

Curvas de Cassini no plano de Minkowski

Douglas W. S. Monteiro 

Clebes do Nascimento Brandão 

Resumo

Este artigo é baseado na dissertação de mestrado [1], que tem como principal referência [2] e trata das curvas de Cassini no Plano de Minkowski. Inicialmente tratamos da geometria do Plano de Minkowski e, em seguida usamos a definição dada por [2] para curvas de Cassini no referido plano, que serão denominadas \mathcal{M} -curvas de Cassini. Após isso deduzimos suas equações particulares e gerais e também estudamos alguns casos particulares. Incentivados pela definição da Lemniscata de Bernoulli, um caso particular da Curva de Cassini, definimos a " \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli" e fazemos alguns exemplos simples. Por fim, baseados em [2] encontramos as parametrizações via coordenadas hiperbólicas para estas \mathcal{M} -curvas de Cassini. Para obter as representações geométricas dessas curvas utilizamos como suporte o software Geogebra.

Palavras-chave: Plano de Minkowski; curvas de Cassini no Plano de Minkowski; Lemniscata de Bernoulli no Plano de Minkowski; \mathcal{M} -curvas de Cassini; \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli.

Abstract

This article is based on the master's thesis [1], which primarily references [2] and deals with Cassini curves in the Minkowski plane. Initially we deal with the geometry of the Minkowski Plane and then we use the definition given by [2] for Cassini curves in that plane, which will be called \mathcal{M} -Cassini curves. After that we deduced its particular and general equations and also studied some particular cases. Encouraged by the definition of the Bernoulli Lemniscate, a particular case of the Cassini Curve, we define the " \mathcal{M} -Bernoulli Lemniscate" and make some simple examples. Finally, based on [2] we find the parameterizations via hyperbolic coordinates for these \mathcal{M} -Cassini curves. To obtain the geometric representations of these curves, we used Geogebra software as support.

Keywords: Minkowski Plane; Cassini curves in the Minkowski Plane; Bernoulli Lemniscata in the Minkowski Plane; \mathcal{M} -Cassini curves; \mathcal{M} -Lemniscata of Bernoulli.

1. Introdução

Este trabalho trata das curvas de Cassini no Plano de Minkowski. É um trabalho que se vale, direta ou indiretamente, de três assuntos que normalmente não são vistos na Educação Básica, a saber: as curvas de Cassini, as geometrias não Euclidianas e a teoria da relatividade especial. Destacamos que o fato de tais assuntos ainda não serem tão prestigiados não diminui a importância dos mesmos, pelo contrário, são assuntos atuais e bastante relevantes dentro do contexto científico e educacional.

As curvas (ou ovais) de Cassini foram descobertas em 1680 por Giovanni Domenico Cassini (1625-1712), astrônomo muito conceituado em sua época, e por isso levam seu nome. [2] relata o seguinte:

Em 1680, como parte do estudo dos movimentos da Terra e do Sol, ele (Giovanni Cassini) estudou um determinado tipo de curva, hoje denominada curva de Cassini. Cassini acreditava que o movimento dos planetas do sistema solar ocorre em uma dessas curvas. Existem muitas aplicações das curvas de Cassini na BioGeometria, por exemplo, setores de camadas de cebola, colônias bacterianas e formas de células. Além disso, a simulação de dispersão de luz por pequenas partículas côncavas é necessária para encontrar uma descrição matemática adequada da forma da partícula. Isso pode ser feito facilmente usando as curvas de Cassini. Por exemplo, essa abordagem é usada para ajustar a forma dos glóbulos vermelhos do sangue humano. (Shonoda, 2015, p.271)

As curvas de Cassini são definidas de maneira muito similar às elipses. Enquanto estas são o lugar geométrico dos pontos do plano euclidiano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, chamados de focos, é constante, aquelas são o lugar geométrico dos pontos do plano euclidiano cujo produto das distâncias a dois pontos fixos, também chamados de focos, é constante. A equação que descreve uma curva de Cassini no plano euclidiano com centro na origem e focos sobre o eixo OX é dada por $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = b^4 - c^4$. Um caso especial ocorre quando fazemos $b = c$. Neste caso, a equação $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0$ descreve uma curva chamada Lemniscata de Bernoulli. [4] relata o seguinte:

A Lemniscata foi descrita pela primeira vez em 1664, pelo matemático suíço Jacob Bernoulli (1654-1705), que por sua vez não tinha o conhecimento que 14 (quatorze) anos antes esta curva havia sido estudada por Giovanni Cassini, enquanto buscava respostas sobre o curso relativo da terra em torno do sol, sendo então a Lemniscata um caso especial das ovais de Cassini. (Morais e Rodrigues, 2018, p.2)

Segundo [5], as geometrias não Euclidianas surgiram oficialmente a partir do ano de 1829, após quase dois mil anos de muito trabalho por parte dos matemáticos em tentar demonstrar o quinto postulado de Euclides, conhecido como "postulado das paralelas". Os grandes nomes para a descoberta destas novas geometrias são o húngaro János Bolyai (1802-1860), o russo Nicolai Lobachevsky (1793-1856) e os alemães Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Georg Friedrich Riemann (1826-1866).

Durante séculos, a Matemática ficou presa nessa concepção (que ela era uma Ciência da Natureza) fazendo com que a maior parte das suas teorias tivesse como moldura o espaço euclidiano e fosse direcionada para o estudo de um universo euclidiano.

Com os trabalhos de Bolyai e Lobachevsky esse paradigma foi rompido e vieram as indagações naturais. E se o universo não for euclidiano? É hiperbólico? Tudo o que foi feito é válido? Para sair desse dilema, aos poucos, foi se consolidando uma nova concepção da Matemática, não mais como uma Ciência da Natureza, mas como pura criação intelectual, a Matemática pura. (Andrade, 2013, p.10)

Também podemos citar [7], que destaca:

A Geometria Euclidiana, transmitida de geração a geração por mais de dois mil anos, não era a única. As mentes criativas dos matemáticos Bolyai, Lobachevsky, Gauss e Riemann lançaram as bases de outras geometrias tão logicamente aceitas quanto a Euclidiana. (Coutinho, 2018, p.4)

A teoria da relatividade especial de Albert Einstein (1879-1955) é considerada por muitos cientistas uma das mais belas criações humanas. Mas não foi assim em seu nascimento. De fato, [8] relata que o primeiro artigo publicado por Einstein, em 1905, despertou, de início, pouco interesse por parte dos físicos. A Relatividade só começou a ser conhecida num âmbito mais vasto em 1908, quando Hermann Minkowski (1864-1909) proferiu a sua famosa palestra "Espaço e Tempo". [9] escreve:

Vale a pena ressaltar que foi Minkowski quem traduziu a Teoria da Relatividade Especial para a linguagem do espaço-tempo (em 1907), isto é, foi ele quem reconheceu que a consequência principal da teoria foi a unificação do espaço e do tempo em uma só unidade. Em suas palavras: "De agora em diante, espaço por si só e tempo por si estão condenados a desaparecer em meras sombras, e somente uma união dos dois preservaria uma realidade independente". (Biezuner, 2017, p.29)

É bom destacar que, segundo [9], inicialmente Einstein não aceitou bem a ideia de Minkowski. Em sua opinião, estender o espaço para a quarta dimensão mais misticava do que esclarecia a teoria. Pouco tempo depois, no entanto, Einstein mudou radicalmente de opinião e reconheceu a importância do conceito de espaço-tempo, que foi fundamental para a elaboração da Teoria da Relatividade Geral.

O espaço-tempo de Minkowski é uma geometria não euclidiana constituída do seguinte: é o espaço vetorial \mathbb{R}^4 munido de um produto escalar especial, conhecido como métrica de Lorentz.

Neste artigo, nossa "moldura" será o Plano de Minkowski ou, fisicamente falando, o espaço-tempo bidimensional. A importância de se trabalhar neste plano vem do fato de que o mesmo serve como protótipo para dimensões maiores. Ademais, acreditamos que antes de se introduzir os conceitos de relatividade especial no ensino básico, é importante que os alunos já tenham alguma experiência exatamente com o que chamamos de "protótipo" do espaço-tempo, que é o Plano de Minkowski.

2. A Geometria do Plano de Minkowski

Esta seção têm [2] e [3] como principais referências.

Definição 1. O plano espaço-tempo de Lorentz-Minkowski, ou simplesmente Plano de Minkowski, é o par $\mathcal{M}^2 = (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}})$, formado pelo espaço vetorial real \mathbb{R}^2 e pelo seguinte produto escalar: dados $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = x_1 x_2 - y_1 y_2, \quad (1)$$

conhecido na literatura como produto escalar de Lorentz.

O produto escalar de Lorentz $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}}$ nos permite dar a seguinte definição:

Definição 2. Dois vetores u e v em \mathcal{M}^2 são chamados de \mathcal{M} -ortogonais se $\langle u, v \rangle_{\mathcal{M}} = 0$.

Os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$, que formam uma base ortonormal para o espaço \mathbb{R}^2 , são vetores \mathcal{M} -ortogonais. Isto nos permite, assim como no caso euclidiano, estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de \mathcal{M}^2 e os pontos de um plano π munido da escolha de um sistema de eixos ortogonais OXY. Voltando à Definição 1, o produto escalar de Lorentz satisfaz às seguintes propriedades: para todo $k \in \mathbb{R}$ e para todos $u, v, w \in \mathcal{M}^2$, têm-se:

1. Bilinearidade: $\langle ku + v, w \rangle_{\mathcal{M}} = k\langle u, w \rangle_{\mathcal{M}} + \langle v, w \rangle_{\mathcal{M}}$

2. Comutatividade: $\langle u, v \rangle_M = \langle v, u \rangle_M$

3. Não-degenerescência: Para cada vetor não nulo $u \in M^2$ existe $v \in M^2$ tal que $\langle u, v \rangle_M \neq 0$.

Diferentemente da geometria Euclidiana, na geometria de Minkowski o produto escalar não é positivo-definido, e isto nos permite classificar seus vetores em três tipos:

(a) $u \in M^2$ é dito ser *tipo-espaço* quando $\langle u, u \rangle_M > 0$ ou $u = 0$.

(b) $u \in M^2$ é dito ser *tipo-tempo* quando $\langle u, u \rangle_M < 0$.

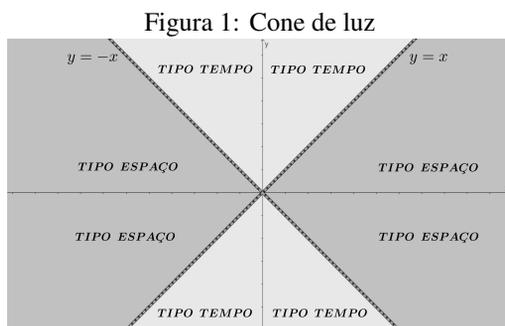
(c) $u \in M^2$ é dito ser *tipo-luz* quando $\langle u, u \rangle_M = 0$, com $u \neq 0$.

Todos os vetores $u = (x, y) \in M^2$ tais que $|x| > |y|$ são tipo-espaço; todos os vetores $u = (x, y) \in M^2$ tais que $|y| > |x|$ são tipo-tempo e todos os vetores não nulos das retas $y = x$ e $y = -x$ são tipo-luz. Mais ainda, a partir da tricotomia da relação de ordem em \mathbb{R} , cada vetor em M^2 possui um e somente um dos três tipos apresentados acima e isto nos permite escrever o Plano de Minkowski como uma determinada união disjunta, à qual veremos na subseção abaixo.

2.1. O cone de luz

Definição 3. O conjunto de todos os vetores tipo-luz do Plano de Minkowski, denotado por C , é chamado *cone de luz* (centrado em $(0,0)$).

Observe que o cone de luz C é exatamente a união das retas $y = x$ e $y = -x$. Ademais, como mostra a Figura 1, C separa o Plano de Minkowski em exatamente duas partes: A parte interna é formada apenas por vetores tipo-tempo e sua parte externa é formada apenas por vetores tipo-espaço.



A Definição 3 sugere a seguinte:

Definição 4. O cone de luz centrado em $P \in M^2$ é o conjunto

$$C_L(P) = \{Q \in M^2; Q - P \text{ é tipo-luz}\}.$$

2.2. A \mathcal{M} -norma, a \mathcal{M} -distância e o \mathcal{M} -círculo

Definição 5. A \mathcal{M} -norma em \mathcal{M}^2 , a qual denotamos por $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, é definida por

$$\|u\|_{\mathcal{M}} = \sqrt{|\langle u, u \rangle_{\mathcal{M}}|}, \quad \forall u \in \mathcal{M}^2. \quad (2)$$

Um vetor $u \in \mathcal{M}^2$ é \mathcal{M} -unitário se $\|u\|_{\mathcal{M}} = 1$.

Os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ são ambos \mathcal{M} -unitários. Um par de vetores \mathcal{M} -unitários que são \mathcal{M} -ortogonais são denominados *vetores \mathcal{M} -ortonormais*.

Observe, a partir da Definição 5, que a \mathcal{M} -norma de um vetor u pode ser igual a zero, mesmo que u não seja o vetor nulo. Além disso, em geral, as desigualdades de Cauchy não são verdadeiras na \mathcal{M} -norma. Por este motivo, a \mathcal{M} -norma não é uma norma no sentido estrito da palavra, mas uma pseudo-norma.

Definição 6. A \mathcal{M} -distância entre dois pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ em \mathcal{M}^2 é denotada e definida por

$$d_{\mathcal{M}}(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|_{\mathcal{M}} \quad (3)$$

em que $\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Veja que, por depender diretamente da \mathcal{M} -norma, a função \mathcal{M} -distância não é uma função distância no contexto de espaços métricos. Por exemplo, a \mathcal{M} -distância de um ponto A para um ponto B em \mathcal{M}^2 pode ser nula sem que tenhamos $A = B$.

Usando a definição de \mathcal{M} -distância podemos revisitar a Definição 4 e redefinir o cone de luz centrado em um ponto $P \in \mathcal{M}^2$ da seguinte maneira:

Definição 7. O *cone de luz centrado em $P \in \mathcal{M}^2$* , denotado por $C_L(P)$, é o conjunto de todos os pontos $Q \in \mathcal{M}^2$, tais que $d_{\mathcal{M}}(P, Q) = 0$.

[2] define o círculo no Plano de Minkowski da seguinte maneira

Definição 8. O círculo no Plano de Minkowski (ou simplesmente \mathcal{M} -círculo) de centro em $P \in \mathcal{M}^2$ e raio $k > 0$, denotado por $S_{\mathcal{M}}(P, k)$, é o subconjunto dos pontos de \mathcal{M}^2 situados à \mathcal{M} -distância k do ponto P . Algebricamente, escrevemos:

$$S_{\mathcal{M}}(P, k) := \{Q \in \mathcal{M}^2; d_{\mathcal{M}}(P, Q) = k\}.$$

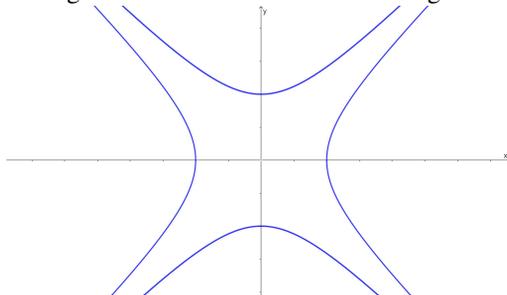
Com o cálculo da \mathcal{M} -distância em coordenadas podemos obter uma caracterização algébrica do \mathcal{M} -círculo: Se (x_0, y_0) são as coordenadas do centro P num sistema de eixos ortogonais OXY de \mathcal{M}^2 , então

$$\begin{aligned} Q = (x, y) \in S_{\mathcal{M}}(P, k) &\iff d_{\mathcal{M}}(P, Q) = k \\ &\iff d_{\mathcal{M}}(P, Q)^2 = k^2 \\ &\iff |(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2| = k^2 \\ &\iff (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = \pm k^2. \end{aligned} \quad (4)$$

A Equação (4) é vista em [2] e é denominada **equação geral do \mathcal{M} -círculo centrado no ponto $P(x_0, y_0)$ de \mathcal{M}^2** . Observe que o \mathcal{M} -círculo $S_{\mathcal{M}}(P, k)$ é precisamente um par de hipérbolas conjugadas com eixos

paralelos aos eixos coordenados no sentido euclidiano. As folhas verticais vêm de $(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2 = -k^2$ e as folhas horizontais vêm de $(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2 = k^2$. A Figura 2 mostra o caso particular do \mathcal{M} -círculo unitário centrado na origem, denotado simplesmente por $S_{\mathcal{M}}(1)$.

Figura 2: \mathcal{M} -círculo centrado na origem



3. Curvas de Cassini no Plano de Minkowski

Esta seção tem como principal referência [2], que define as \mathcal{M} -Curvas de Cassini da seguinte maneira:

Definição 9. Uma \mathcal{M} -Curva de Cassini de focos $F_1 = (z_1, z_2)$ e $F_2 = (w_1, w_2)$, que denotamos por $C_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$, é o lugar geométrico dos pontos P do Plano de Minkowski cujo produto das \mathcal{M} -distâncias a F_1 e a F_2 é uma constante b^2 .

Algebricamente, escrevemos:

$$C_{\mathcal{M}}(F_1, F_2) = \{P \in \mathcal{M}^2; d_{\mathcal{M}}(P, F_1) \cdot d_{\mathcal{M}}(P, F_2) = b^2\}. \quad (5)$$

Em coordenadas, um ponto $P(x, y)$ pertence a $C_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$ se, e somente se,

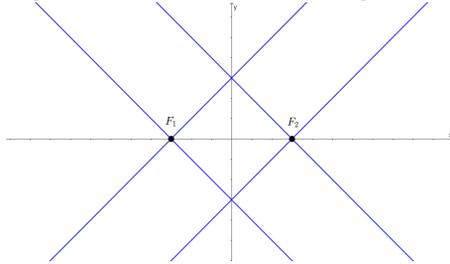
$$|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2| \cdot |(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2| = b^4. \quad (6)$$

A reta que contém os focos de uma \mathcal{M} -curva de Cassini é denominada **reta focal**; os pontos de interseção das \mathcal{M} -curvas de Cassini com a reta focal são denominados **vértices**. Geometricamente, as formas das \mathcal{M} -curvas de Cassini dependem dos focos e da constante b , como veremos adiante.

É oportuno observar que ao considerar a definição das curvas de Cassini no plano euclidiano, é natural exigir que se tenha $b \neq 0$, pois para $b = 0$ essas curvas se degeneram em dois pontos. No Plano de Minkowski, segue de (5) que para $b = 0$ estas curvas se degeneram nos cones de luz centrados nos focos.

A Figura 3 mostra o traço de uma \mathcal{M} -curva de Cassini degenerada, com centro na origem e com os focos sobre o eixo OX .

Figura 3: M -curva de Cassini degenerada



Visto isto, para o que se segue também consideraremos apenas os casos em que $b^2 > 0$.

3.1. Forma canônica das M -curvas de Cassini

A partir da Definição 9 obteremos a equação das M -curvas de Cassini em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY para os casos especiais em que o centro dessas M -curvas é a origem e os focos estão sobre os eixos coordenados. Consideremos inicialmente as M -curvas de Cassini com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX . Então os focos de $C_M(F_1, F_2)$ são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
 P(x, y) \in C_M(F_1, F_2) &\iff d_M(P, F_1) \cdot d_M(P, F_2) = b^2 \\
 &\iff \sqrt{|(x - (-c))^2 - y^2|} \cdot \sqrt{|(x - c)^2 - y^2|} = b^2 \\
 &\iff |(x + c)^2 - y^2| \cdot |(x - c)^2 - y^2| = b^4 \\
 &\iff (x^2 + 2xc + c^2 - y^2) \cdot (x^2 - 2xc + c^2 - y^2) = \pm b^4 \\
 &\iff x^4 - 2x^3c + x^2c^2 - x^2y^2 + 2x^3c - 4x^2c^2 + 2xc^3 - 2xcy^2 + \\
 &\quad x^2c^2 - 2xc^3 + c^4 - c^2y^2 - y^2x^2 + 2xcy^2 - y^2c^2 + y^4 = \pm b^4 \\
 &\iff x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 2c^2x^2 - 2c^2y^2 + c^4 = \pm b^4 \\
 &\iff (x^2 - y^2)^2 - 2c^2(x^2 + y^2) = \pm b^4 - c^4, \tag{7}
 \end{aligned}$$

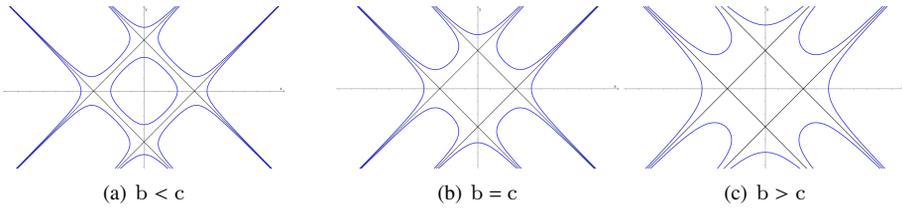
que é a **forma canônica das M -curvas de Cassini com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX** . De maneira análoga encontramos a **forma canônica das M -curvas de Cassini com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY** , que é dada por

$$(y^2 - x^2)^2 - 2c^2(x^2 + y^2) = \pm b^4 - c^4. \tag{8}$$

Como as Equações (7) e (8) são iguais, uma vez que os termos $(x^2 - y^2)$ e $(y^2 - x^2)$ estão ambos elevados ao quadrado nas respectivas equações, aqui estudaremos apenas a Equação (7), já que os resultados para a Equação (8) serão análogos. Usando o software Geogebra é possível esboçar o traço das curvas descritas pela Equação (7). Na Figura 4, por exemplo, construímos os traços de três M -curvas de Cassini colocando valores $b < c$, $b = c$ e $b > c$, respectivamente.

Observe na Figura 4 que em todos os casos as M -curvas de Cassini interseam os eixos coordenados. Ademais, como se vê, todas elas têm como assíntotas exatamente os cones de luz centrados em seus respectivos focos.

Figura 4: \mathcal{M} -curvas de Cassini



3.2. Interseção com os eixos coordenados

No estudo das \mathcal{M} -curvas de Cassini, usando a Equação (7), encontraremos as expressões das coordenadas de seus pontos de interseção com os eixos coordenados. Para tanto, se $P(x, y)$ é um ponto que pertence à \mathcal{M} -curva de Cassini com centro na origem e de focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ e também pertence ao eixo OX , então P tem segunda coordenada nula $y = 0$, e a Equação (7) se reduz a:

$$x^4 - 2c^2x^2 = \pm b^4 - c^4.$$

Isto é, $P(x, 0)$ satisfaz

$$(i) \quad x^4 - 2c^2x^2 = b^4 - c^4 \quad \text{ou} \quad (ii) \quad x^4 - 2c^2x^2 = -b^4 - c^4.$$

Fazendo $m = x^2$ em ambos os casos (i) e (ii), encontramos que $P(x, 0)$ satisfaz

$$(i) \quad m^2 - 2c^2m - b^4 + c^4 = 0 \quad \text{ou} \quad (ii) \quad m^2 - 2c^2m + b^4 - c^4 = 0$$

Para encontrar a coordenada x do ponto P , se existir, devemos encontrar primeiramente as raízes m_1 e m_2 das equações acima e depois substituir na expressão $m = x^2$, como segue:

(i) De $m^2 - 2c^2m - b^4 + c^4 = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{2c^2 + \sqrt{4c^4 - 4(-b^4 + c^4)}}{2} & m_2 &= \frac{2c^2 - \sqrt{4c^4 - 4(-b^4 + c^4)}}{2} \\ &= \frac{2c^2 + \sqrt{4b^4}}{2} & & e & &= \frac{2c^2 - \sqrt{4b^4}}{2} \\ &= c^2 + b^2 & & & &= c^2 - b^2. \end{aligned}$$

Substituindo na expressão $m = x^2$, obtemos $x_1 = \pm\sqrt{m_1} = \pm\sqrt{c^2 + b^2}$ e $x_2 = \pm\sqrt{m_2} = \pm\sqrt{c^2 - b^2}$. Perceba que x_2 só terá solução se $c^2 \geq b^2$.

(ii) De $m^2 - 2c^2m + b^4 - c^4 = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{2c^2 + \sqrt{4c^4 - 4(b^4 - c^4)}}{2} & m_2 &= \frac{2c^2 - \sqrt{4c^4 - 4(b^4 - c^4)}}{2} \\ &= \frac{2c^2 + \sqrt{-4b^4}}{2} & & e & &= \frac{2c^2 - \sqrt{-4b^4}}{2} \\ &= c^2 + \sqrt{-b^4} & & & &= c^2 - \sqrt{-b^4}. \end{aligned}$$

Portanto, para o caso (ii) não há interseção da curva com os eixos coordenados. Analogamente, se $P(x, y)$ é um ponto que pertence à \mathcal{M} -curva de Cassini com centro na origem e focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ e também ao eixo OY , então P tem primeira coordenada $x = 0$, e a Equação (7) se reduz a:

$$y^4 - 2c^2y^2 = \pm b^4 - c^4.$$

Procedendo como no caso anterior, encontramos as raízes reais $y = \pm\sqrt{c^2 \pm b^2}$.

Portanto, os pontos de interseção das \mathcal{M} -curvas de Cassini de focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ com os eixos coordenados são os seguintes:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= (\sqrt{c^2 + b^2}, 0), & P_2 &= (-\sqrt{c^2 + b^2}, 0), \\
 P_3 &= (0, \sqrt{c^2 + b^2}), & P_4 &= (0, -\sqrt{c^2 + b^2}),
 \end{aligned}$$

E, estritamente para os casos $c^2 > b^2$, encontramos, além dos anteriores, os seguintes pontos:

$$\begin{aligned}
 P_5 &= (\sqrt{c^2 - b^2}, 0), & P_6 &= (-\sqrt{c^2 - b^2}, 0), \\
 P_7 &= (0, \sqrt{c^2 - b^2}), & P_8 &= (0, -\sqrt{c^2 - b^2}).
 \end{aligned}$$

O exemplo abaixo trata da Equação (7) para o caso em que $b \neq c$. O caso $b = c$ será feito na próxima subseção.

Exemplo 1. Determine as equações e os pontos de interseção com os eixos coordenados, da \mathcal{M} -curva de Cassini de focos $F_1 = (-\sqrt{2}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{2}, 0)$ e parâmetros (a) $b=1$ e (b) $b=2$. Em seguida, fazer um esboço utilizando o software Geogebra.

Solução (a): Observemos inicialmente que a \mathcal{M} -distância dos focos F_1 e F_2 ao centro da \mathcal{M} -curva de Cassini é $c = \sqrt{2} > 1$. Obtemos então:

$$(x^2 - y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) = -3$$

e

$$(x^2 - y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) = -5$$

Como para este caso $c^2 > b^2$, esta \mathcal{M} -curva de Cassini possui 8 pontos de interseção com os eixos coordenados, que são:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= (\sqrt{3}, 0), & P_2 &= (-\sqrt{3}, 0), \\
 P_3 &= (0, \sqrt{3}), & P_4 &= (0, -\sqrt{3}), \\
 P_5 &= (1, 0), & P_6 &= (-1, 0), \\
 P_7 &= (0, 1), & P_8 &= (0, -1).
 \end{aligned}$$

Seu traço pode ser visto na Figura 5(a).

Solução (b): A \mathcal{M} -distância dos focos F_1 e F_2 ao centro da \mathcal{M} -curva de Cassini é $c = \sqrt{2}$. Obtemos então:

$$(x^2 - y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) = 12$$

e

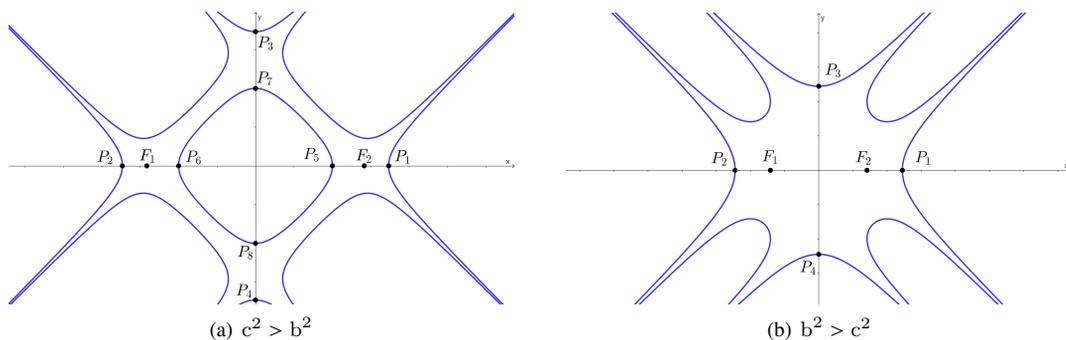
$$(x^2 - y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) = -20$$

Como para este caso $b^2 > c^2$, esta \mathcal{M} -curva de Cassini possui 4 pontos de interseção com os eixos coordenados, que são:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= (\sqrt{6}, 0), & P_2 &= (-\sqrt{6}, 0), \\
 P_3 &= (0, \sqrt{6}), & P_4 &= (0, -\sqrt{6}).
 \end{aligned}$$

Seu traço pode ser visto na Figura 5(b).

Figura 5: \mathcal{M} -curva de Cassini centradas na origem

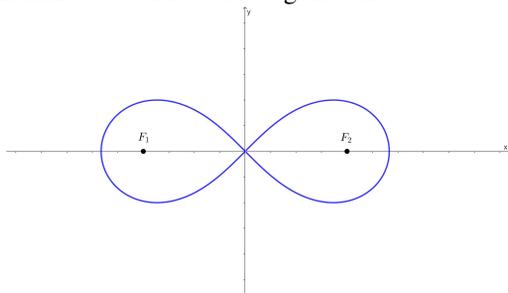


Para efeito de comparação, o link <https://www.geogebra.org/m/k7a6cwwk> mostrará as diferenças entre as curvas de Cassini na sua forma canônica no plano euclidiano e no Plano de Minkowski, de acordo com a variação dos parâmetros b e c .

3.3. A \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli

De acordo com [4], a Lemniscata foi descrita pela primeira vez em 1964, pelo matemático suíço Jacob Bernoulli, que por sua vez não tinha o conhecimento que quatorze anos antes esta curva havia sido estudada por Giovanni Cassini. A Figura 6 mostra o traço de uma Lemniscata de Bernoulli centrada na origem do plano euclidiano com os focos sobre o eixo OX , cuja equação é dada por $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0$.

Figura 6: Lemniscata centrada na origem com focos sobre o eixo OX



Inspirados pela definição de Lemniscata de Bernoulli, nós definimos a \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli como sendo o conjunto dos pontos $P(x, y)$ que satisfazem a Equação (7) para o caso especial $b = c$. Portanto, um ponto $P(x, y)$ pertence à \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli se, e somente se, satisfaz à equação

$$(x^2 - y^2)^2 - 2c^2(x^2 + y^2) = 0 \tag{9}$$

ou à equação

$$(x^2 - y^2)^2 - 2c^2(x^2 + y^2) = -2c^4. \quad (10)$$

Exemplo 2. A \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli de focos $F_1 = (-\sqrt{2}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{2}, 0)$ tem equações

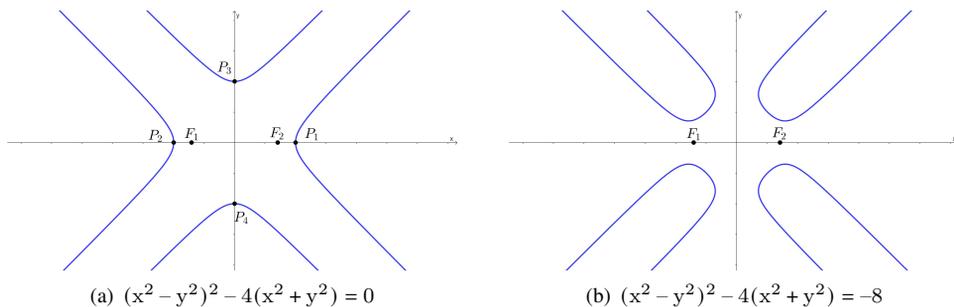
$$(x^2 - y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) = 0$$

e

$$(x^2 - y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) = -8.$$

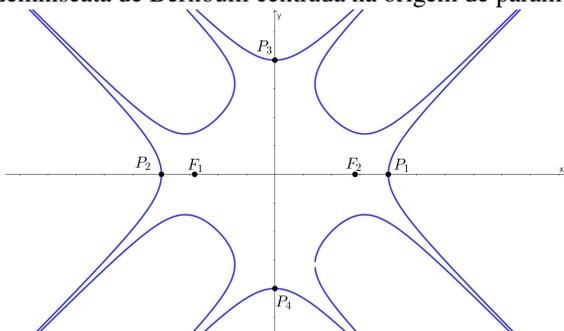
Ademais, como a \mathcal{M} -Lemniscata pertence ao caso em que $b^2 \geq c^2$, ela tem quatro pontos de interseção com os eixos coordenados, cujas coordenadas não nulas são as soluções de $\pm\sqrt{b^2 + c^2}$. Fazendo $b = c = \sqrt{2}$, obtemos $P_1 = (2, 0)$, $P_2 = (-2, 0)$, $P_3 = (0, 2)$ e $P_4 = (0, -2)$. Usando o software Geogebra, obtemos na Figura 7 os traços das curvas das duas equações dadas acima.

Figura 7: Ramos da \mathcal{M} -Lemniscata centrada na origem de focos $F_1 = (-\sqrt{2}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{2}, 0)$



Por fim, unindo os traços obtemos na Figura 8 o esboço da \mathcal{M} -Lemniscata. Em adição, destacamos seus pontos de interseção com os eixos coordenados.

Figura 8: \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli centrada na origem de parâmetro $b = c = \sqrt{2}$

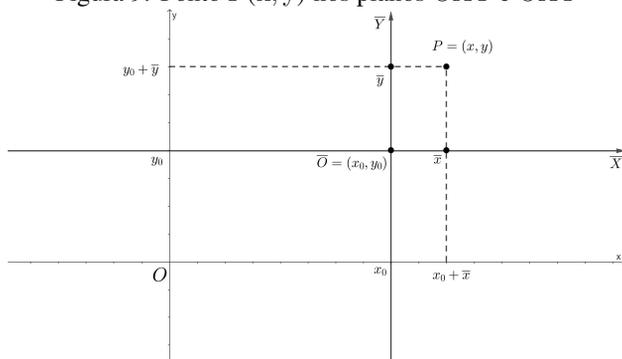


4. Translação dos eixos coordenados

O estudo da translação no plano é fundamental, pois busca compreender comportamentos não triviais dos entes geométricos. Tomando como referência [3], faremos um breve estudo da translação das \mathcal{M} -curvas de Cassini no Plano de Minkowski.

Sejam OXY um sistema de eixos ortogonais, $\bar{O} = (x_0, y_0)$ um ponto do plano e $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ o sistema cujos eixos $\bar{O}\bar{X}$ e $\bar{O}\bar{Y}$ são paralelos aos eixos OX e OY e têm o mesmo sentido desses eixos, respectivamente. Designamos por (\bar{x}, \bar{y}) as coordenadas do ponto P no sistema de eixos $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ e por (x, y) as coordenadas de P no sistema de eixos OXY .

Figura 9: Ponto $P(x, y)$ nos planos OXY e $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$



Se $\vec{e}_1 = (1, 0)$ e $\vec{e}_2 = (0, 1)$ são os vetores \mathcal{M} -unitários na mesma direção e no mesmo sentido, respectivamente, dos eixos OX e OY (portanto dos eixos $\bar{O}\bar{X}$ e $\bar{O}\bar{Y}$), então:

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \\ \vec{O}\bar{P} &= \bar{x}\vec{e}_1 + \bar{y}\vec{e}_2, \\ \vec{O}\bar{O} &= x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2.\end{aligned}$$

Como

$$\vec{O}\bar{P} = \vec{O}\bar{O} + \vec{OP},$$

obtemos que:

$$\begin{aligned}x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 &= (x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2) + (\bar{x}\vec{e}_1 + \bar{y}\vec{e}_2) \\ &= (x_0 + \bar{x})\vec{e}_1 + (y_0 + \bar{y})\vec{e}_2.\end{aligned}$$

Portanto, as coordenadas do ponto P nos sistemas OXY e $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ são relacionadas pelas fórmulas (veja a Figura 9):

$$\begin{cases} x = \bar{x} + x_0 \\ y = \bar{y} + y_0. \end{cases}$$

4.1. Forma canônica da \mathcal{M} -curva de Cassini transladada

Por uma translação dos eixos coordenados, vamos obter a equação das \mathcal{M} -curvas de Cassini $C_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$ cuja reta focal é paralela aos eixos coordenados. Seja $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ o sistema de eixos ortogonais obtido transladando

o sistema OXY para a nova origem $\bar{O} = (x_0, y_0)$. Como \bar{O} é o centro, $\uparrow : y = y_0$ é a reta focal e $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$ são os focos da \mathcal{M} -curva, um ponto $P(x, y) = (\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0)$ pertence à \mathcal{M} -curva de Cassini se, e somente se,

$$d_{\mathcal{M}}(P, F_1) \cdot d_{\mathcal{M}}(P, F_2) = b^2$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &\iff \left| (\bar{x} + c)^2 - \bar{y}^2 \right| \cdot \left| (\bar{x} - c)^2 - \bar{y}^2 \right| = b^4 \\ &\iff (\bar{x}^2 + 2c\bar{x} + c^2 - \bar{y}^2) \cdot (\bar{x}^2 - 2c\bar{x} + c^2 - \bar{y}^2) = \pm b^4 \\ &\iff (\bar{x}^2 - \bar{y}^2) \cdot (\bar{x}^2 - 2c\bar{x} + c^2 - \bar{y}^2) + (2c\bar{x} + c^2) \cdot (\bar{x}^2 - 2c\bar{x} + c^2 - \bar{y}^2) = \pm b^4 \\ &\iff (\bar{x}^2 - \bar{y}^2)^2 + (\bar{x}^2 - \bar{y}^2) \cdot (-2c\bar{x} + c^2) + (2c\bar{x} + c^2) \cdot (\bar{x}^2 - \bar{y}^2) + (c^4 - 4c^2\bar{x}^2) = \pm b^4 \\ &\iff (\bar{x}^2 - \bar{y}^2)^2 + 2c^2(\bar{x}^2 - \bar{y}^2) - 4c^2\bar{x}^2 = \pm b^4 - c^4 \\ &\iff (\bar{x}^2 - \bar{y}^2)^2 - 2c^2(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) = \pm b^4 - c^4 \\ &\iff ((x - x_0)^2 - (y - y_0)^2)^2 - 2c^2((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) = \pm b^4 - c^4. \end{aligned}$$

Portanto, a forma canônica da \mathcal{M} -curva de Cassini $C_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$ com centro no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OX é:

$$((x - x_0)^2 - (y - y_0)^2)^2 - 2c^2((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) = \pm b^4 - c^4. \quad (11)$$

Analogamente, encontramos a equação da \mathcal{M} -curva de Cassini transladada com reta focal paralela ao eixo OY,

$$((y - y_0)^2 - (x - x_0)^2)^2 - 2c^2((y - y_0)^2 + (x - x_0)^2) = \pm b^4 - c^4. \quad (12)$$

Veja que, assim como as equações das \mathcal{M} -curvas de Cassini centradas na origem e com retas focais sobre os eixos coordenados, as equações (11) e (12) das \mathcal{M} -curvas de Cassini transladadas e retas focais paralelas aos eixos coordenados também são iguais e, conseqüentemente, seus traços também coincidem.

Exemplo 3. Determinar os focos, as equações e, utilizando o software Geogebra, esboçar o traço das \mathcal{M} -curvas de Cassini:

- (a) \mathcal{M} -curva de Cassini com parâmetros $b = 4$ e $c = 5$ e com reta focal paralela a OX, com centro $\bar{O} = (-1, 1)$.
- (b) \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli com parâmetros $b = c = 4$, reta focal paralela a OX e com centro $\bar{O} = (0, -2)$.
- (c) \mathcal{M} -curva de Cassini com parâmetros $b = 3$ e $c = 2$, reta focal paralela a OX e com centro $\bar{O} = (3, -5)$.

Solução.

- (a) A \mathcal{M} -curva de Cassini com parâmetros $b = 3$ e $c = 2$ tem como focos os pontos $F_1 = (-6, 1)$, $F_2 = (4, 1)$ e equação:

$$\left((x + 1)^2 - (y - 1)^2 \right)^2 - 50 \left((x + 1)^2 + (y - 1)^2 \right) = \pm 256 - 625.$$

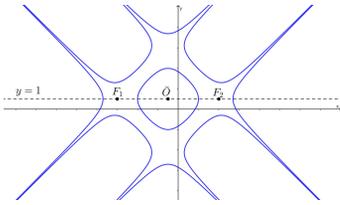
- (b) A \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli com parâmetros $b = c = 4$ tem como focos os pontos $F_1 = (-4, -2)$, $F_2 = (4, -2)$ e equação:

$$(x^2 - (y + 2)^2)^2 - 32(x^2 + (y + 2)^2) = \pm 256 - 256.$$

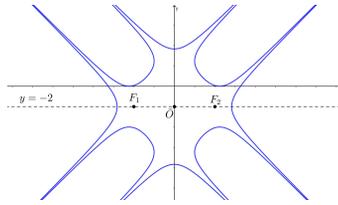
- (c) A \mathcal{M} -curva de Cassini com parâmetros $b = 3$ e $c = 2$ como focos os pontos $F_1 = (1, -5)$ e $F_2 = (5, -5)$ e equação:

$$((x - 3)^2 - (y + 5)^2)^2 - 8((x - 3)^2 + (y + 5)^2) = \pm 81 - 16.$$

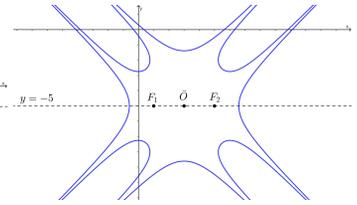
Figura 10: \mathcal{M} -curvas de Cassini transladadas



(a) \mathcal{M} -curva de Cassini transladada com parâmetro $b = 4, c = 5$.



(b) \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli com parâmetros $b = c = 4$.



(c) \mathcal{M} -curva de Cassini transladada com parâmetro $b = 3, c = 2$.

5. Equação geral das \mathcal{M} -curvas de Cassini

Nesta seção, utilizando [2] como principal referência, determinaremos a equação geral das \mathcal{M} -curvas de Cassini onde os focos $F_1 = (z_1, z_2)$ e $F_2 = (w_1, w_2)$ serão pontos arbitrários do Plano de Minkowski. Isto é, as retas focais não serão necessariamente paralelas aos eixos coordenados. Se $P = (x, y)$, então $P \in C_{\mathcal{M}}(F_1, F_2)$ se, e somente se:

$$\begin{aligned}
 d_M(P, F_1) \cdot d_M(P, F_2) = b^2 &\iff \sqrt{|(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2|} \sqrt{|(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2|} = b^2 \\
 &\iff |(x - z_1)^2 - (y - z_2)^2| |(x - w_1)^2 - (y - w_2)^2| = b^4 \\
 &\iff (x^2 - 2xz_1 + z_1^2 - y^2 + 2yz_2 - z_2^2) \\
 &\quad (x^2 - 2xw_1 + w_1^2 - y^2 + 2yw_2 - w_2^2) = \pm b^4 \\
 &\iff x^4 - 2x^3w_1 + x^2w_1^2 - x^2y^2 + 2x^2yw_2 - x^2w_2^2 \\
 &\quad - 2x^3z_1 + 4x^2z_1w_1 - 2xz_1w_1^2 + 2xy^2z_1 - 4xyz_1w_2 \\
 &\quad + 2xz_1w_2^2 + x^2z_1^2 - 2xz_1^2w_1 + z_1^2w_1^2 - z_1^2y^2 + 2yz_1^2w_2 \\
 &\quad - z_1^2w_2^2 - x^2y^2 + 2xy^2w_1 - y^2w_1^2 + y^4 - 2y^3w_2 \\
 &\quad + y^2w_2^2 + 2x^2yz_2 - 4xyz_2w_1 + 2yz_2w_1^2 - 2y^3z_2 \\
 &\quad + 4y^2z_2w_2 - 2yz_2w_2^2 - x^2z_2^2 + 2xz_2^2w_1 - z^2w_1^2 \\
 &\quad + y^2z_2^2 - 2yz_2^2w_2 + z^2w_2^2 = \pm b^4 \\
 &\iff (x^2 - y^2)^2 - 2x^3(z_1 + w_1) - 2y^3(z_2 + w_2) \\
 &\quad + x^2(z_1^2 - z_2^2 + w_1^2 - w_2^2 + 4z_1w_1) \\
 &\quad - y^2(z_1^2 - z_2^2 + w_1^2 - w_2^2 - 4z_2w_2) \\
 &\quad - 2x(z_1(w_1^2 - w_2^2) + w_1(z_1^2 - z_2^2)) \\
 &\quad + 2y(z_2(w_1^2 - w_2^2) + w_2(z_1^2 - z_2^2)) \\
 &\quad + 2x^2y(z_2 + w_2) + 2xy^2(z_1 + w_1) \\
 &\quad - 4xy(z_1w_2 + z_2w_1) + (z_1^2 - z_2^2)(w_1^2 - w_2^2) = \pm b^4 \quad (13)
 \end{aligned}$$

Para as \mathcal{M} -curvas de Cassini com focos arbitrários no Plano de Minkowski, o centro pode ser determinado pelo ponto médio do segmento de reta com extremidade nos focos. Tomando o ponto $C = (x_c, y_c)$ centro da \mathcal{M} -curva e $F_1 = (z_1, z_2)$ e $F_2 = (w_1, w_2)$ seus focos, temos:

$$C = \left(\frac{z_1 + w_1}{2}, \frac{z_2 + w_2}{2} \right).$$

Exemplo 4. Determinar o centro, a equação geral e esboçar o traço das \mathcal{M} -curvas de Cassini:

- (a) Com focos $F_1 = (2, 3)$ e $F_2 = (3, 2)$ e parâmetro $b = 2$.
- (b) Com focos $F_1 = (-1, -4)$ e $F_2 = (1, 4)$ e parâmetro $b = 3$.
- (c) Com focos $F_1 = (1, 1)$ e $F_2 = (3, 3)$ e parâmetro $b = 1$.

Solução.

- (a) Se os focos são $F_1 = (2, 3)$ e $F_2 = (3, 2)$, temos como centro da \mathcal{M} -curva de Cassini o ponto $C = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$, e equação geral:

$$(x^2 - y^2)^2 - 10x^3 - 10y^3 + 24x^2 + 24y^2 + 10x + 10y + 10x^2y + 10xy^2 - 52xy - 25 = \pm 16.$$

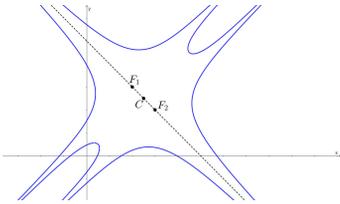
(b) Se os focos são $F_1 = (-1, -4)$ e $F_2 = (1, 4)$, temos a origem como centro da \mathcal{M} -curva de Cassini e equação geral:

$$(x^2 - y^2)^2 - 34x^2 - 34y^2 + 32xy + 225 = \pm 81.$$

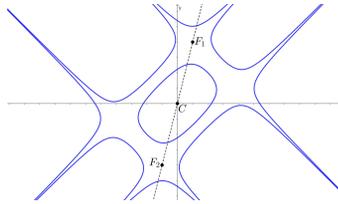
(c) Se os focos são $F_1 = (1, 1)$ e $F_2 = (3, 3)$, temos como centro da \mathcal{M} -curva de Cassini o ponto $C = (2, 2)$ e equação geral:

$$(x^2 - y^2)^2 - 8x^3 - 8y^3 + 12x^2 + 12y^2 + 8x^2y + 8xy^2 - 24xy = \pm 1.$$

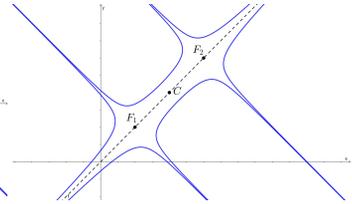
Figura 11: \mathcal{M} -curvas de Cassini via equações gerais



(a) \mathcal{M} -curva de Cassini de parâmetro $b = 2$ e $F_1 = (2, 3)$ e $F_2 = (3, 2)$



(b) \mathcal{M} -curva de Cassini de parâmetro $b = 3$ e $F_1 = (1, 4)$ e $F_2 = (-1, -4)$



(c) \mathcal{M} -curva de Cassini de parâmetro $b = 1$ e $F_1 = (1, 1)$ e $F_2 = (3, 3)$

Se houver interesse, o link: <https://www.geogebra.org/m/btparsj4> pode ser acessado para que se visualize o comportamento das \mathcal{M} -curvas de Cassini na medida em que seus focos são mudados de maneira arbitrária.

6. Parametrização das \mathcal{M} -curvas de Cassini via Coordenadas Hiperbólicas

Dedicamos esta última seção para fazer uma breve abordagem das \mathcal{M} -curvas de Cassini usando funções hiperbólicas. Mais precisamente, gostaríamos de deduzir suas parametrizações usando coordenadas hiperbólicas. A motivação para isto vem do fato de que, como observado anteriormente, o \mathcal{M} -Círculo é precisamente um par de hipérbolas conjugadas. Para tanto, lembremo-nos das expressões que definem as funções \sinh e \cosh . Tomando como referência [11], temos, para $\alpha \in \mathbb{R}$, que:

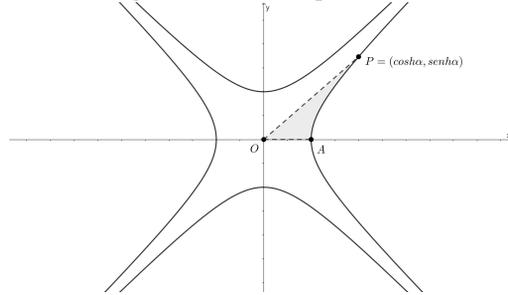
$$\sinh \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} \quad \cosh \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}$$

A partir das definições de $\sinh \alpha$ e $\cosh \alpha$, obtemos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} \cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha &= 1 \\ \sinh(\alpha + \beta) &= \sinh \alpha \cosh \beta + \cosh \alpha \sinh \beta \\ \cosh(\alpha + \beta) &= \cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta \end{aligned}$$

Note que, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, o ponto $P = (\cosh \alpha, \sinh \alpha)$ está sobre a hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 1$. E de acordo com [11], de maneira análoga ao que ocorre com um setor circular na geometria Euclidiana, onde o ângulo θ é o dobro da área do setor circular, α é o dobro da área do que é denominado setor hiperbólico (ver Figura 12).

Figura 12: Setor Hiperbólico



Revisitando a Equação (13), e procedendo de maneira análoga a [2] temos o seguinte: alterando os parâmetros da Equação (13), usando as funções hiperbólicas $(x, y) \rightarrow (r, \alpha)$, onde $x = \pm r \cosh \alpha$, $y = \pm r \sinh \alpha$ e $r^2 = x^2 - y^2$, temos que (13) se torna:

$$\begin{aligned}
 \iff & r^4 - 2r^3 \cosh^3 \alpha (z_1 + w_1) - 2r^3 \sinh^3 \alpha (z_2 + w_2) \\
 & + r^2 \cosh^2 \alpha (z_1^2 - z_2^2 + w_1^2 - w_2^2 + 4z_1 w_1) \\
 & - r^2 \sinh^2 \alpha (z_1^2 - z_2^2 + w_1^2 - w_2^2 - 4z_2 w_2) \\
 & - 2r \cosh \alpha (z_1 (w_1^2 - w_2^2) + w_1 (z_1^2 - z_2^2)) \\
 & + 2r \sinh \alpha (z_2 (w_1^2 - w_2^2) + w_2 (z_1^2 - z_2^2)) \\
 & + 2r^3 \cosh^2 \alpha \sinh^2 \alpha (z_2 + w_2) + 2r^3 \cosh \alpha \sinh^2 \alpha (z_1 + w_1) \\
 & - 4r^2 \cosh \alpha \sinh \alpha (z_1 w_2 + z_2 w_1) + (z_1^2 - z_2^2)(w_1^2 - w_2^2) = \pm b^4.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Para o caso particular em que a \mathcal{M} -curva de Cassini está centrada na origem do sistema de eixos ortogonais OXY , com reta focal coincidindo com o eixo OX e focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, a Equação (14) se transforma em:

$$r^4 - 2c^2 r^2 \cosh^2 \alpha - 2c^2 r^2 \sinh^2 \alpha + c^4 = \pm b^4.$$

Simplificando essa expressão, obtemos:

$$r^4 - 2c^2 r^2 \cosh 2\alpha = \pm b^4 - c^4. \tag{15}$$

Para encontrarmos o valor de r em função de α , precisamos resolver a Equação biquadrada (15).

Tomando $r^2 = m$, temos:

$$m^2 - 2c^2 m \cosh 2\alpha \pm b^4 - c^4 = 0,$$

que têm como soluções:

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{2c^2 \cosh 2\alpha \pm \sqrt{4c^4 \cosh^2 2\alpha - 4(\pm b^4 + c^4)}}{2} \\
 &= c^2 \left(\cosh 2\alpha \pm \sqrt{\sinh^2 2\alpha \pm \left(\frac{b}{c}\right)^4} \right).
 \end{aligned}$$

Dáí, temos que:

$$r = \pm c \sqrt{\cosh 2\alpha \pm \sqrt{\sinh^2 2\alpha \pm \left(\frac{b}{c}\right)^4}}. \quad (16)$$

Consequentemente,

$$x = \pm c \sqrt{\cosh 2\alpha \pm \sqrt{\sinh^2 2\alpha \pm \left(\frac{b}{c}\right)^4}} \cosh \alpha \quad (17)$$

e

$$y = \pm c \sqrt{\cosh 2\alpha \pm \sqrt{\sinh^2 2\alpha \pm \left(\frac{b}{c}\right)^4}} \sinh \alpha, \quad (18)$$

que são as parametrizações das \mathcal{M} -curvas de Cassini centradas na origem via coordenadas hiperbólicas.

Para o caso em que $b = c$, onde temos uma \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli, vale as seguintes parametrizações:

$$x = \pm c \sqrt{\cosh 2\alpha \pm \sqrt{\sinh^2 2\alpha \pm 1}} \cosh \alpha \quad (19)$$

e

$$y = \pm c \sqrt{\cosh 2\alpha \pm \sqrt{\sinh^2 2\alpha \pm 1}} \sinh \alpha. \quad (20)$$

7. Considerações Finais

No decorrer deste trabalho, buscamos uma compreensão do comportamento das curvas de Cassini no Plano de Minkowski, denominadas \mathcal{M} -curvas de Cassini. Com base na geometria do Plano de Minkowski, apresentamos definições essenciais que permitiram encontrar suas equações e visualizá-las por meio do software Geogebra. Além de deduzirmos as equações algébricas destas \mathcal{M} -curvas, também deixamos uma singela contribuição definindo a \mathcal{M} -Lemniscata de Bernoulli.

Para concluir, usando a trigonometria hiperbólica deduzimos a parametrização da \mathcal{M} -curva de Cassini em relação ao ângulo hiperbólico. Esta foi precisamente a forma como [2] utilizou em seu trabalho para abordar este assunto.

Deixamos a sugestão para estudos futuros envolvendo outras \mathcal{M} -curvas, na esperança de que este trabalho contribua de alguma maneira. Também incentivamos àqueles que se interessarem, que façam trabalhos que contribuam no sentido de procurar estratégias de inserção no ensino básico dos assuntos aqui abordados.

Referências

- [1] Monteiro, D. W. S. *Curvas de Cassini no Plano de Minkowski*. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), 2023. Disponível em: <https://sca.profmatt-sbm.org.br/profmatt_tcc.php?id1=7150&id2=171056331>. Acesso em: 02 de maio de 2024.
- [2] Shonoda, E. N. *Classification of conics and Cassini curves in Minkowski space-time plane*. Egyptian Mathematical Society, v. 24, n. 2, p. 270-278, 2015.
- [3] Couto, I. T., Lymberopoulos, A. *Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e Superfícies*. SBM. (2018), 546p.

- [4] Morais, T. S. F., Rodrigues, D. S. *A Lemniscata de Bernoulli uma curva plana diferenciável e a dedução da fórmula para o cálculo de sua área*. XII Fórum de Ensino, Pesquisa, Extensão e Gestão, 2018. Disponível em: <<http://www.fepeg2018.unimontes.br/anais/download/09063d0b-91e7-4e49-8b1e-f9983c35e3ff>>. Acesso em: 1 de maio de 2023.
- [5] Greenberg, M. J. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History 4th edition*. W. H. Freeman (2007), 637p.
- [6] Andrade, P. *Introdução à Geometria Hiperbólica - o modelo de Poincaré*. SBM (2013), 267p.
- [7] Coutinho, L. *Introdução às geometrias não euclidianas - 3ª edição*. Editora Interciência (2018), 118p.
- [8] Santos, J. C. *Minkowski, Geometria e Relatividade*. Universidade do Porto (2009).
- [9] Biezuner, R. J. *Relatividade Especial, Geral e Geometria Lorentziana*. Universidade Federal de Minas Gerais (2017).
- [10] O'Connor, J. J., Robertson, E. F. *Hermann Minkowski*. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Minkowski/>>. Acesso em: 8 de maio de 2023.
- [11] Santana, J. I. M., Arias, C. J. L. *La Geometría de Minkowski a partir del grupo de Lorentz*. Universidad Pedagógica Nacional Bogotá (2008).

Douglas W. S. Monteiro
Instituto Federal do Amazonas
<douglas.monteiro@ifam.edu.br>

Clebes do Nascimento Brandão
Universidade Federal do Acre
<clebes.brandao@ufac.br>

Recebido: 20/08/2024
Publicado: 13/12/2024