c_2 := \ell - k_1c_1$, em que k_1 é a parte inteira da razão ℓ/c_1, isto é, $\ell/c_1 = k_1 + x_1$, $0 < x_1 < 1$. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} c_2 &= \ell - k_1c_1 = \ell - k_1(d-\ell) = \ell - \left(\frac{\ell}{c_1} - x_1\right)(d-\ell) \\ &= \ell - \left[\frac{\ell}{c_1}(d-\ell) - x_1(d-\ell)\right] = x_1(d-\ell) \\ &< d - \ell = c_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Portanto, $c_2 < c_1$ e, similarmente ao caso anterior, podemos sobrepor o segmento C_2 sobre C_1 para verificar se o segmento C_2 cabe um número exato de vezes em C_1.

Afirmação 2. Os segmentos C_1 e C_2 são incomensuráveis.

Demonstração. Suponha por absurdo que C_1 e C_2 sejam comensuráveis. Analogamente ao que foi feito na demonstração da Afirmação 1, existem inteiros positivos m e n tais que $c_1 = (m/n)c_2$. Portanto,

$$\ell = k_1c_1 + c_2 = k_1c_1 + \frac{nc_1}{m} \Rightarrow \frac{\ell}{c_1} = \frac{k_1m+n}{m};$$

como $(k_1m+n)/m$ é um número racional, C_1 e L seriam comensuráveis, o que contradiz a Afirmação 1. □

Ao procedermos analogamente (veja a Figura 6), obteremos uma sequência C_n de segmentos com medida c_n definida por

$$\begin{cases} c_0 = \ell, \\ c_n = k_{n+1}c_{n+1} + c_{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{3}$$

em que k_{n+1} é a parte inteira da razão c_n/c_{n+1}, isto é, $c_n/c_{n+1} = k_{n+1} + x_{n+1}$, $0 < x_{n+1} < 1$.

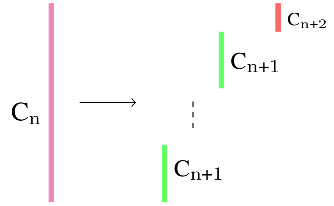

Figura 6: Construção da sequência de segmentos C_n

O Teorema 2, resultado principal deste artigo, descreve qual o comportamento da sequência (c_n) e será fundamental para a elaboração das atividades descritas na próxima seção.

Teorema 2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, os segmentos C_n e C_{n+1} são incomensuráveis. A sequência de termos positivos $(c_n)_n$ é decrescente e satisfaz a seguinte relação de recorrência:*

$$c_n = x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_1(d-\ell), \tag{4}$$

em que $x_1, \ldots, x_{n-1}$ definidos em (3), são tais que a sequência $x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, \ldots$ também é uma sequência decrescente de termos positivos.

Demonstração. Por construção, temos que $c_n > 0$ e, por definição, tem-se que

$$c_n = k_{n+1}c_{n+1} + c_{n+2} = \left(\frac{c_n}{c_{n+1}} - x_{n+1}\right)c_{n+1} + c_{n+2} = c_n - x_{n+1}c_{n+1} + c_{n+2},$$

o que implica em

$$x_{n+1}c_{n+1} = c_{n+2}.$$

Mas $x_{n+1} < 1$ garante que $x_{n+1}c_{n+1} < c_{n+1}$, donde obtém-se que

$$c_{n+2} = x_{n+1}c_{n+1} < c_{n+1}.$$

Portanto, $(c_n)_n$ é uma sequência decrescente.

A prova do fato de que os segmentos C_n e C_{n+1}, são incomensuráveis será feita por indução em n. Os casos $n = 1, 2$ seguem das Afirmações 1 e 2 acima. Suponha que C_n e C_{n+1} sejam incomensuráveis entre si, mas que C_{n+1} e C_{n+2} sejam comensuráveis. Então, existe $k \in \mathbb{Q}$ tal que

$$c_{n+1} = kc_{n+2} = k(c_n - k_{n+1}c_{n+1}) = kc_n + kk_{n+1}c_{n+1}$$

o que implica $c_{n+1}(1 - kk_{n+1}) = kc_n$, isto é

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{k}{1 - kk_{n+1}}.$$

Observe que $k \neq 1$ and $k_{n+1} \neq 1$ pois, $c_{n+1} > c_{n+2}$ e $c_n > c_{n+1}$. Além disso, $kk_{n+1} \neq 1$ pois, caso contrário, teriamos

$$kk_{n+1} = 1 \Rightarrow \frac{c_{n+1}}{c_{n+2}} = \frac{1}{k_{n+1}} < 1 \Rightarrow c_{n+1} < c_{n+2},$$

o que é absurdo pois $(c_n)_n$ é decrescente. Assim, $1 - kk_{n+1} \neq 1$, donde $\frac{k}{1-kk_{n+1}}$ é um número racional, o que implica C_n e C_{n+1} são comensuráveis, contrariando a hipótese de indução.

Finalmente, como para cada $n \in \mathbb{N}$ vale $0 < x_n < 1$, concluímos que a sequência $x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, \ldots$ é uma sequência decrescente de termos positivos. $\square$

Como consequência imediata do Teorema 2 e do fato de que toda sequência monótona e limitada é convergente, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 1. *A sequências* $(c_n)_n$ *e* $x_1, x_1x_2, x_1x_2x_2, \ldots$ *são convergentes.*

4. Atividade com materiais manipulativos em sala de aula

Nesta seção relatamos a aplicação a alunos do oitavo ano do Ensino fundamental de uma atividade elaborada a partir dos conceitos elencados na Seção 2 e fundamentada no procedimento descrito na Seção 3. A escolha da turma foi motivada pelo fato de os alunos estarem realizando atividades de nivelamento no que concerne aos conteúdos sobre números racionais. Ressaltamos que, embora julgamos ser não necessário, o conhecimento prévio sobre representação decimal abrangendo dizimas periódicas e representação decimal infinita não periódica aumentou a compreensão dos alunos na questão de investigar a existência de segmentos incomensuráveis.

Inicialmente a turma foi dividida em grupos, sendo que cada grupo recebeu os seguintes materiais: duas folhas de papel sulfite em branco, duas folhas de papel sulfite com marcações e alguns macarrões do tipo espaguete para representar segmentos de retas, conforme Figura 7. Observamos que testes prévios nos mostraram que materiais como varetas de bambu ou palitos para churrasco apresentam dificuldade no corte, sendo necessário tesoura robusta ou serra manual para a realização dos cortes. Além disso, tais materiais demonstraram ineficiência no processo de corte, proporcionando maior erro no processo de construção dos segmentos $\mathrm{C_n}$ conforme procedimento descrito na seção anterior.

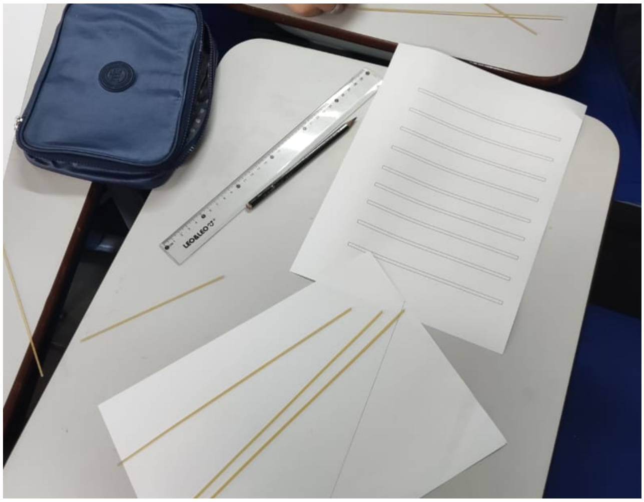

Figura 7: Materiais disponibilizados aos alunos

A primeira atividade consistiu na construção manual (desenho), utilizando uma régua graduada, de uma figura geométrica específica: o triângulo pitagórico de catetos medindo $15\mathrm{cm}$, $20\mathrm{cm}$ e hipotenusa medindo $25\mathrm{cm}$. Sugerimos aos alunos que construíssem os catetos exatamente sobre os lados da folha (retângulo disponibilizado), pois assim teríamos mais precisão na construção do ângulo reto (veja a Figura 8).

Figura 8: Construção do triângulo pitagórico

A seguir, pedimos para que os alunos sobrepusessem um segmento (os macarrões disponibilizados) sobre um dos catetos e o cortassem da forma mais precisa possível, repetindo o procedimento sobre a hipotenusa, obtendo assim dois macarrões com os comprimentos do cateto escolhido e da hipotenusa, respectivamente. Obviamente, quanto mais preciso o corte, melhor será o resultado final.

Finalmente passamos para a construção do segmento C_1, comparando e sobrepondo os segmentos (de macarrão) obtidos no passo anterior, e então destacando o pedaço restante, que seria o segmento C_1. Paralelamente, pedimos aos alunos que anotassem os segmentos L, D e C_1 que encontraram na folha disponibilizada para o registro dos resultados. O próximo passo consistiu em comparar e sobrepor os segmentos L e C_1 para a obtenção do segmento C_2, conforme processo descrito na seção anterior. Após alguns passos, a unidade medindo $5\mathrm{cm}$ foi encontrada. Neste momento foi feita uma exposição da noção de segmentos comensuráveis e de números racionais.

A próxima atividade consistiu em repetir os procedimentos já descritos; porém, com a construção manual (desenho) do triângulo retângulo de catetos medindo $15\mathrm{cm}$ cada e hipotenusa medindo $15\sqrt{2}$. Neste caso, sabemos que o lado e a hipotenusa representam segmentos incomensuráveis. Esse fato proporcionou aos alunos a necessidade de executar mais passos no processo de construção dos segmentos C_n. Obtivemos dos alunos dois tipos de conclusões resultantes das iterações. A primeira resposta indica que o processo acaba e logo poderíamos encontrar uma unidade. Obviamente, tal resultado errôneo foi devido às limitações do material que usamos e da precisão dos instrumentos e processos de medição, conforme já discutimos na introdução. O segundo tipo de resposta relata a obtenção de segmentos tão pequenos que impossibilitou a continuação do processo. Essa resposta nos parece satisfatória pois indaga a possibilidade de continuação do processo indefinidamente se fosse possível realizar as medições dos segmentos corretamente.

Ao questionarmos os alunos sobre a possibilidade de não ser possível encontrar uma unidade para os segmentos representando o lado e a diagonal de um quadrado, os alunos interagiram de forma positiva, pois citaram o conhecimento da existência de números com representação decimal infinita não periódica. Esta foi a deixa para iniciarmos a discussão sobre a existência de segmentos incomensuráveis.

5. Considerações Finais

Acreditamos que este artigo possa explicitar a diferença entre a abordagem teórica abstrata acerca da completude dos números reais e a aplicação de uma atividade investigativa sobre o mesmo tema. Durante a preparação e a aplicação da atividade, percebemos que, embora os materiais manipulativos apresentem limitações intrinsecas, é possível explorar pensamentos e conceitos abstratos a partir de atividades investigativas.

Claramente as ideias e atividades discutidas e as propostas descritas neste trabalho podem ser exploradas em outras atividades. Por exemplo, pode-se elaborar atividades que envolvam o comprimento do círculo e seu diâmetro. Note que, neste caso, teríamos que ter em mãos novos materiais para sobrepor o comprimento do círculo. Além disso, construções geométricas realizadas com o auxilio de softwares computacionais, tais como o Geogebra, possibilitaria um maior número de iterações para a construção da sequência (c_n) pois, neste caso, poderia-se diminuir os erros provenientes dos cortes manuais.

Referências

[1] Eves, H. *Introdução À História da Matemática.* Ed. Unicamp, 2004.

[2] Lima, E. *Números e funções reais.* Profmat, SBM, 2023.

[3] Lima, E. *Análise real. Volume 1* Matemática universitária, IMPA, 2006.

[4] Machado, N. J. *Matemática por assunto: lógica, conjuntos e funções. Unidade 1*. Ed. Scipione, 1988.

[5] Paterline, R. R.; Azevedo, E. *A descoberta da incomensurabilidade*, Hipertexto Pitágoras, 2004, disponível em https://www.dm.ufscar.br/hp/hp527/hp527001/hp5270012/hp5270012.html

Jocemar Q. Chagas
Departamento de Matemática e Estatística
Universidade Estadual de Ponta Grossa
<jocemarchagas@uepg.br>

Giuliano G. La Guardia
Departamento de Matemática e Estatística
Universidade Estadual de Ponta Grossa
<gguardia@uepg.br>

Christian J. Mainardes
Escola Estadual Professora Halia Terezinha Gruba
PROFMAT- Universidade Estadual de Ponta Grossa
<christian.mainardes@escola.pr.gov.br>

Leonardo Pires
Departamento de Matemática e Estatística
Universidade Estadual de Ponta Grossa
<lpires@uepg.br>

Recebido: 24/06/2024
Publicado: 14/12/2024