PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.12, n.3, 2024
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2024/pmo1230

Números poligonais: teoria e aplicações

Ana Claudia M. Mendonça   Robledo Maks M. Sette   Irene M. Craveiro

Resumo

Os números poligonais são uma categoria específica de números figurados, pertencentes a uma classe de arranjos representados por construções geométricas de pontos equidistantes. Quando esses arranjos formam polígonos regulares, são denominados números poligonais. Este trabalho tem como objetivo apresentar quatro abordagens distintas para compreender e explorar os números poligonais: a abordagem geométrica, a aplicação de fórmulas de recorrência, o desenvolvimento de fórmulas explícitas e função geradora. A abordagem geométrica envolve a representação visual de padrões de números poligonais, examinando arranjos de pontos para identificar regularidades e derivar fórmulas de recorrência. As fórmulas explícitas emergem naturalmente das recorrências observadas nos padrões. Por outro lado, a função geradora trata esses números através da expansão em séries de potências de funções racionais associadas aos números poligonais. Além de investigar novas fórmulas, essas abordagens permitem explorar propriedades já conhecidas desses números.

Palavras-chave: Números poligonais; Fórmula Explícita; Função Geradora.

Abstract

Polygonal numbers are a specific category of figurative numbers, belonging to a class of arrangements represented by geometric constructions of equidistant points. When these arrangements form regular polygons, they are called polygonal numbers. This work aims to present four distinct approaches to understanding and exploring polygonal numbers: the geographic approach, the application of recurrence formulas, the development of explicit formulas and generating function. The progressive approach involves visually representing polygonal number patterns, examining point arrangements to identify regularities, and deriving recurrence formulas. Explicit formulas emerge naturally from the recurrences observed in the patterns. On the other hand, the generating function approach treats these numbers through the expansion into power series of rational functions associated with polygonal numbers. In addition to investigating new formulas, these approaches allow us to explore already known properties of these numbers.

Keywords: Polygonal Numbers; Explicit Formula; Generating Function.

1. Introdução

Números figurados podem ser representados visualmente por meio de um conjunto de pontos igualmente espaçados que formam a borda de uma figura geométrica específica. Quando esse arranjo de pontos se organiza de modo a criar a borda de um polígono regular de m lados, obtemos uma classe de números figurados conhecidos na literatura como números poligonais P_m. Para mais detalhes veja [1]. Alguns exemplos notáveis de números poligonais incluem os números triangulares, que formam triângulos equiláteros; os números quadrados, que se organizam em quadrados perfeitos, os números hexagonais, que geram hexágonos regulares e assim por diante. Em geral, dado um m-ágono regular queremos dispor um conjunto de pontos igualmente espaçados sobre sua borda. Por exemplo, para $m = 11$ a sequência dos pontos com essa propriedade é formada pelos números hendecagonais, ou seja, a sequência de pontos igualmente espaçados, formando um polígono regular de onze lados, conhecido como hendecágono. Cada número hendecagonal é o resultado da seguinte relação de recorrência,

$$\begin{cases} P_{11}(1) = 1 \\ P_{11}(n) = P_{11}(n-1) + 9(n-1) + 1, \quad \text{se} \quad n > 1 \end{cases}$$

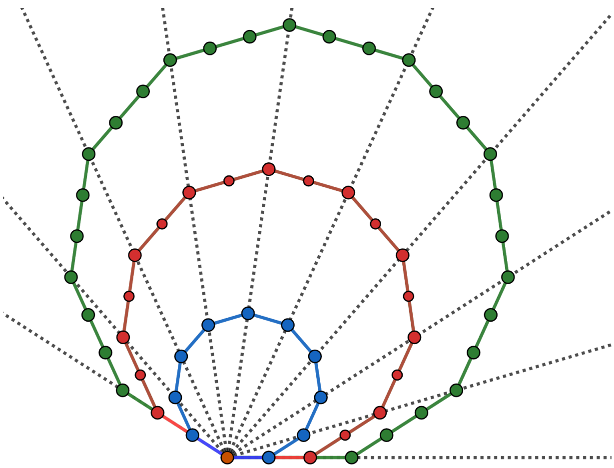


Figura 1: Figura 1: Três polígonos com 11 lados(hendecagonal) formando o número hendecagonal $P_{11}(4) = 58$.

A construção dos números hendecagonais começa com um ponto(cor laranja), que denotamos como $P_{11}(1) = 1$. Em seguida, adicionamos 10 pontos(cor azul) (ou seja, $9\times(2-1)+1$) para formar $P_{11}(2) = 11$. No passo seguinte, partimos dos 11 pontos do passo anterior para construir um novo hendecágono(cor vermelha), resultando em $P_{11}(3) = 11 + 9 \times (3-1) + 1 = 11 + 18 + 1 = 30$. Novamente, com os 30 pontos dispostos de acordo com a figura 1, obtemos(cor verde) $P_{11}(4) = 30 + 9 \times (4-1) + 1 = 30 + 27 + 1 = 58$. No próximo hendecágono os lados seriam divididos em 4 partes, dando origem a $P_{11}(5)$, assim por diante.

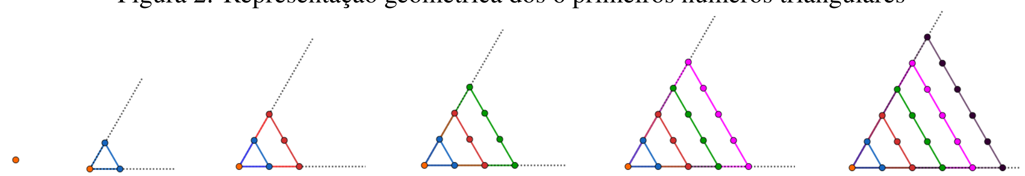
Agora vamos considerar outras sequências que geram números poligonais definidas, por recorrência, da mesma forma que os números hendecagonais: $P_3(n), P_4(n), P_5(n)$ e $P_6(n)$, $n \geq 1$, conhecidas como números triangulares, números quadrados, pentagonais e hexagonais, respectivamente.

$$\begin{array}{lccccccccc}
P_3(n): & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 & \ldots \\
P_4(n): & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & \ldots \\
P_5(n): & 1 & 5 & 12 & 22 & 35 & 51 & 70 & 92 & \ldots \\
P_6(n): & 1 & 6 & 15 & 28 & 45 & 66 & 91 & 120 & \ldots
\end{array}$$

Observe que podemos definir a sequência $P_3(n)$ por recorrência, da seguinte forma:

$$\begin{cases} P_3(1) = 1 \\ P_3(n) = P_3(n-1) + n, \quad n \geq 2. \end{cases} \tag{1}$$

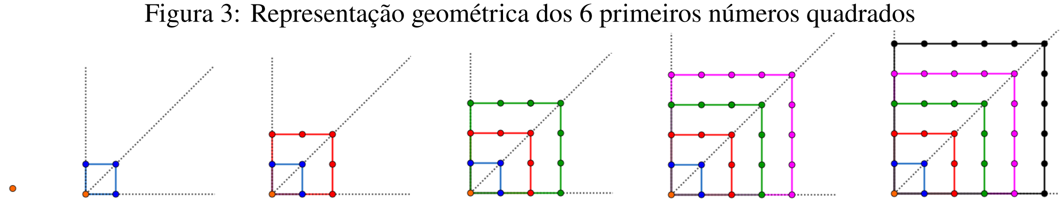
Figura 2: Representação geométrica dos 6 primeiros números triangulares



Do mesmo modo, temos a sequência dos números quadrados

$$\begin{cases} P_4(1) = 1 \\ P_4(n) = P_4(n-1) + 2n - 1, \quad n \geq 2, \end{cases} \tag{2}$$

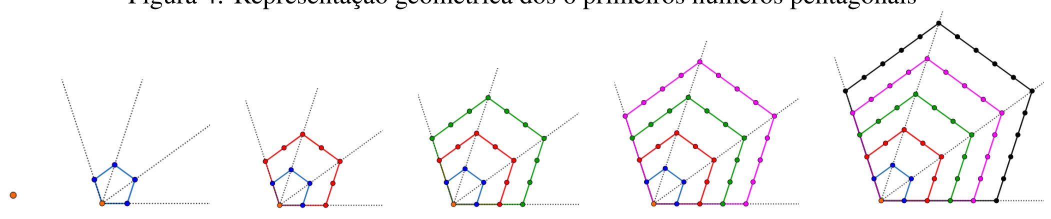
Figura 3: Representação geométrica dos 6 primeiros números quadrados



Analogamente, define-se a sequência dos números pentagonais:

$$\begin{cases} P_5(1) = 1 \\ P_5(n) = P_5(n-1) + 3n - 2, \quad n \geq 2, \end{cases} \tag{3}$$

Figura 4: Representação geométrica dos 6 primeiros números pentagonais

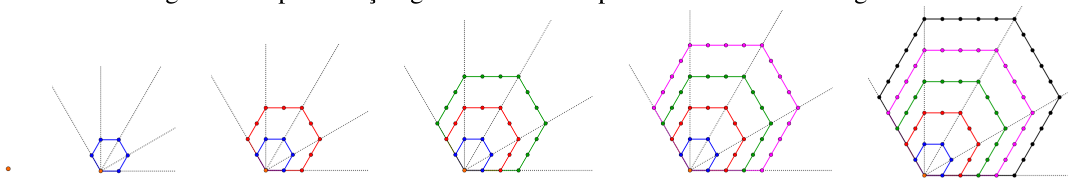


Por fim, a sequência dos números hexagonais

$$\begin{cases} P_6(1) = 1 \\ P_6(n) = P_6(n-1) + 4n - 3, \quad n \geq 2. \end{cases} \tag{4}$$

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Figura 5: Representação geométrica dos 6 primeiros números hexagonais



Podemos reescrever os termos gerais das sequências de números poligonais, dadas acima segundo um padrão que leva em consideração a quantidade de lados do polígono que gera os números da sequência, por meio das relações de recorrência de ordem 1 dadas em (5), (6), (7) e (8) como segue:

$$\begin{cases} P_3(1) = 1 \\ P_3(n) = P_3(n-1) + (3-2)(n-1) + 1, \quad n \geq 2, \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} P_4(1) = 1 \\ P_4(n) = P_4(n-1) + (4-2)(n-1) + 1, \quad n \geq 2, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} P_5(1) = 1 \\ P_5(n) = P_5(n-1) + (5-2)(n-1) + 1, \quad n \geq 2, \end{cases} \tag{7}$$

e por último,

$$\begin{cases} P_6(1) = 1 \\ P_6(n) = P_6(n-1) + (6-2)(n-1) + 1, \quad n \geq 2. \end{cases} \tag{8}$$

2. Números Poligonais: Uma fórmula explícita e propriedades

Um número poligonal é formado pelo arranjo de pontos discretos que se organizam em polígonos regulares. Fixando $m > 2$ observamos um padrão, levando em consideração a quantidade de lados m do polígono regular, e assim, reescrevemos de forma mais geral,

$$\begin{cases} P_m(1) = 1 \\ P_m(n) = P_m(n-1) + (m-2)(n-1) + 1, \quad n \geq 2. \end{cases} \tag{9}$$

O objetivo agora, é encontrar a fórmula geral para o n-ésimo termo na sequência de números m-agonais.

Proposição 1. *Seja m um número natural maior do que 2. A fórmula geral para o n-ésimo número m-agonal é dada por*

$$P_m(n) = (m-2)\frac{n(n-1)}{2} + n, \quad n \geq 1 \tag{10}$$

Demonstração. Na definição por recorrência dos números poligonais, o n–ésimo número m–agonal é um conjunto de pontos que geram um m–ágono regular por meio da recorrência de ordem 1, dada em (9).

Teremos que

$$\begin{aligned}
P_m(1) &= 1 \\
P_m(2) &= P_m(1) + (m-2) + 1 \\
P_m(3) &= P_m(2) + 2(m-2) + 1 \\
&\vdots \\
P_m(n-1) &= P_m(n-2) + (n-2)(m-2) + 1 \\
P_m(n) &= P_m(n-1) + (n-1)(m-2) + 1
\end{aligned}$$

Dessa forma, somando a equação $P_m(k) = P_m(k-1) + (m-2)(k-1) + 1$ para $1 \leq k \leq n$, temos

$$P_m(n) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} [(m-2)k + 1].$$

Como

$$\sum_{k=1}^{n-1} (m-2)k = (m-2) \sum_{k=1}^{n-1} k = (m-2) \frac{n(n-1)}{2},$$

segue que a fórmula geral para os números poligonais de ordem m é

$$P_m(n) = (m-2) \frac{n(n-1)}{2} + n, \quad n \geq 1. \tag{11}$$

□

Exemplo 1. Para $m = 11$, temos os números hendecagonais, cuja fórmula explícita, de acordo com a Proposição 1, é dada por: $P_{11}(n) = (11-2) \dfrac{n(n-1)}{2} + n = \dfrac{9n^2 - 9n + 2n}{2} = \dfrac{9n^2 - 7n}{2} = \dfrac{n(9n-7)}{2}$.

Segue algumas propriedades referentes aos números poligonais:

Proposição 2. *Seja $m \geq 3$ fixado. Valem as seguintes identidades:*

1. $P_m(n) = P_3(n) + (m-3)P_3(n-1)$*, para todo* $n \geq 2$*;*

2. $P_m(n) = P_{m-1}(n) + P_3(n-1)$*, para todo* $n \geq 2$*;*

3. $P_m(n) = n + (m-2)P_3(n-1)$*, para todo* $n \geq 2$*.*

Demonstração. 1. Temos que

$$\begin{aligned}
P_3(n) + (m-3)P_3(n-1) &= \frac{n^2 - n}{2} + n + (m-3)\left(\frac{n^2 - 3n + 2}{2} + (n-1)\right) \\
&= \frac{n^2 + n}{2} + (m-3)\frac{n^2 - n}{2} \\
&= (m-2)\frac{n^2 - n}{2} + n = P_m(n).
\end{aligned}$$

2. Temos que

$$\begin{aligned}
P_{m-1}(n) + P_3(n-1) &= (m-3)\frac{n^2-n}{2} + n + \frac{n^2-3n+2}{2} + n - 1 \\
&= \frac{(m-2)n^2 - (m-2)n + 2n}{2} \\
&= (m-2)\frac{n^2-n}{2} + n = P_m(n).
\end{aligned}$$

3. Temos que

$$\begin{aligned}
n + (m-2)P_3(n-1) &= n + (m-2)\left(\frac{n^2-3n+2}{2} + (n-1)\right) \\
&= n + (m-2)\frac{n(n-1)}{2} \\
&= P_m(n).
\end{aligned}$$

□

Agora, fixado $k \geq 1$ um número natural, queremos determinar uma expressão reduzida para soma dos k primeiros números m-agonais.

Proposição 3. *Seja* $k \geq 1$ *natural fixo e* $m \geq 3$ *natural. Se* $S_m(k)$ *é a soma dos* k *primeiros números* m*-agonais, então*

$$S_m(k) = \frac{k(k+1)[2k(m-2)+2(5-m)]}{12}, \quad m \geq 3, \quad k \geq 1. \tag{12}$$

Demonstração. Temos que

$$S_m(k) := \sum_{n=1}^{k} P_m(n), \qquad \text{com } m \geq 3 \text{ natural.} \tag{13}$$

Pela equação 1, podemos escrever:

$$S_m(k) = \sum_{n=1}^{k}\left[(m-2)\frac{n(n-1)}{2} + n\right]. \tag{14}$$

Sendo a soma finita, podemos associar como segue:

$$\begin{aligned}
S_m(k) &= \sum_{n=1}^{k}\left[(m-2)\frac{n(n-1)}{2} + n\right] \\
&= \frac{m-2}{2}\sum_{n=1}^{k} n^2 + \left(1 - \frac{m-2}{2}\right)\sum_{n=1}^{k} n \\
&= \frac{(m-2)k(k+1)(2k+1)}{12} + \frac{(4-m)k(k+1)}{4} \\
&= \frac{k(k+1)[2k(m-2)+2(5-m)]}{12}.
\end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever

$$S_m(k) = \frac{k(k+1)[2k(m-2)+2(5-m)]}{12}, \quad m \geq 3, \quad k \geq 1. \tag{15}$$

□

3. A função geradora para os números poligonais

No trabalho de Santos et all, é apresentada uma abordagem para a resolução de problemas de contagem através do uso de funções geradoras. Essas funções são representadas como séries de potências, onde os coeficientes fornecem informações relevantes sobre uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. O expoente da variável na série desempenha o papel de quantificar alguma propriedade desejada relacionada a essa sequência. Essa propriedade pode variar, abrangendo desde o comprimento de uma sequência até a busca por soluções inteiras de uma equação específica com coeficientes inteiros, cuja soma resulta em um valor fixo, neste caso, n. Ao somar as potências da variável x associadas a essas funções geradoras, o coeficiente de x^n corresponde ao termo da sequência localizado na posição n, atendendo aos critérios estabelecidos no problema em questão.

As séries de potências desempenham um papel fundamental na aproximação de funções. Em outras palavras, quando se trata de uma função específica, ao descobrir uma série infinita que converge para essa função, é possível utilizar as somas parciais dessa série para se aproximar da função e obter um valor numérico aproximado. Mesmo quando as funções originais são complexas ou desafiadoras de serem avaliadas diretamente, as somas parciais das séries infinitas correspondentes se reduzem a polinômios, o que facilita significativamente sua avaliação.

O método de aproximar funções por meio das somas parciais de suas séries infinitas é amplamente empregado em computadores e calculadoras para gerar valores de funções notáveis, como e^x, $\ln x$, e as funções trigonométricas. Para obter mais informações detalhadas, é possível consultar as referências bibliográficas [3] e [4].

Definição 1. Séries de potências ou séries formais são somas infinitas da forma

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

onde cada termo é uma constante multiplicada por uma potência de x.

Exemplo 2. Um exemplo direto da definição é a série geométrica

$$\sum_{n\geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots . \tag{16}$$

A sequência das somas parciais dessa série é dada por

$$S_k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}.$$

De acordo com [4] quando a variável x, na definição 1 assume um valor numérico específico, a série de potências se transforma em uma sequência numérica que pode convergir ou divergir. Uma série de potências de x pode convergir para determinados valores de x e divergir para outros.

Por exemplo, como a soma da série em 16 é o limite de (S_k), com $k \to \infty$, segue que essa série converge se, e somente se $x^{k+1} \to 0$ quando $k \to \infty$. Assim, temos $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$, para os valores x, com $-1 < x < 1$. Fora desse intervalo, assumir essa igualdade nos leva a situações incoerentes e/ou inusitadas, como por exemplo para $x = -1$, temos a afirmação

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

É possível estabelecer que para cada série de potência existe um intervalo simétrico $-L < x < L$, no qual a série converge, e fora desse intervalo, a série diverge. Nos pontos de fronteira, ou seja, em $x = -L$ e $x = L$, a série pode tanto convergir quanto divergir. O valor de L é denominado o "raio de convergência", e o conjunto de todos os valores de x para os quais a série converge é chamado de "intervalo de convergência". Esse raio pode se estender até o infinito se a série convergir para todos os valores de x no conjunto dos números reais.

Ainda, de [4], dada uma função $f(x)$ com série de potências correspondente dada por

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

convergindo em um intervalo $(-L, L)$. Se f é derivável nesse intervalo, então a série derivada converge para $f'(x)$ neste intervalo. Assim, derivando a série termo a termo, obtemos que

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

é a serie de potências da função derivada com raio de convergência também igual a L.

Exemplo 3. A série geométrica $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ tem raio de convergência $L = 1$ e é derivável em $(-1, 1)$. Assim, concluímos que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Nosso próximo passo é determinar uma função que esteja relacionada com a sequência de números poligonais. Em outras palavras, buscamos encontrar uma função geradora que descreva essa sequência com base na recorrência que a origina.

Para isso multiplique x^n na equação 9: $P_m(n)x^n = P_m(n-1)x^n + (m-2)(n-1)x^n + x^n$. Dessa forma,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_m(n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} P_m(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (m-2)(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Queremos determinar a função geradora para a sequência númerica dos números poligonais, $P_m(1)$, $P_m(2), P_m(n) \ldots$. Para isso, façamos $f_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_m(n)x^n$, onde $P_m(0) = 0$.

Observe que

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_m(n)x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} P_m(n-1)x^{n-1} + (m-2) \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_m(n)x^n = x\sum_{n=0}^{\infty} P_m(n)x^n + (m-2)\sum_{n=1}^{\infty} nx^n + (-m+3)\sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Logo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_m(n)x^n = x\sum_{n=0}^{\infty} P_m(n)x^n + (m-2)x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} + (-m+3)\left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1\right].$$

Segue, dos exemplos 1, 2 e do fato que $f_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_m(n)x^n$, que:

$$f_m(x) = xf_m(x) + (m-2)x\frac{1}{(1-x)^2} + (-m+3)\left[\frac{1}{1-x} - 1\right].$$

Ou seja,

$$f_m(x)(1-x) = (m-2)x\frac{1}{(1-x)^2} + (-m+3)\frac{x}{1-x}.$$

Assim,

$$f_m(x) = \frac{x(m-2) + (-m+3)x(1-x))}{(1-x)^2}\frac{1}{1-x} = \frac{x\left[m-2+3-m-x(3-m)\right]}{(1-x)^3}.$$

Portanto,

$$f_m(x) = \frac{x\left[(1+x(m-3)\right]}{(1-x)^3}.$$

Dessa forma concluímos o seguinte resultado:

Proposição 4. *Seja* m *um número natural maior do que 2. A função geradora para a sequência dos números* m*-agonais é*

$$f_m(x) = \frac{x\left[(1+x(m-3)\right]}{(1-x)^3}.$$

A Proposição 4 possibilita a resolução de recorrências de ordem 1 por meio do uso do conceito de funções racionais, revelando como outros temas matemáticos estão conectados e unindo diversas subáreas da matemática.

No exemplo a seguir, faremos a conexão da recorrência de ordem 1 com a função racional, cuja expansão em série de potências revelam informações das potências de x.

Exemplo 4. Para $m = 11$ na Proposição 4, obtemos a seguinte função:

$$f_{11}(x) = \frac{x\left[(1+x(11-3)\right]}{(1-x)^3} = \frac{8x^2+x}{(1-x)^3}.$$

Vamos expandir em série de potências $f_{11}(x) = \dfrac{8x^2+x}{(1-x)^3}$ e observar os respectivos coeficientes das potências de x.

Segue do Exemplo 3, para os valores x no intervalo $(-1,1)$,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Como $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ é derivável em $(-1,1)$ podemos escrever:

$$\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right)'$$

Logo,

$$-\frac{2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = 2\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot x + 4\cdot 3\cdot x^2 + 5\cdot 4\cdot x^3 + \cdots + (n+2)\cdot(n+1)\cdot x^n + \cdots .$$

Ou ainda,

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot x + 4\cdot 3\cdot x^2 + 5\cdot 4\cdot x^3 + \cdots + (n+2)\cdot(n+1)\cdot x^n + \cdots .$$

Dessa forma,

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{2\cdot 1}{2} + \frac{3\cdot 2}{2}x + \frac{4\cdot 3}{2}\cdot x^2 + \frac{5\cdot 4}{2}\cdot x^3 + \cdots + \frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2}\cdot x^n + \cdots .$$

Assim,

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n.$$

Portanto,

$$f_{11}(x) = \frac{8x^2+x}{(1-x)^3} = 8x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n.$$

O coeficiente de x^n em $f_{11}(x)$ é igual a:

$$P_{11}(n) = 8\binom{n-2+2}{2} + \binom{n-1+2}{2} = 8\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = 8\cdot\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{8n^2-8n}{2} + \frac{n^2+n}{2}.$$

Assim, $P_{11}(n) = \dfrac{9n^2-7n}{2}$. Além disso, $P_{11}(n) = 8\cdot\dfrac{n(n-1)}{2} + \dfrac{n(n+1)n}{2} = 8P_3(n-1) + P_3(n)$.

No caso geral, escrevemos:

$$f_m(x) = \frac{(m-3)x^2 + x}{(1-x)^3} = (m-3)x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n.$$

e o coeficente de x^n é igual a $P_m(n)$ e, além disso, $P_m(n) = (m-3)\binom{n-2+2}{2} + \binom{n-1+2}{2} = (m-3)\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = (m-3)\cdot\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = (m-3)P_3(n-1) + P_3(n).$

4. Números triangulares e quadrados perfeitos

O objetivo agora é encontrar os números 3-agonais que também são 4-agonais, ou seja, números triangulares que são quadrados perfeitos. De acordo com [1] para determinar os números que são triangulares e quadrados é utilizado um método chamado de método de Euler, que consiste na seguinte ideia: dados u e v inteiros positivos temos que resolver a seguinte equação: $P_3(u) = P_4(v)$. Desta forma, pela Proposição 1, temos que:

$$\frac{1}{2}u(u+1) = v^2 \Leftrightarrow u^2 + u = 2v^2 \Leftrightarrow 4u^2 + 4u = 8v^2 \Leftrightarrow 4u^2 + 4u + 1 = 8v^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow (2u+1)^2 = 2(2v)^2 + 1 \Leftrightarrow (2u+1)^2 - 2(2v)^2 = 1.$$

Fazendo $x = 2u + 1$ e $y = 2v$, obtemos a seguinte equação $x^2 - 2y^2 = 1$, a qual queremos determinar soluções inteiras positivas. Esse tipo de equação é um caso particular das chamadas *Equações de Pell*.

Uma *Equação de Pell* é do tipo $x^2 - Ay^2 = 1$, onde A não é quadrado perfeito. As soluções (x_n, y_n) de uma Equação de Pell são dadas por:

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{(x_1 + y_1\sqrt{A})^n + (x_1 - y_1\sqrt{A})^n}{2}, \frac{(x_1 + y_1\sqrt{A})^n - (x_1 - y_1\sqrt{A})^n}{2\sqrt{A}}\right),$$

onde (x_1, y_1) é a solução mínima, ou seja, os menores inteiros positivos x_1 e y_1 que satisfazem a equação. Para obter (x_1, y_1), basta encontrar dentre a sequência $\frac{p_n}{q_n}$ de convergentes da fração contínua que representa $\sqrt{A}$ o menor par (p_n, q_n) que satistaz a equação.

Para a equação $x^2 - 2y^2 = 1$, tem-se que $(3, 2)$ é a solução mínima. Assim,

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{(3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n}{2}, \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}\right)$$

são soluções da equação de Pell relacionada ao problema dos números triangulares que são quadrados perfeitos.

Agora daremos mais detalhes sobre o método de Euler para encontrar os números triangulares que são quadrados perfeitos, seguindo as ideias dadas em [1].

Como $x = 2u + 1$ e $y = 2v$, segue que $u = \dfrac{x-1}{2}$, com $x \geq 3$ inteiro ímpar e $v = \dfrac{y}{2}$, com $y \geq 2$ inteiro par. Em 1730, Euler mostrou que existem infinitos pares (u, v) que satisfazem essa equação $P_3(u) = P_4(v)$, ou seja, números triangulares que são quadrados perfeitos.

Para estabelecer a ideia dada em [1], vamos considerar a fração contínua

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}} = [1; (2)],$$

já que $\sqrt{2} - 1 = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$.

A fração contínua que representa $\sqrt{2}$ tem período de comprimento 1 e é expressada pelo limite da sequência $\dfrac{p_n}{h_n}$, onde $p_0 = 1, h_0 = 1, p_1 = 3, h_1 = 2$, $p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2}$ e $h_n = 2h_{n-1} + h_{n-2}$ para $n \geq 2$. Essas recorrências lineares homogêneas degrau 2, têm as seguintes fórmulas gerais:

$$p_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}}{2}$$

$$h_n = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}}{2\sqrt{2}}$$

Agora, vamos mostrar que p_{2n-1} é ímpar, para garantir que $u_n = \dfrac{p_{2n-1}-1}{2}$ é inteiro e que h_{2n-1} é par, para garantir que $v_n = \dfrac{h_{2n-1}}{2}$ é inteiro.

Proposição 5. *Para todo* $n \geq 1$, *temos que* $u_n = \dfrac{p_{2n-1}-1}{2}$ *é inteiro.*

Demonstração. Primeiramente, vamos observar que apesar de p_n e h_n estarem expressos em função de $\sqrt{2}$, ambos são números inteiros. Vamos provar por indução que p_{2n-1} é ímpar.

Para $n = 1$, temos que $p_1 = 3$. Logo, $u_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1$, que é ímpar.

Agora, suponha que para algum $n \geq 1$, p_{2n-1} é ímpar. Observe que:

$$p_{2n+1} = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+2} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+2}}{2} = \frac{(1+\sqrt{2})^2\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} + (1-\sqrt{2})^2\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}}{2} =$$

$$\frac{(3+2\sqrt{2})\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} + (3-2\sqrt{2})\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}}{2} =$$

$$3 \times \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}}{2} + 2\sqrt{2} \times \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}}{2} =$$

$$3p_{2n-1} + 4 \times \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}}{2\sqrt{2}} = 3p_{2n-1} + 4h_{2n-1}.$$

Como p_{2n-1} é ímpar, por hipótese, segue que $3p_{2n-1} + 4h_{2n-1} = p_{2n+1}$ é ímpar.

Portanto, $u_n = \dfrac{p_{2n-1} - 1}{2}$ é inteiro, para todo $n \geq 1$.

□

Proposição 6. *Para todo* $n \geq 1$, *tem-se que* $v_n = \dfrac{h_{2n-1}}{2}$ *é inteiro.*

Demonstração. Vamos provar por indução que h_{2n-1} é par.

Para $n = 1$, temos que $h_1 = 2$, ou seja, é par.

Agora, suponha que para algum $n \geq 1$, h_{2n-1} é par. Como $h_{2n+1} = 2h_{2n} + h_{2n-1}$, com h_{2n-1} par, temos que h_{2n+1} é par.

Portanto, $v_n = \dfrac{h_{2n-1}}{2}$ é inteiro, para todo $n \geq 1$.

□

Por fim, mostramos que existe infinitos números triangulares que são quadrados.

Proposição 7. *Para* $n \geq 1$, $v_n^2 = \dfrac{1}{2}u_n(u_n + 1)$.

Demonstração. De fato, para $n \geq 1$,

$$v_n^2 = \left(\frac{h_{2n-1}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \times \left(\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{32} \times \left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{32} \times \left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{4n} - 2\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{4n}\right)$$

$$\frac{1}{32} \times \left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{4n} - 2\left((1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\right)^{2n} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{4n}\right) =$$

$$\frac{1}{32} \times \left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{4n} - 2(-1)^{2n} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{4n}\right) = \frac{1}{32} \times \left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{4n} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{4n} - 2\right).$$

Por outro lado,

$$\frac{1}{2}u_n(u_n+1) = \frac{1}{2}\left(\frac{p_{2n-1}-1}{2}\right)\left(\frac{p_{2n-1}-1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{p_{2n-1}-1}{2}\right)\left(\frac{p_{2n-1}+1}{2}\right) = \frac{1}{8}\left(p_{2n-1}^2 - 1\right) =$$

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

$$\frac{1}{8}\left\{\left[\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}}{2}\right]^2-1\right\}=\frac{1}{32}\left\{\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}\right]^2-4\right\}=$$

$$\frac{1}{32}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{4n}+2\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{4n}-4\right]=$$

$$\frac{1}{32}\left\{\left(1+\sqrt{2}\right)^{4n}+2\left[(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\right]^{2n}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{4n}-4\right\}=$$

$$\frac{1}{32}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{4n}+2(-1)^{2n}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{4n}-4\right]=\frac{1}{32}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{4n}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{4n}-2\right].$$

Portanto, $v_n^2=\frac{1}{2}u_n(u_n+1), \forall n\geq 1.$ □

Exemplo 5. Na tabela abaixo, segue os valores de (u_n, v_n), para $1\leq n\leq 7$ tal que $P_3(u_n)=P_4(v_n)$.

n	u_n	v_n	$P_3(u_n)=\frac{u_n(u_n+1)}{2})$	$P_4(v_n)=v_n^2$
1	1	1	$\frac{1(1+1)}{2}=1$	$1^2=1$
2	8	6	$\frac{8(8+1)}{2}=36$	$6^2=36$
3	49	35	$\frac{49(49+1)}{2}=49\times 25=(7\times 5)^2=1225$	$35^2=1225$
4	288	204	$\frac{288(288+1)}{2}=(12\times 17)^2=(204)^2=41616$	$(204)^2=41616$
5	1681	1189	$\frac{1681(1681+1)}{2}=(41\times 29)^2=1413721$	$(1189)^2=1413721$
6	9800	6930	$\frac{9800(9800+1)}{2}=(70\times 99)^2=48024900$	$(6930)^2=48024900$
7	57121	40391	$\frac{57121(57121+1)}{2}=(239\times 169)^2$	$(40391)^2=(239\times 169)^2$

Agora, vamos estudar a convergência de razão $\frac{u_n}{v_n}$. Para isso, vamos estabelecer uma relação entre p_n e h_n.

Proposição 8. *Seja* n *um número natural maior ou igual do que 2. Temos que*

$$p_n=3h_{n-1}+h_{n-2}.$$

Demonstração. De fato,

$$3h_{n-1}+h_{n-2}=\frac{3\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{n}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{n}\right]}{2\sqrt{2}}+\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}}{2\sqrt{2}}=$$

$$\frac{3(1+\sqrt{2})\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1}-3(1-\sqrt{2})\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}+\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}}{2\sqrt{2}}=$$

$$\frac{(3+3\sqrt{2}+1)\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1}+(-3+3\sqrt{2}-1)\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}}{2\sqrt{2}}=$$

$$\frac{(4+3\sqrt{2})\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1}+(-4+3\sqrt{2})\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}}{2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=$$

$$\frac{(4\sqrt{2}+6)\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1}+(-4\sqrt{2}+6)\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}}{4}=$$

$$\frac{(2\sqrt{2}+3)\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1}+(-2\sqrt{2}+3)\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}}{2}=$$

$$\frac{(1+\sqrt{2})^2\left(1+\sqrt{2}\right)^{n-1}+(1-\sqrt{2})^2\left(1-\sqrt{2}\right)^{n-1}}{2}=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}}{2}=p_n.$$

□

Segue da Proposição 8 que $p_{2n-1}=3h_{2n-2}+h_{2n-3}$, para $n\geq 2$. Como $\frac{p_{2n-1}}{h_{2n-1}}$ converge para $\sqrt{2}$ quando $n\to\infty$, temos que $\frac{p_{2n-1}}{h_{2n-1}}=\frac{3h_{2n-2}+h_{2n-3}}{h_{2n-1}}=\frac{h_{2n-2}+h_{2n-1}}{h_{2n-1}}=\frac{h_{2n-2}}{h_{2n-1}}+1$ converge para $\sqrt{2}$ quando $n\to\infty$.

Assim, como $u_n=\frac{p_{2n-1}-1}{2}$ e $v_n=\frac{h_{2n-1}}{2}$, temos que $t_n=\frac{u_n}{v_n}=\frac{3h_{2n-2}+h_{2n-3}-1}{h_{2n-1}}=\frac{h_{2n-2}-1}{h_{2n-1}}+1=\frac{h_{2n-2}}{h_{2n-1}}-\frac{1}{h_{2n-1}}+1.$

Desta forma,

$$\lim_{n\to\infty}t_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{h_{2n-2}}{h_{2n-1}}-\frac{1}{h_{2n-1}}+1\right)=\sqrt{2}. \tag{17}$$

A curiosidade, de além da razão $\frac{p_n}{h_n}$ convergir para $\sqrt{2}$, a razão $t_n=\frac{u_n}{v_n}$ também converge para $\sqrt{2}$, ou seja, é exibido uma forma muito simples que obtém as aproximações do número irracional $\sqrt{2}$.

$$t_1 = \frac{u_1}{v_1} = 1$$

$$t_2 = \frac{u_2}{v_2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \simeq 1,3333$$

$$t_3 = \frac{u_3}{v_3} = \frac{49}{35} = \frac{7}{5} = 1,4$$

$$t_4 = \frac{u_4}{v_4} = \frac{288}{204} = \frac{24}{17} \simeq 1,4117647$$

$$t_5 = \frac{u_5}{v_5} = \frac{1681}{1189} = \frac{41}{29} \simeq 1,41379$$

$$t_6 = \frac{u_6}{v_6} = \frac{9800}{6930} = \frac{140}{99} = \simeq 1,414141$$

$$t_7 = \frac{u_7}{v_7} = \frac{57121}{40391} = \simeq 1,414201.$$

No caso do termo t_7, já obtemos a igualdade com 4 casas decimais, considerando $\sqrt{2} \simeq 1,4142135$ com 4 casas decimais.

5. Considerações Finais

A ideia deste trabalho foi apresentar quatro abordagens distintas para compreender e explorar os números poligonais: a abordagem geométrica, a aplicação de fórmulas de recorrência, o desenvolvimento de fórmulas explícitas e função geradora. A abordagem geométrica foi a representação visual de padrões de números poligonais, examinando arranjos de pontos para identificar regularidades e derivar fórmulas de recorrência. As fórmulas explícitas emergiram naturalmente das recorrências observadas nos padrões. Finalmente, a função geradora trata esses números através da expansão em séries de potências de funções racionais associadas aos números poligonais. Além disso, investigamos novas fórmulas e estabelecemos uma aplicação.

O estudo dos números figurados desempenha um papel fundamental na Educação Básica, pois proporciona uma abordagem visual e conceitual ao desenvolvimento de ideias matemáticas essenciais, como as progressões aritméticas e a geometria plana. Esses números, representados geometricamente por pontos dispostos em formatos regulares, como triângulos, quadrados e pentágonos, oferecem uma forma concreta de explorar padrões e relações numéricas. A partir desse estudo, os alunos podem construir um entendimento intuitivo das progressões aritméticas e suas aplicações, além de desenvolver habilidades relacionadas ao reconhecimento e análise de figuras geométricas.

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o estudo dos números figurados pode ser integrado a diversas competências e habilidades, especialmente nos campos de ”Álgebra”e ”Geometria”, que estão presentes em diferentes etapas da Educação Básica. No Ensino Fundamental, por exemplo, a BNCC incentiva o desenvolvimento da habilidade de reconhecer e descrever regularidades em sequências numéricas e geométricas, o que está diretamente relacionado aos números figurados e à exploração de progressões aritméticas. Além disso, o estudo dos números figurados envolve o trabalho com polígonos, contemplando os objetivos de aprendizado que tratam da análise de figuras geométricas e suas propriedades.

Dessa forma, o uso dos números figurados pode ser uma ferramenta pedagógica eficiente para motivar o estudo de dois temas centrais: as progressões aritméticas e os polígonos. Ao associar conceitos algébricos e geométricos, essa abordagem permite aos alunos estabelecer conexões entre diferentes áreas da matemática, proporcionando uma aprendizagem mais rica e integrada, alinhada às diretrizes da BNCC.

Referências

[1] Deza, E; Deza, M. M. *Figurate numbers*. Singapore: World Scientific, 2012

[2] Brasil. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 18 out. 2024.

[3] Hoffmann, L. D.; Bradley, G. L., *Cálculo um curso moderno e suas aplicações*. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

[4] Lima, E. L.; *Curso de Análise*. Volume 1, 12 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[5] Martinez, F.B.; et al., *Teoria dos números: Um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. 2 ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2011.

[6] Morgado, A. C.; et al., *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[7] Morgado, A. C.; Carvalho, P.C.P.; *Matemática Discreta*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[8] Santos, J. P. O. ; Mello, M. P.; Murari, I. T. C.; *Introdução à Análise Combinatória*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

Ana Claudia M. Mendonça
UFGD - Universidade Federal da Grande Dourados
<anamendonca@ufgd.edu.br>

Robledo Maks M. Sette
UFGD - Universidade Federal da Grande Dourados
<robledosette@ufgd.edu.br>

Irene M. Craveiro
UFGD - Universidade Federal da Grande Dourados
<irenecraveiro@ufgd.edu.br>

Recebido: 12/05/2024
Publicado: 15/12/2024