PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.12, n.4, 2024
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2024/pmo1233

Geometria para operações básicas com polinômios de graus 0, 1, 2 e 3

Débora Borges Ferreira   Lucylla Medeiros da Silva

Resumo

Neste artigo, apresentamos uma sugestão para professores de matemática sobre como abordar o estudo dos polinômios de 1º, 2º e 3º graus no ensino fundamental de maneira geométrica. Para isso, estabelecemos uma relação com áreas e volumes de figuras geométricas, com ênfase no retângulo e no prisma retangular reto. Além disso, incluímos uma proposta de atividade lúdica para ser aplicada em uma turma do 8º ano do ensino fundamental.

Palavras-chave: Polinômios; Geometria; Ensino da matemática; Material concreto manipulável; Jogo.

1. Introdução

Com os avanços tecnológicos e a abundância de fontes de informação acessíveis, os professores enfrentam o desafio de reinventar a prática do ensino de matemática para motivar os alunos, como afirmado por Davidov (1982). Assim, quanto mais ferramentas os professores tiverem à disposição, maior será a chance de transmitir conhecimento e garantir que o aluno alcance uma aprendizagem significativa. Nesse sentido, a busca por diferentes perspectivas e métodos de resolução de problemas torna-se crucial, sendo essencial adaptar esses problemas à realidade do aluno.

De acordo com a BNCC (Base Nacional Comum Curricular), documento que orienta a educação básica, ”essa área - Matemática -, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade -, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas”(Brasil, 2018, p. 265).

Segundo Lorenzato (2012) e Maluta (2021), o uso de materiais manipulativos e jogos facilita significativamente o processo de ensino-aprendizagem. Com isso em mente, propomos um jogo manipulável que aplica os conhecimentos de operações com polinômios à geometria. Este artigo foi adaptado de Silva (2021).

Desde tempos antigos, os problemas algébricos foram tratados como problemas relacionados a áreas retangulares e volumes de paralelepípedos, como documentado por Boyer (1968). Assim, ao trazer essa abordagem que conecta as duas áreas da Matemática, é possível até mesmo introduzir a História da Matemática em sala de aula. Ao expor aos alunos o surgimento de conceitos matemáticos, as razões por trás das formas e suas funções, tornamos o aprendizado matemático mais tangível e compreensível.

Portanto, interpretaremos polinômios de graus 0, 1, 2 e 3 em termos de figuras e sólidos geométricos, permitindo uma visualização mais clara da resolução de problemas propostos, como as operações entre polinômios (soma, subtração, multiplicação e divisão), bem como a fatoração, dentro dos casos possíveis. Ao estabelecer essa relação entre álgebra e geometria, duas das principais áreas da matemática, o conhecimento adquirido pelos alunos será mais abrangente. Além disso, a geometria, por sua natureza concreta, facilita a compreensão do abstrato, o que serve como mais um incentivo para explorar o tema deste trabalho.

Sugerimos a utilização do jogo ”Monte seu prédio”em sala de aula, visando trabalhar conceitos de polinômios, áreas de retângulos, volumes de prismas retangulares retos, bem como o raciocínio lógico e aprimorar as habilidades de noção espacial dos alunos. Reconhecendo que é difícil caracterizar objetos sem antes visualizá-los, propomos o uso de material concreto manipulável como uma forma de visualizar geometricamente a álgebra e proporcionar aos alunos a oportunidade de adquirir esse conhecimento visual, facilitando assim a absorção dos conteúdos apresentados pelo professor, especialmente os polinômios.

2. Polinômios de Graus 0, 1 e 2 Associados a Retângulos

Definição 1. Um *monômio* $\mathrm{M(x)}$ de grau n com apenas uma variável é uma expressão algébrica do tipo:

$$\mathrm{M(x) = ax^n}$$

onde $\mathrm{a} \in \mathbb{R}$ (denominado *coeficiente*), $\mathrm{n} = 0, 1, 2, \cdots$ e x é a variável. Um *polinômio* de grau n com uma variável é a soma de monômios de uma mesma variável com o de maior grau igual a n, do tipo:

$$\mathrm{P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$$

com $\mathrm{a_n} \neq 0, \mathrm{a_{n-1}}, \cdots, \mathrm{a_0} \in \mathbb{R}$ sendo os *coeficientes* do polinômio. Podemos escrever $\mathrm{P(x)} = \sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{n}} \mathrm{M_i}$, para $\mathrm{M_i = a_i x^i}$.

É natural relacionar o cálculo das áreas de figuras geométricas de duas dimensões com polinômios de segundo grau ou menor, pois as áreas têm unidades de medidas quadráticas. Para isso, podemos associar cada monômio a um retângulo, utilizando cores para designar o sinal do coeficiente do monômio.

Definição 2. Seja R um retângulo de lados medindo b e h unidades de medida linear. Definimos a área de R como o produto $\mathrm{b \cdot h}$ unidades quadradas ou unidades de área.

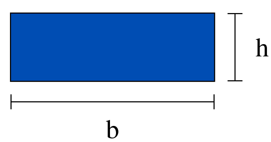
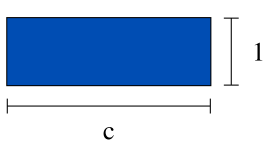
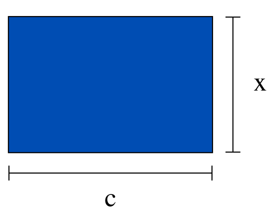
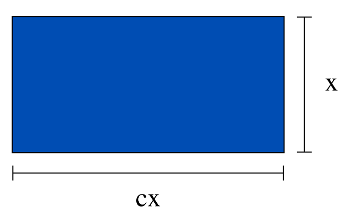


Figura 1: Retângulo de área $\mathrm{b \cdot h}$

Vamos relacionar a área dos retângulos com polinômios. Tratemos primeiro dos monômios com coeficientes positivos, $\mathrm{c} > 0$, cujas figuras associadas terão a cor azul:







Retângulo associado a $\mathrm{P_0(x) = c}$	Retângulo associado a $\mathrm{P_1(x) = cx}$	Retângulo associado a $\mathrm{P_2(x) = cx^2}$

Os monômios com coeficientes negativos, $\mathrm{c} < 0$, serão semelhantes aos anteriores, mas receberão a cor vermelha.

Se colocarmos linhas coloridas (azuis ou vermelhas) na base e na altura desses retângulos, podemos associá-los a um produto da "medida"da base vezes a altura. Por exemplo, na Figura 1, o retângulo poderia ser associado ao produto $a \cdot h$ ou ao produto $(-a) \cdot (-h)$. No primeiro caso, a base e a altura receberiam as cores azuis, enquanto no segundo caso ambas receberiam a cor vermelha. Seguiremos as regras a seguir:

- Uma base representada pela cor azul e a altura pela cor vermelha resulta num retângulo de cor vermelha - retângulo associado a um monômio com sinal negativo.
- Base e altura representados pela cor azul resultam num retângulo de cor azul.
- Base e altura representados pela cor vermelha resultam num retângulo de cor azul.

Exemplo 1. O retângulo associado a $M(x) = x^2$ é um retângulo azul de lados medindo x e pode ser resultado do produto dos monômios x ou $-x$, ou seja: $x^2 = x \cdot x = (-x) \cdot (-x)$. A escolha do produto de monômios será feita de acordo com cada situação. Assim, para representar esses dois produtos, usaremos as figuras respectivas:

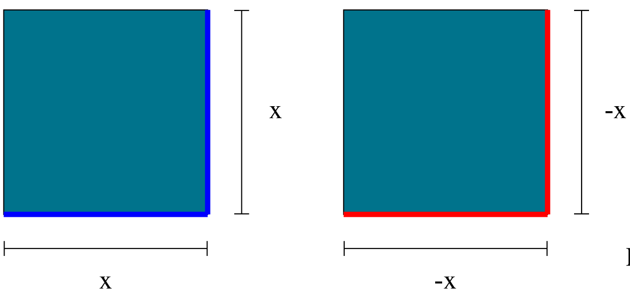


Figura 2: Retângulos de áreas x^2 associados a $M(x) = x^2$

Já o retângulo associado a $M(x) = -x^2$ é resultado do produto dos monômios x e $-x$, isto é: $-x^2 = x \cdot (-x)$. Assim, para representar esse produto usaremos a figura:

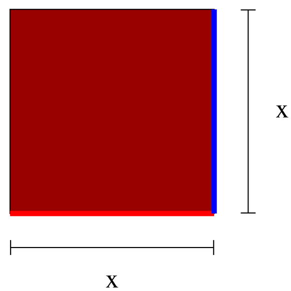


Figura 3: Retângulo de área x^2 associado ao monômio $M(x) = -x^2$

2.1. Adição e Subtração de Polinômios Associados a Retângulos

Definição 3. Considerando os polinômios com coeficientes reais $P_1(x) = \sum_{i=1}^{n} M_i$ e $P_2(x) = \sum_{j=1}^{m} N_j$, para $M_i = a_i x^i$ e $N_j = b_j x^j$ e $n \geq m$, a soma deles é definida por

$$P_1(x) + P_2(x) = \sum_{i=1}^{n}(M_i + N_i) = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)x^i.$$

E a subtração é definida por

$$P_1(x) - P_2(x) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - N_i) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)x^i.$$

Dessa forma, para tratar da adição e subtração de polinômios, usaremos a noção de composição de áreas. A soma dos polinômios será a soma das áreas dos seus retângulos associados. Ou seja, sendo A_1, A_2, ..., A_n

as áreas dos retângulos componentes, a área do retângulo associado à soma do polinômio será:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_n.$$

Para visualizar essa composição, analisemos os exemplos a seguir.

Exemplo 2. Dados os polinômios $P(x) = x$ e $Q(x) = x^2$, a soma $P + Q$ está associada geometricamente à união de dois retângulos azuis. Se considerarmos os monômios $x^2 = x.x$ e $x = 1 \cdot x$, temos a figura ao lado:

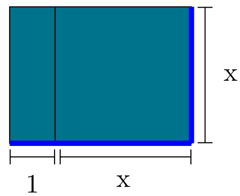


Figura 4: Retângulo Associado ao Polinômio $x + x^2$

Logo, $P + Q$ pode ser escrito como a área do retângulo cuja base mede $1 + x$ unidades e a altura mede x unidades, ou seja, $P(x)+Q(x) = x+x^2 = (1+x)\cdot x$.

No exemplo anterior, se tivéssemos escolhido a fatoração $x^2 = (-x)(-x)$, então a base e a altura receberiam a cor vermelha. Nesse caso, para justapor com o retângulo associado a x, teríamos que fazer a fatoração $x = (-1)(-x)$, porque quando justapomos a altura é única. Desse modo, $P + Q = (-1 - x)(-x)$.

Exemplo 3. Considere os polinômios $P(x) = 2x^2 - x - 1$ e $Q(x) = 2$, queremos $P + Q$. Suas representações geométricas são:

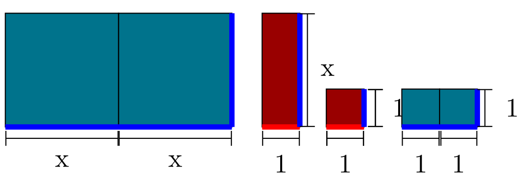


Figura 5: Retângulos associados aos polinômios $P(x) = 2x^2 - x - 1$ e $Q(x) = 2$

Unimos, como no exemplo anterior, os representantes de $2x^2$ e $-x$ formando um único retângulo, já os retângulos menores podem ser subtraídos 1 vermelho e 1 azul, restando apenas o azul.

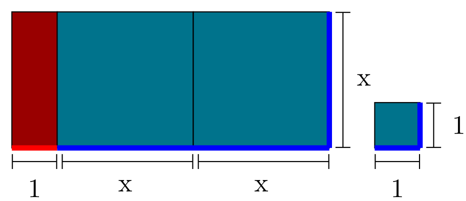


Figura 6: Retângulos associados a $-x + 2x^2 + 1$

Por isso, o resultado da soma dos polinômios é $2x^2 - x + 1$. Se quiséssemos $P - Q$, então trocaríamos as cores dos representantes de Q para vermelho, teríamos

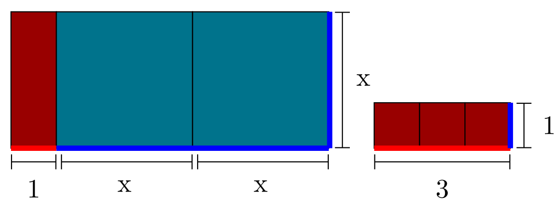


Figura 7: Retângulos associados a $P(x) - Q(x) = 2x^2 - x - 3$.

2.2. Multiplicação de Polinômios Associados a Retângulos

Definição 4. Sejam os polinômios com coeficientes reais $P_1(x) = \sum_{i=1}^{n} M_i$ e $P_2(x) = \sum_{j=1}^{m} N_j$, para $M_i = a_i x^i$ e $N_j = b_j x^j$. O produto do polinômio P_1 com o monômio N_{k_0}, para $k_0 = 1, \cdots, m$, é definido por

$$P_1(x)\cdot N_{k_0} = \sum_{i=1}^{n}(M_i \cdot N_{k_0}) = \sum_{i=1}^{n}(a_i b_{k_0})x^{i+k_0}.$$

E o produto de $P_1(x)$ e $P_2(x)$ é definido por

$$P_1(x)\cdot P_2(x) = \sum_{j=1}^{m} P_1(x)\cdot N_j.$$

A ideia do produto de polinômios será sempre explorada geometricamente no cálculo de áreas e volumes de prismas. Primeiramente, considere dois polinômios de graus zero ou um, $P(x)$ e $Q(x)$. Construiremos um retângulo com lados associados a esses polinômios de modo que a base desse retângulo será relacionada a P e a altura ao polinômio Q. Essa base e altura receberão cores referentes aos coeficientes dos monômios que compõem os polinômios. A cor final de cada retângulo justaposto será azul ou vermelha dependendo do resultado do produto dos sinais de cada coeficiente dos monômios. O produto dos dois polinômios será representado pelo retângulo resultante. Veja nos exemplos a seguir:

Exemplo 4. Considerando os polinômios $(2x + 1)$ e $(x + 2)$, queremos encontrar uma figura cuja área seja o resultado do produto dos polinômios em questão. O mais natural é um retângulo cuja base meça $2x + 1$ e a altura $x + 2$. Assim, podemos representar a multiplicação $(2x + 1)(x + 2)$ como a figura ao lado:

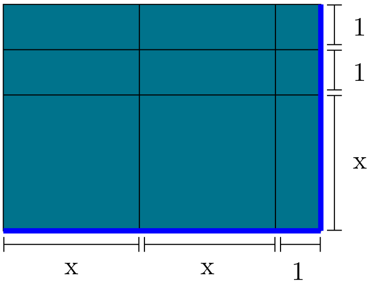


Figura 8: Retângulo associado a $(2x + 1)(x + 2)$

Note que o comprimento da base está associado ao polinômio $2x + 1$ e o comprimento da altura a $x + 2$. Logo, a área da figura é o produto dos polinômios. Somando as áreas de cada um dos retângulos formados, temos $x + x + 1 + x + x + 1 + x^2 + x^2 + x = 2x^2 + 5x + 2$. Ou seja, temos duas áreas de medida x^2, cinco áreas de medida x e duas áreas de medida 1. Portanto, $(2x + 1)(x + 2) = 2x^2 + 5x + 2$ como esperado se efetuássemos as propriedades de soma e multiplicação estudadas anteriormente.

Exemplo 5. Dados os polinômios $(2x + 1)$ e $(-x)$. Podemos representar geometricamente a multiplicação $(2x + 1)(-x)$ da forma:

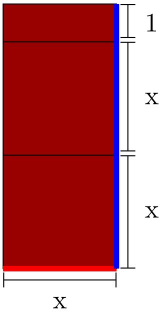


Figura 9: Polinômio $(-x)(2x + 1)$

Isto é, um retângulo de base vermelha medindo x e associada ao polinômio $-x$; e altura azul associada a $2x + 1$. Assim, podemos escrever o polinômio $(-x)(2x+1)$ como a soma das áreas retangulares representadas na figura anterior:

$$\begin{aligned} x\cdot(-x) + x\cdot(-x) + 1\cdot(-x) &= -2x^2 - x \\ &= (-x)(2x + 1). \end{aligned}$$

Seguiremos, agora, com uma nova interpretação geométrica de polinômios de graus 0, 1 e 2 de modo que os polinômios de grau 3 também possam ser compreendidos. Tal representação se dará de maneira análoga ao trabalhado realizado anteriormente com as áreas dos retângulos.

3. Polinômios de Graus 0, 1, 2 e 3 Associados a Prismas

Relacionaremos polinômios de graus 0, 1, 2 e 3 com volumes de prismas retangulares retos, os paralelepípedos.

Definição 5. O cálculo do volume de um prisma retangular reto é dado pela multiplicação das medidas de comprimento, largura e altura:

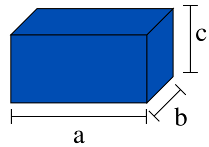


Figura 10: Paralelepípedo de volume abc.

De maneira análoga à área de uma superfície retangular, podemos representar geometricamente os polinômios, bem como suas operações, por meio de paralelepípedos. Analisemos as quatro possibilidades para a relação do volume dos paralelepípedos com monômios de grau no máximo 3:

1. Monômio de grau 0, $P_0(x) = c$: basta utilizarmos um prisma retangular reto com largura medindo c, altura e comprimento medindo 1 unidade. Assim, seu volume é igual a c unidades de volume, ou seja, representa um monômio $P_0(x) = c$ cujo grau é 0.

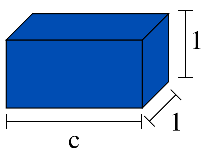


Figura 11: Paralelepípedo de volume c.

2. Monômio de grau 1, $P_1(x) = cx$: basta utilizarmos um paralelepípedo com largura medindo c unidades, altura medindo x e comprimento medindo 1 unidade.

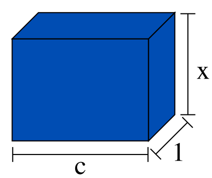


Figura 12: Paralelepípedo de volume cx.

3. Monômio de grau 2, $P_2(x) = cx^2$: utilizaremos um paralelepípedo com largura medindo c unidades, altura e comprimento medindo x unidades.

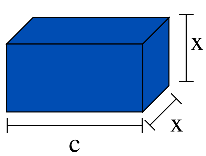


Figura 13: Paralelepípedo de volume cx^2.

4. Monômio de grau 3, $P_3(x) = cx^3$: utilizaremos um paralelepípedo com largura medindo cx unidades, comprimento e altura medindo x unidades.

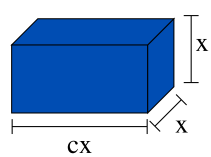


Figura 14: Paralelepípedo de volume cx^3.

Usaremos prismas retangulares retos na cor azul para representar monômios com coeficientes de sinal positivo e prismas retangulares retos na cor vermelha para representar monômios cujo coeficiente tem sinal negativo. Supondo cores azuis ou vermelhas para as arestas (comprimento, largura e altura), assumiremos que a cor do sólido resultante será o resultado dos produtos dos sinais dos coeficientes, conforme fizemos nos retângulos da seção anterior. Seguiremos as seguintes regras:

1. Uma das arestas representada pela cor azul e as demais representadas pela cor vermelha resultam num paralelepípedo de cor azul - associado a um monômio de sinal positivo;
2. Duas arestas representadas pela cor azul e uma aresta representada pela cor vermelha resultam num paralelepípedo de cor vermelho - associado a um monômio de sinal negativo;
3. Todas as arestas representadas pela cor azul resultam num paralelepípedo de cor azul - associado a um monômio de sinal positivo;
4. Todas as arestas representadas pela cor vermelha resultam num paralelepípedo de cor vermelha - associado a um monômio de sinal negativo.

Exemplo 6. Considere os monômios $P(x) = 1$ e $Q(x) = -1$. Os prismas associados a P e Q são:

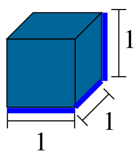
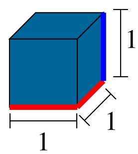
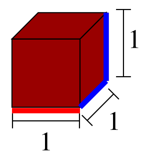
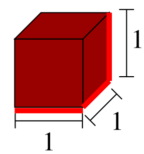
			
$P(x) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$	$P(x) = (-1) \cdot (-1) \cdot 1 = 1$	$Q(x) = (-1) \cdot 1 \cdot 1 = -1$	$Q(x) = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$

Tabela 2: Prismas e seus polinômios associados

Exemplo 7. Sejam os monômios $P(x) = x$ e $Q(x) = -x$. Os prismas associados a P e Q são respectivamente

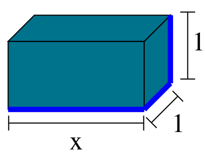
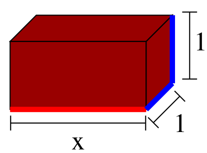
	
$P(x) = x \cdot 1 \cdot 1 = x$	$Q(x) = (-x) \cdot 1 \cdot 1 = -x.$

Tabela 3: Prismas e seus polinômios

Exemplo 8. Dados os monômios $P(x) = x^2$ e $Q(x) = -x^2$. Os prismas associados a P e Q são respectivamente

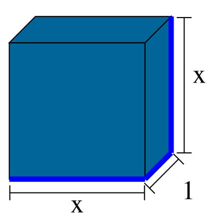
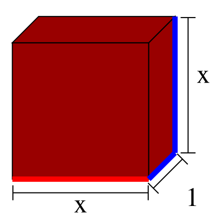
	
$P(x) = x \cdot 1 \cdot x = x^2.$	$Q(x) = (-x) \cdot 1 \cdot x = -x^2.$

Tabela 4: Prismas associados a x^2 e a $-x^2$

Exemplo 9. Para os monômios $P(x) = x^3$ e $Q(x) = -x^3$, os prismas associados a eles são respectivamente

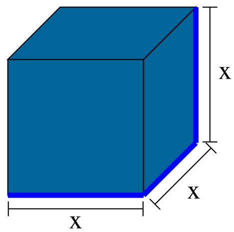
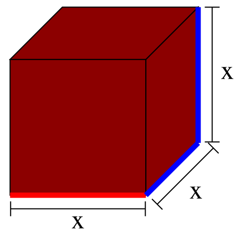
	
$P(x) = x \cdot x \cdot x = x^3$	$P(x) = (-x) \cdot x \cdot x = -x^3$

Tabela 5: Prismas associados a x^3 e a $-x^3$

Com base nas representações e associações vistas anteriormente, podemos relacionar geometricamente qualquer polinômio de grau no máximo 3 com uniões de prismas.

Exemplo 10. Seja o polinômio $P(x) = x^3 + 1$. Uma possível representação geométrica de P seria a figura ao lado

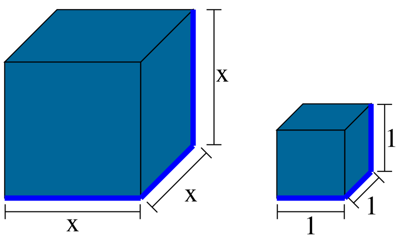


Figura 15: Paralelepípedos associados a $P(x) = x^3 + 1$.

Observe que, neste caso, não conseguimos construir um único prisma retangular reto.

Para representar geometricamente expressões do tipo $x^3 - x^2 + x^2 - x + x + 1$ que resultam em $P(x)$, usamos a figura a seguir:

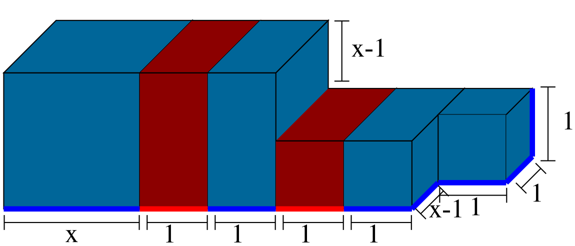


Figura 16: Sólidos associados a $x^3 - x^2 + x^2 - x + x + 1$

Podemos reorganizar os sólidos assim:

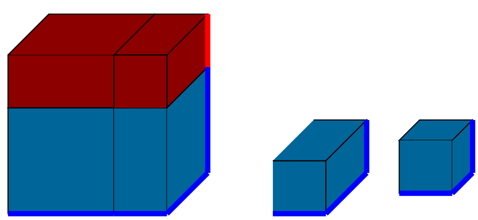


Figura 17: Sólidos associados a $(x + 1)x(x - 1) + x + 1$

Calculando a soma dos volumes da composição de paralelepípedos, temos $P(x) = (x + 1)x(x - 1) + x + 1$. Construímos, desta maneira, outra representação geométrica de P que nos fornece uma nova maneira algébrica de escrevê-lo. Portanto, representamos P como um prisma retangular reto de arestas azuis x e $x + 1$, e uma aresta com parte azul e parte vermelha associada a $x - 1$, outro prisma de medidas x, 1 e 1, por último, um cubo de lado 1. A partir de agora, chamaremos estes dois últimos prismas que ”sobraram” de restos.

Vejamos outro exemplo.

Exemplo 11. Uma possível representação geométrica para $Q(x) = x^3 + 3x^2 + x - 2$ é:

Com os paralelepípedos utilizados poderíamos fazer um rearranjo, mas para não modificar a quantidade final que representará o polinômio $Q(x)$ é necessário, muitas vezes, agregarmos outros sólidos, como na figura abaixo.

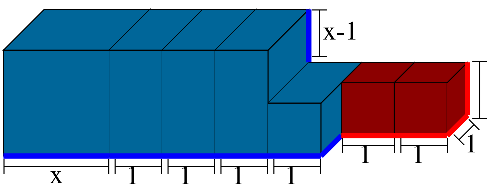


Figura 18: Sólidos associados a $x^3 + 3x^2 + x - 2$

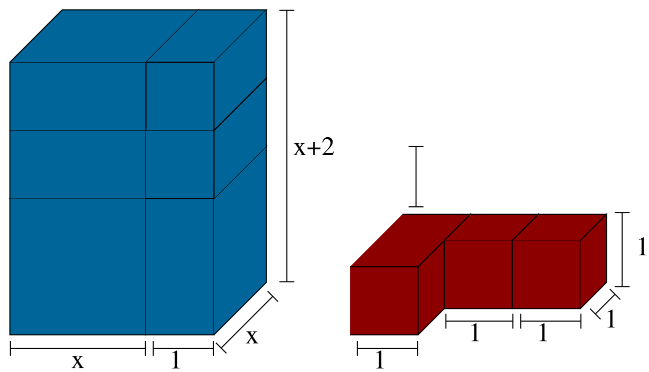


Figura 19: Sólidos associados a $x(x + 1)(x + 2) - x - 2$

Para construirmos esse prisma retangular reto, adicionamos um paralelepípedo azul cujo volume é x, logo, precisamos acrescentar um paralelepípedo vermelho de volume x para ponderar, algebricamente equivalente a $Q(x) = x^3+3x^2+x+x-x-2$. A representação geométrica da figura anterior corresponde, algebricamente, ao polinômio $(x + 1)x(x + 2) - x - 2$. Ou seja, podemos reescrever Q da forma $x(x + 1)(x + 2) - x - 2$.

3.1. Adição e Subtração de Polinômios Associados a Prismas

De maneira análoga ao procedimento de adição de polinômios usando retângulos, será feita com o uso dos prismas.

Exemplo 12. Tome os polinômios $M(x) = x^2$ e $N(x) = x^3 + 1$. Queremos representar geometricamente a soma $M + N$, veja a figura a seguir

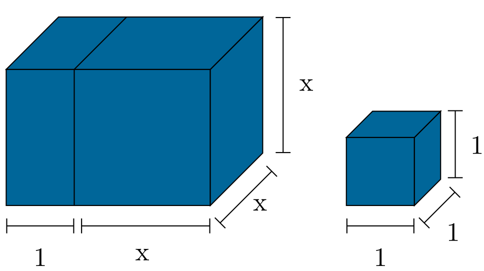


Figura 20: Sólidos associados a $x^2 + x^3 + 1$

Temos que, tanto algebricamente como geometricamente, $M + N = x^2 + x^3 + 1$ ou, ainda, $M + N = x^2 \cdot (1 + x) + 1$, pois a partir da composição dos paralelepípedos, um dos prismas resultantes possui dois lados medindo x unidades de medida e um lado medindo $x + 1$ unidades de medida, agregado a mais outro prisma de volume 1.

Exemplo 13. Considere $P(x) = x^3$ e $Q(x) = -x$, a representação geométrica da soma $P + Q$ é:

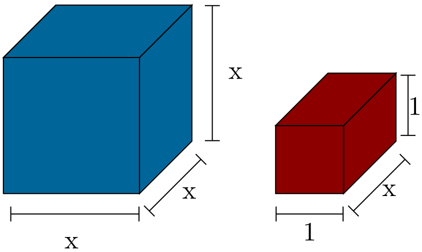


Figura 21: Sólidos associados a $x^3 - x$

Não é possível uma composição única dos dois paralelepípedos formando um só usando apenas esses dois sólidos. Para que a composição seja possível, acrescentamos dois paralelepípedos associados aos polinômios x^2 e $-x^2$:

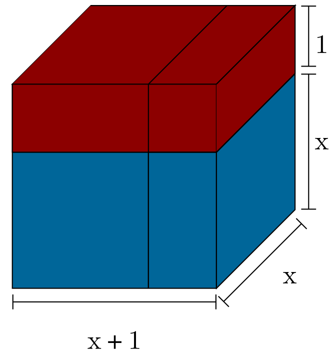


Figura 22: Sólidos associados a $x(x-1)(x+1)$

A soma equivalente dos volumes é exatamente $P + Q$, pois $x^3+(-x)+x^2+(-x^2) = x^3-x$. É possível, ainda, a partir do paralelepípedo resultante, encontrarmos uma simplificação da soma $P+Q$ associando suas medidas aos valores $x+1$ no comprimento, x de largura e $x-1$ para altura. Calculando o volume total $(x-1)(x+1)x = P(x) + Q(x)$.

Exemplo 14. Sejam os polinômios $P(x) = x^3$ e $Q(x) = -2x$ cujos graus são, respectivamente, 3 e 1. A subtração $P(x) - Q(x) = x^3 - (-2x) = x^3 + 2x$. Sua representação geométrica é:

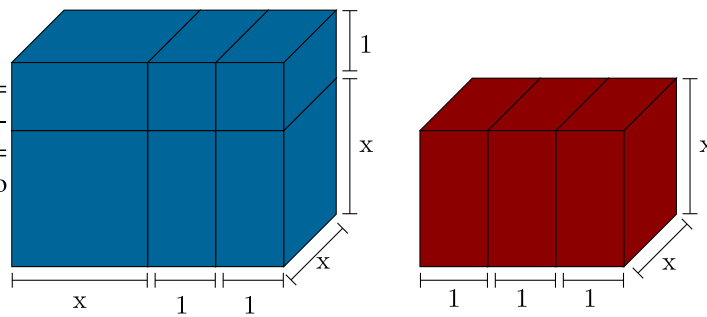


Figura 23: Sólidos associados a $x^3 + 2x$

Observe na figura anterior que, para conseguirmos obter uma representação geométrica em forma de prisma retangular reto, tivemos que acrescentar 3 paralelepípedos de cor azul associados ao polinômio x^2. Para manter o resultado da operação $P - Q$ inalterado, acrescentamos também 3 paralelepípedos de cor vermelha associados ao polinômio $-x^2$. No entanto, esses últimos ficaram ”sobrando” na construção do prisma. Portanto, a subtração $P(x) - Q(x)$ pode ser escrita da forma $P(x) - Q(x) = x(x+2)(x+1) + (-3x^2) = x(x+2)(x+1) - 3x^2$.

Exemplo 15. Sejam os polinômios $P(x) = -x^3 + x^2 - 1$ e $Q(x) = x - 1$. A soma $P + Q$ pode ser geometricamente representada pela Figura 24.

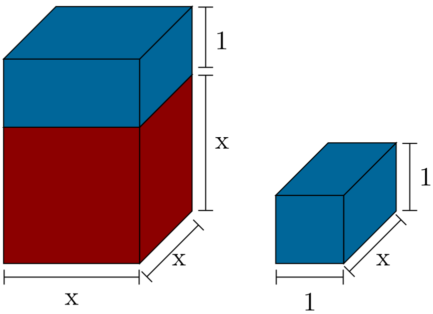


Figura 24: Sólidos associados a $P + Q$

Veja que o prisma associado à parcela x e o prisma associado à parcela -2 não encaixaram no primeiro paralelepípedo, logo, calculando o volume total temos $P + Q = x^2(1 - x) + x - 2$.

Vejamos agora a representação geométrica de $P - Q$ na Figura 25, lembrando que os prismas de Q mudam de cor, ou seja, o relacionado ao monômio x ficará vermelho e o -1 ficará azul. Desse modo, serão cancelados os prismas representantes de 1 e -1, restando:

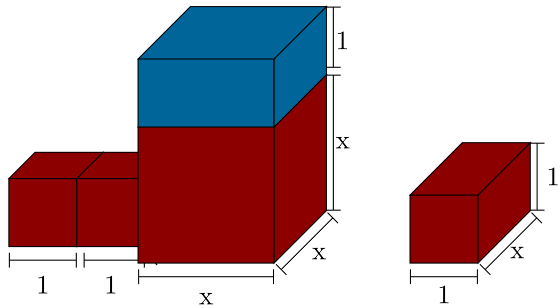


Figura 25: Sólidos associados a $P - Q$

Assim como na soma, o prisma associado à parcela $-x$ não encaixou no paralelepípedo resultante da subtração $P - Q$. Como $P - Q = -x^3 + x^2 - 1 - (x - 1) = -x^3 + x^2 - 1 - x + 1 = -x^3 + x^2 - x$, os cubos associados às parcelas 1 e -1 foram cancelados. Logo, $P - Q = x^2(1 - x) - x$.

3.2. Multiplicação de Polinômios Associados a Prismas

O volume de um paralelepípedo, como vimos anteriormente, é dado pelo produto da área da sua base e a sua altura. Logo, para representar geometricamente uma multiplicação entre polinômios, podemos associá-los às três arestas de um paralelepípedo. É importante ter atenção ao grau resultante do produto. Neste trabalho, como tratamos apenas de polinômios de graus 0, 1, 2 e 3, representaremos geometricamente apenas os produtos cujo resultado será um polinômio de grau menor ou igual a 3. Vejamos exemplos que representem essas possibilidades apontadas.

Exemplo 16. Os polinômios $P(x) = x^3$ e $Q(x) = 2$ cujos graus são, respectivamente, 3 e 0, têm produto $P \cdot Q$ que é um múltiplo de P. Basta construirmos um prisma retangular reto composto por dois paralelepípedos associados ao polinômio x^3. Veja a figura ao lado.

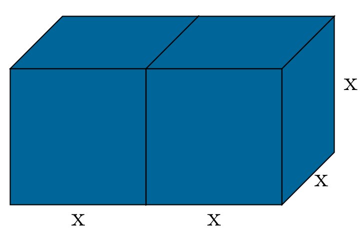


Figura 26: Sólidos associados a $P \cdot Q$

Portanto, $P \cdot Q = 2x^3$.

Exemplo 17. Sejam os polinômios $P(x) = -x^2$ e $Q(x) = -2$ cujos graus são 2 e 0, respectivamente. O produto $P \cdot Q$ é um prisma de base quadrada vermelha e altura medindo 2 vermelha também, assim base vermelha vezes altura vermelha resultará num prisma azul, que é o dobro do prisma P. Logo, a multiplicação resultará num polinômio de sinal positivo, sendo este representado por um prisma retangular reto de cor azul cujo volume é $2x^2 = P \cdot Q$. Veja na figura ao lado.

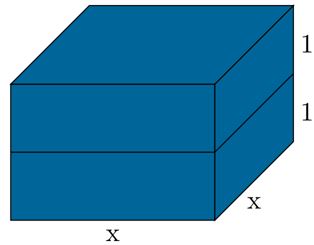


Figura 27: Sólidos associados a $P \cdot Q$

Exemplo 18. Dados os polinômios $P_2(x) = 2x^2$ e $P_1(x) = -x$ cujos graus são, respectivamente, 2 e 1. Associando os polinômios P_2 à base do prisma e P_1 à altura, temos que $P_2 \cdot P_1$ será representado geometricamente da forma ao lado

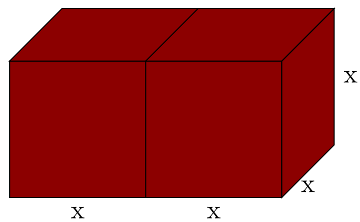


Figura 28: Sólidos associados a $P_2 \cdot P_1$

Calculando o volume total do paralelepípedo da figura, temos que $P_2 \cdot P_1 = -2x^3$.

Exemplo 19. Considere os polinômios $P_1(x) = -x$ e $P_0(x) = 3$ cujos graus são, respectivamente 1 e 0. $P_1 \cdot P_0$ é um múltiplo de P_1. Portanto, como visto anteriormente, sua representação geométrica é a da figura:

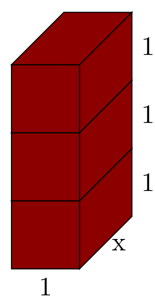


Figura 29: Sólido associado a $P_1 \cdot P_0$

As operações de soma, subtração e multiplicação de polinômios já foram exploradas até aqui, faltando apenas a divisão de polinômios que é geralmente feita de modo algébrico usando o algoritmo da divisão euclidiana ou Briot-Rufinni.

Definição 6. Sejam os polinômios com coeficientes reais $P_1(x) = \sum_{i=1}^{n} M_i$ e $P_2(x) = \sum_{j=1}^{m} N_j$, para $M_i = a_i x^i$ e $N_j = b_j x^j$. A divisão de P_1 por N_{k_0}, para $k_0 = 1, \cdots, m,\ \ n \geq m$, é definida pelo polinômio:

$$\frac{P_1(x)}{N_{k_0}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{N_{k_0}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_{k_0}} x^{i-k_0}.$$

A divisão de $P_1(x)$ por $P_2(x)$ é definida

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = Q(x)$$

quando $P_1(x) = Q(x) \cdot P_2(x)$ quando a divisão for exata, ou $P_1(x) = Q(x) \cdot P_2(x) + R(x)$, quando não for exata.

Para que possamos efetuar geometricamente a divisão entre polinômios, introduziremos o "quebra-cabeça" desenvolvido para a realização da dissertação [9]. Até aqui já estamos dotados de conhecimento algébrico acerca dos polinômios, especialmente os de grau no máximo 3, bem como interpretá-los de maneira geométrica utilizando área de superfícies retangulares e volume de prismas retangulares retos. Dessa maneira, espera-se que o jogo apresentado a seguir seja de fácil compreensão.

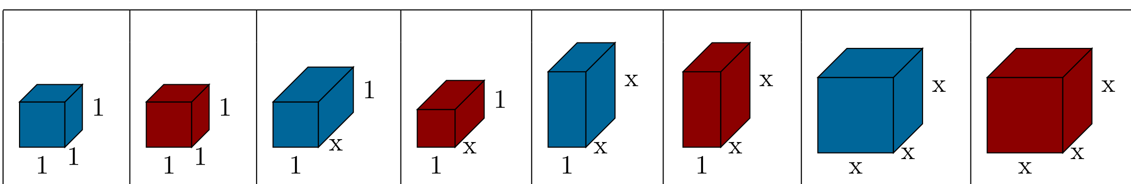
4. Jogo Monte seu Prédio

Nessa seção, propomos efetuar divisão de polinômios de grau 3 por polinômios de graus 2 e 1, bem como divisão de polinômios de grau 2 por polinômios de grau 1, de forma lúdica utilizando o jogo "Monte seu prédio". Este conteúdo é ministrado na turma do 8º ano do ensino fundamental II, de acordo com o currículo oferecido pela BNCC (Base Nacional Comum Curricular).

4.1. Preparação

A atividade será desenvolvida em uma aula de 50 minutos. A turma deverá ser divida em grupos de dois ou três alunos. Cada grupo receberá as peças do jogo que, como sugestão, poderão ser confeccionadas no dia anterior como atividade de casa. Serão 4 tipos distintos de prismas, cada grupo deverá receber em torno de 30 prismas, metade deles na cor vermelha e o restante na cor azul. O professor deverá selecionar antecipadamente as divisões de polinômios que deseja trabalhar em sala conforme a Seção 4.3.

A seguir, temos uma tabela com as peças do jogo e seus respectivos polinômios associados a cada uma delas.



$P(x) = 1$	$P(x) = -1$	$P(x) = x$	$P(x) = -x$	$P(x) = x^2$	$P(x) = -x^2$	$P(x) = x^3$	$P(x) = -x^3$

Tabela 6: Peças no jogo

Sugestão de atividade de casa para o dia anterior à execução do jogo: cada aluno receberá 16 planificações com 4 de cada tipo e deverá trazer na próxima aula recortadas, de cada tipo duas deverão ser coloridas de azul e duas de vermelho, e montadas com uso de cola branca. Os prismas planificados serão dos tipos: 4 cubos de lados medindo 3cm; 4 cubos de lados medindo 7cm; 4 paralelepípedos com altura 7cm, comprimento e largura 3cm; 4 paralelepípedos cuja altura é 3cm, largura e comprimento de 7cm. A escala considerada foi de 1 para 3, e a medida x será representada pela medida 7.

De posse das peças do jogo, o professor deverá detalhar a Tabela 6, de preferência a desenhe no quadro, relacionando os monômios e os sólidos. Após essa etapa, explicar as regras do jogo.

4.2. Regras do jogo

O objetivo do jogo é determinar uma divisão de polinômios por meio da construção de um prédio. O prédio será um prisma retangular reto cuja base (ou altura) será determinada pelo denominador da divisão, e o volume do prisma será o mais próximo possível do numerador da divisão. O total de peças usadas nessa construção deverá corresponder exatamente ao numerador da divisão, e caso sobrem peças, ou seja, com o total não seja possível construir um prisma retangular reto, estas serão o resto da divisão.

Como visto anteriormente, o volume de um paralelepípedo é dado pela multiplicação da área da base pela altura, logo, para utilizar o quebra cabeça, seguiremos o seguinte raciocínio quando não há resto, ou seja, quando a divisão for exata:

$$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{b}} = \mathrm{h} \text{ ou } \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{h}} = \mathrm{b}$$

onde V é o polinômio que representa o volume do paralelepípedo e está associado ao numerador da divisão. Nos tipos 1 e 2, h que é a altura será associada ao denominador e b será o quociente da divisão. No tipo 3, b que é a base será associada ao denominador e h será o quociente da divisão. Quando a divisão for inexata, ou seja, quando houver resto (sobra de peças), o volume V do prisma será a soma das peças utilizadas na montagem do prédio com as peças que sobraram. Cada um dos três tipos estão detalhados a seguir.

O professor deverá colocar no quadro uma divisão de polinômios, explicar o tipo $(1, 2$ ou $3)$ e o que será a base ou altura do prédio, dar um tempo de 5 minutos para que resolvam. O grupo que resolver mais rápido o problema ganhará certa pontuação, e um dos membros do grupo deverá expor à turma a álgebra por trás da solução, ou seja, identificar os polinômios associados à base, altura, volume e os restos, se existirem.

Procede-se assim como outras divisões. O grupo vencedor será o que tiver maior pontuação. As pontuações podem variar de acordo com o grau de dificuldade da construção. Veremos a seguir como jogar de acordo com os três tipos possíveis.

1. **Divisão de polinômios de grau 2 por outro de grau 1**

   Determinada a divisão que efetuaremos, montamos um prédio (prisma retangular reto) de volume o mais próximo possível do numerador e cuja altura corresponderá ao denominador da divisão. A resultado da divisão será a área da base do prédio a ser determinada no quebra-cabeça. Veja os exemplos a seguir.

Exemplo 20. Seja a divisão $\dfrac{\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}+3}{\mathrm{x}+1}$. Para representar o polinômio $\mathrm{V} = \mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x} + 3$, utilizaremos uma peça azul de volume x^2, quatro peças azuis de volume x e três peças azuis de volume unitário de modo que a altura do prédio a ser construído seja equivalente ao polinômio do denominador $\mathrm{h} = \mathrm{x} + 1$. O único modo de dispor essas peças de forma que a altura seja $\mathrm{x} + 1$ é o representado pela figura ao lado. A área da base encontrada será o quociente da divisão.

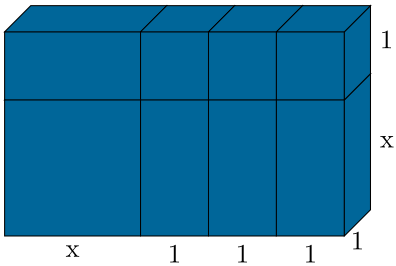


Figura 30: Prédio obtido na solução do quociente $\dfrac{\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}+3}{\mathrm{x}+1}$.

O retângulo obtido na base do prédio anterior é:

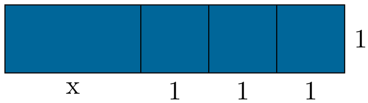


Figura 31: Base do prédio do Exemplo 20.

Exemplo 21. Queremos construir um prédio que represente a divisão $\dfrac{x^2+3x}{x+2}$, logo a altura será $h = x+2$ e o total de peças utilizadas para a construção é representado pelo numerador $V = x^2 + 3x$. Para isto, iniciaremos utilizando uma peça azul de volume x^2 e três peças azuis de volume x:

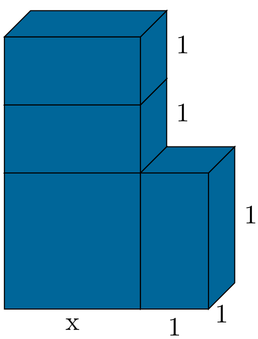


Figura 32: Montagem de prédio com peças de $x^2 + 3x$.

Contudo, não conseguimos construir um paralelepípedo reto. Para isto, devemos acrescentar duas peças azuis de volume 1. E, para não interferir no volume total, também acrescentaremos duas peças vermelhas de volume 1.

Temos, portanto, que a área da base encontrada é $x + 3$, logo, o resultado da divisão é $\dfrac{x^2+4x+3}{x+1} = x + 3$.

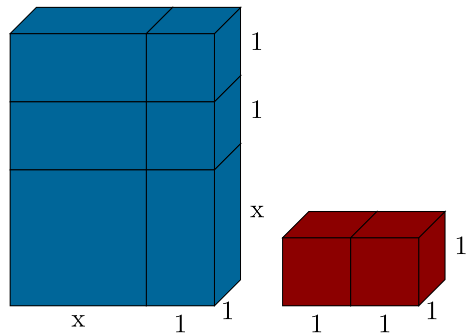


Figura 33: Prédios associados a $x^2 + 3x + 2$ e a -2, respectivamente.

Desse modo, sobraram peças que representarão o resto da divisão. A base obtida na construção do prédio maior é:

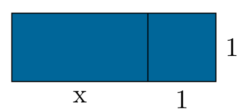


Figura 34: Base do prédio azul anterior

cuja área da base mede $b = (x + 1) \cdot 1 = x + 1$. Portanto, $\dfrac{x^2+3x}{x+2} = x + 1$ e sobra um resto igual a -2. Logo,

$$x^2 + 3x = (x + 2)(x + 1) - 2.$$

Exemplo 22. Dada a divisão $\dfrac{x^2+4x+4}{x+2}$. Queremos construir um prédio de tal maneira que as peças utilizadas totalizem um volume igual ao numerador x^2+4x+4 e a altura do prédio seja $x+2$.

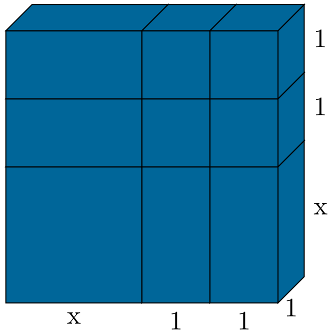


Figura 35: Prédio associado a x^2+4x+4

Utilizamos, para a construção do prédio da Figura 55, uma peça azul de volume x^2, quatro peças azuis de volume x e quatro peças azuis de volume 1. A base encontrada é:

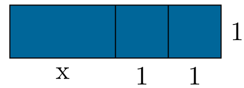


Figura 36: Base do prédio do Exemplo 22.

Algebricamente representada por $(x+2)\cdot 1 = x+2$. Portanto, $\dfrac{x^2+4x+4}{x+2} = x+2$.

Exemplo 23. Seja a divisão $\frac{x^2+x-2}{x+3}$. Queremos construir um prédio utilizando um total de peças cujo volume seja igual ao polinômio do numerador e cuja altura seja x+3. Para isto, serão necessários uma peça azul de volume x^2, três peças azuis de volume x (para que tenhamos altura $x+3$), duas peças vermelhas de volume x (para que cancelando com as peças de cor azuis obtenhamos um volume igual a x) e duas peças de cor vermelha de volume 1. Veja a figura abaixo.

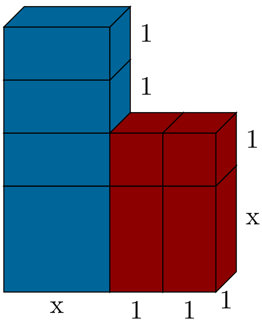


Figura 37: Prédio associado a $x^2+3x-2x-2$

Para que o prédio construído seja um prisma retangular reto, precisamos acrescentar quatro peças vermelhas de volume 1. Como não podemos interferir no volume total, também acrescentaremos quatro peças azuis de volume 1. Observe na Figura 38.

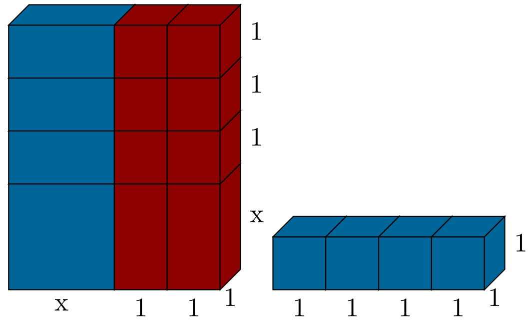


Figura 38: Prédios associados a $(x+3)(x-2)$ e 4, respectivamente.

Ao construir o prédio, a área da base encontrada é igual a $x-2$, como representada pela figura a seguir.

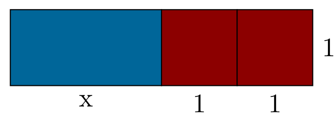


Figura 39: Base do Prédio maior da Figura 38.

Como sobraram quatro peças de volume 1, temos que $\frac{x^2+x-2}{x+3} = x-2$ com resto igual à 4. Em resumo,

$$x^2+x-2 = (x+3)(x-2)+4.$$

2. **Divisão de polinômios de grau 3 por outro de grau 1**

Na divisão de um polinômio de grau 3 por um polinômio de grau 1, montaremos um prédio cujo volume será o mais próximo possível do numerador e altura será o denominador da divisão. A base, que será determinada ao jogar, representará o quociente da divisão. Veja os exemplos.

Exemplo 24. Considere a divisão $\dfrac{x^3+2x^2}{x+2}$. Queremos construir um prédio cujo total de peças seja o mais próximo possível do volume dado pelo polinômio $V = x^3 + 2x^2$ de modo que a altura seja representada pelo polinômio $h = x + 2$:

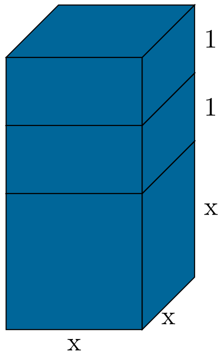


Figura 40: Prédio associado a $x^3 + 2x^2$

Para a construção do prédio da Figura 60 utilizamos uma peça azul de volume igual a x^3 e duas peças de cor azul de volume x^2. Observe a Figura 40 que indica a base do prédio obtido:

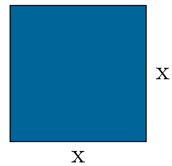


Figura 41: Base do Prédio da Figura 40.

Portanto, o quociente da divisão $\dfrac{x^3+2x^2}{x+2}$ é x^2.

Exemplo 25. Seja a divisão $\frac{x^3+x^2}{x-1}$. Queremos construir um prédio de altura $h = x - 1$ utilizando um total de peças que resultem num volume igual, ou mais próximo possível, ao numerador da divisão: $V = x^3 + x^2$. Para representá-lo, começaremos utilizando uma peça azul de volume x^3, uma peça vermelha de volume x^2 e duas peças azuis de volume x^2 (uma delas irá cancelar com o $-x^2$) para que o prédio tenha a altura determinada. Veja na Figura 42.

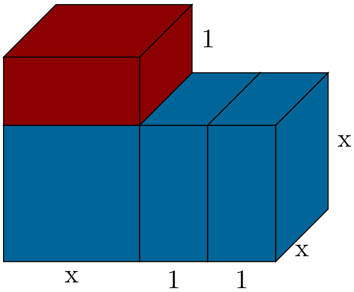


Figura 42: Prédio associado a $x^3 - x^2 + 2x^2$.

Observe que o prédio construído não está no formato de um prisma retangular. Para isto, acrescentaremos a ele duas peças vermelhas de volume x e duas peças azuis de volume x, assim não iremos interferir no volume total. Veja:

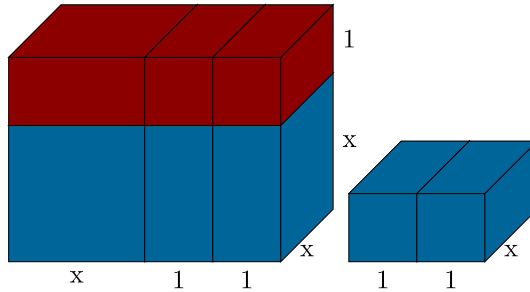


Figura 43: Prédios associados a $x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x$ e $-2x$, respectivamente

Cujo retângulo obtido na base do prédio maior é:

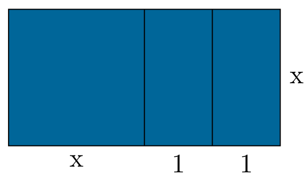


Figura 44: Base do Prédio Maior da Figura 43.

A área da base encontrada no prédio construído mede $x^2 + x + x = x^2 + 2x$. Como sobraram peças na construção do prédio, estas são o resto da divisão $\frac{x^3+x^2}{x-1}$. Portanto, $\frac{x^3+x^2}{x-1} = x^2+2x$ e sobra um resto igual à $2x$.

Exemplo 26. Seja a divisão $\dfrac{x^3+x^2+1}{x+1}$. Construiremos um prédio cujo volume seja o mais próximo possível do numerador $V = x^3+x^2+1$ e a altura seja $h = x+1$. Para tanto, utilizaremos uma peça azul de volume x^3, uma peça azul de volume x^2 e uma peça azul de volume 1 de modo que a altura representada seja o denominador $h = x+1$:

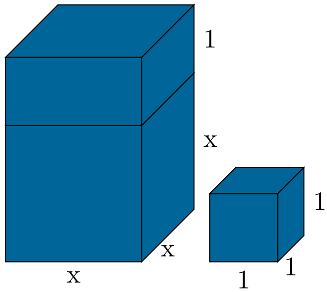


Figura 45: Prédios associados a x^3+x^2 e 1, respectivamente.

Como a peça de volume 1 não encaixa nas demais peças para que possamos construir o prédio da Figura 65, lembrando que o prédio deve ser sem formato de prisma retangular, então, a peça de volume 1 representará o resto da divisão. A base encontrada é $x \cdot x = x^2$. Veja na Figura 45:

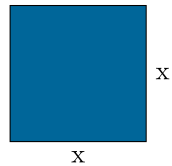


Figura 46: Base do Prédio Maior da Figura 45.

Portanto, $\dfrac{x^3+x^2+1}{x+1} = x^2$ e tem resto igual a 1.

Exemplo 27. Dada a divisão $\dfrac{x^3+2x^2}{x-1}$. O total de peças que podemos utilizar para montar o prédio deverá ter volume o mais próximo possível do numerador x^3+2x^2 de modo que a altura seja igual ao denominador $x-1$. Para tanto, precisaremos de uma peça azul de volume x^3, umas peça vermelha de volume x^2 e três peças azuis de volume x^2, pois uma delas irá cancelar com a peça vermelha de volume x^2 obtendo um volume total igual ao numerador x^3+2x^2. Veja na Figura 47:

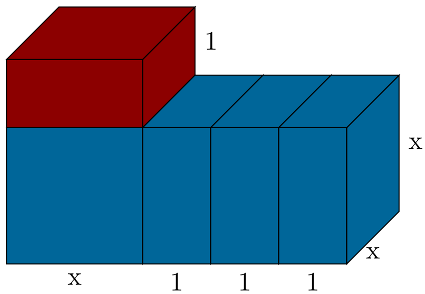


Figura 47: Prédio associado a $x^3-x^2+3x^2$

Entretanto, não obtivemos um prédio em formato de prisma retangular reto. Desse modo, acrescentaremos três peças de cor vermelha de volume igual à x. Para que estas peças acrescentadas não interfiram no volume total, devemos acrescentar também três peças de cor cinza de volume igual à x. Veja na Figura 48:

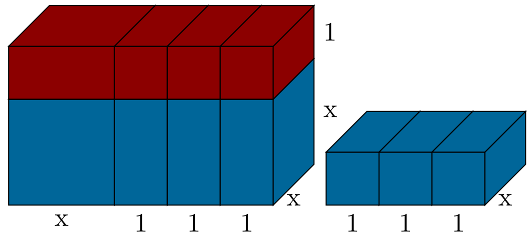


Figura 48: Prédios associados a $x(x+3)(x-1)$ e $3x$, respectivamente.

Temos, finalmente, uma prédio de volume igual ao numerador da divisão, x^3+2x^2, e de altura igual ao denominador, $x-1$. A base encontrada é representada pela Figura 49:

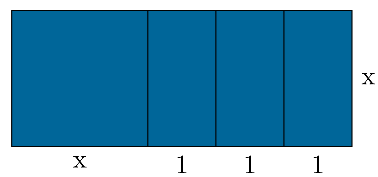


Figura 49: Base do prédio maior da Figura 48.

Ou seja, a área da base encontrada é x^2+3x. Como sobraram três peças de cor azul de volume igual à x, totalizando um volume de $3x$, temos que $\dfrac{x^3+2x^2}{x-1} = x^2+3x$ sobrando um resto igual a $3x$.

Vimos até aqui que, dada a divisão, devemos observar o denominador: se o grau for 1, então precisaremos montar um prédio com altura igual ao polinômio do denominador tendo a base a ser determinada na solução do quebra cabeça.

3. **Divisão de polinômios de grau 3 por outro de grau 2**

   Este caso será diferente dos anteriores, se dará de modo que o volume corresponderá ao numerador, a base corresponderá ao denominador e altura a ser determinada na resolução do quebra cabeça corresponderá ao quociente da divisão. Veja os exemplos.

Exemplo 28. Considere a divisão $\frac{-x^3+x^2}{-x^2+x}$. Queremos construir um prédio cujo volume represente o numerador $V = -x^3 + x^2$ e a área da base será $b = -x^2 + x$ que é o denominador da divisão. Começaremos pela construção da base. Veja a figura:

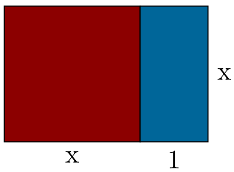


Figura 50: Base do Prédio a ser obtido na construção.

Para construir o prédio com peças que representem o polinômio do numerador da divisão, utilizaremos uma peça vermelha de volume x^3 e uma peça azul de volume x^2. Veja na figura:

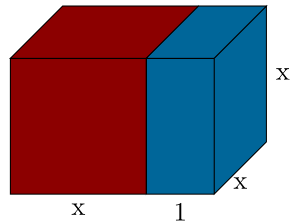


Figura 51: Prédio associado a $-x^3 + x^2$.

Como a altura encontrada é x, temos que o resultado da divisão $\frac{-x^3+x^2}{-x^2+x}$ é igual a x.

Exemplo 29. Seja a divisão $\frac{x^3+2}{x^2+1}$. Queremos construir um prédio utilizando peças que totalizem um volume igual a $x^3 + 2$ cuja área da base seja igual a $x^2 + 1$. Observe, na Figura 52, que não é possível que a base do prédio seja um retângulo de área x^2+1 sem o acréscimo de outras peças:

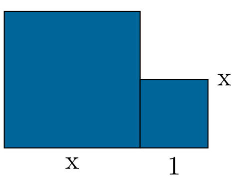


Figura 52: Base do Prédio a ser construído.

O prédio não seria um prisma retangular reto nessa situação. Então, acrescentaremos peças de cor azul e vermelha para obter um retângulo como mostra a figura:

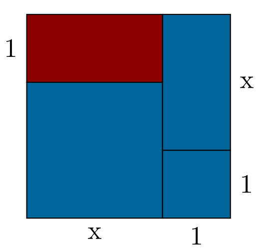


Figura 53: Base do Prédio a ser construído.

A Figura 53 mostra como será a base do prédio. A altura deve ser pelo menos x, pois utilizaremos uma peça azul de volume x^3, uma peça azul de volume x, uma peça azul de volume x^2 e uma peça vermelha de volume x^2 na construção do prédio. Como o total de peças deve ser x^3+2 e já temos $x^3+x^2-x^2+x$ nesse edifício, sobrará $-x + 2$ para chegar num volume indicado pelo numerador $x^3 + 2$ da divisão:

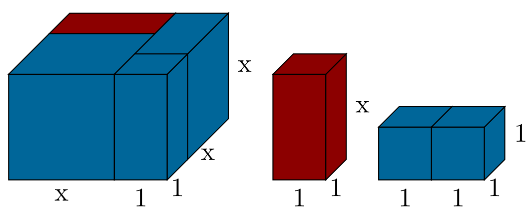


Figura 54: Prédios associados a $x^3 + x^2 - x^2 + x$, $-x$, $+2$, respectivamente.

Como a altura encontrada do prédio construído é igual à x e sobram duas peças de cor azul de volume 1 e uma peça vermelha de volume x. Temos que $\frac{x^3+2}{x^2+1} = x$ com resto $-x + 2$.

4.3. Condições sobre os polinômios para o jogo ser possível

Utilizando as peças apresentadas para efetuar as divisões por meio do jogo, devemos considerar algumas condições necessárias ao funcionamento do jogo ”Monte seu Prédio”. Como estamos trabalhando com peças de dimensões medindo 1 unidade ou x unidades, só poderemos efetuar operações em polinômios com coeficientes inteiros e o resultado dessa operação deverá ser um polinômio com coeficiente inteiro também. Vejamos os três tipos:

1. **Divisão de polinômio de grau 2 por um polinômio de grau 1**

Seja a divisão $\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ de um polinômio de grau 2 e por um de grau 1, efetuando-a pelo algoritmo de Euclides, temos:

$$\frac{ax^2+bx+c}{dx+c} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d} - \frac{ae}{d^2} \text{ e deixa resto } c + \frac{ae^2}{d^2} - \frac{be}{d}.$$

Como utilizaremos peças com medidas inteiras, é preciso que: $a, b, c, d, e, \frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{ae}{d^2}, \frac{ae^2}{d^2}, \frac{be}{d} \in \mathbb{Z}$.
Note que se $\frac{a}{d^2} \in \mathbb{Z}$, então $\frac{a}{d} \in \mathbb{Z}$, pois $\frac{a}{d} = \frac{a}{d^2}d$, e como as parcelas são inteiras o resultado será também.
E mais, $\frac{ea}{d^2} = e\frac{a}{d^2} \in \mathbb{Z}$ e $\frac{ae^2}{d^2} = e^2\frac{a}{d^2} \in \mathbb{Z}$. Falta apenas que $\frac{b}{d}$ e $\frac{be}{d}$ sejam inteiros também. Para isso, tome $\frac{b}{d} \in \mathbb{Z}$.
Logo, para representarmos geometricamente a divisão de polinômios em questão é suficiente que

$$a, b, c, d, e, \frac{a}{d^2}, \frac{b}{d} \in \mathbb{Z}.$$

Obviamente, escolheremos coeficientes pequenos por causa da limitação na quantidade de peças.

Exemplo 30. A divisão $\frac{x^2-1}{2x}$ não é possível ser realizada no jogo “monte seu prédio”. Esse é um caso onde as condições estabelecidas anteriormente não são satisfeitas. Veja que ela é do tipo 1, logo a altura do prédio deveria ser 2x. Contudo, temos apenas uma peça azul de volume x^2 e uma vermelha de volume 1, tornando inviável a montagem do prédio. Se resolvermos algebricamente, veremos que

$$\frac{x^2-1}{2x} = \frac{1}{2}x \text{ restando } -1.$$

O monômio com coeficientes não inteiros não é contemplado nesse jogo.

2. **Divisão de polinômio de grau 3 por um polinômio de grau 1:**

Para efetuarmos a divisão $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{mx+n}$ é preciso que todos os coeficientes sejam inteiros e mais, como:

$$\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{mx+n} = \frac{a}{m}x^2 + \left(\frac{b}{m} - \frac{an}{m^2}\right)x + \left(\frac{c}{m} - \frac{bn}{m^2} - \frac{an^2}{m^3}\right) \text{ e resto } d - \frac{cn}{m} + \frac{bn^2}{m^2} + \frac{an^3}{m^3},$$

é preciso que $\frac{a}{m}, \frac{b}{m}, \frac{an}{m^2}, \frac{c}{m}, \frac{bn}{m^2}, \frac{an^2}{m^3}, \frac{cn}{m}, \frac{bn^2}{m^2}, \frac{an^3}{m^3} \in \mathbb{Z}$.

As condições suficientes para que seja possível utilizar o jogo são que

$$\frac{a}{m^3}, \frac{b}{m^2}, \frac{c}{m} \in \mathbb{Z},$$

pois $\frac{a}{m} = m^2\frac{a}{m^3}$, $\frac{b}{m} = m\frac{b}{m^2}$, $\frac{an}{m^2} = nm\frac{a}{m^3}$, $\frac{bn}{m^2} = n\frac{b}{m^2}$, $\frac{an^2}{m^3} = n^2\frac{a}{m^3}$, $\frac{cn}{m} = n\frac{c}{m}$, $\frac{bn^2}{m^2} = n^2\frac{b}{m^2}$ e $\frac{an^3}{m^3} = n^3\frac{a}{m^3}$.

3. **Divisão de polinômio de grau 3 por um polinômio de grau 2:**

Para que a divisão $\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{mx^2+nx+p}$ seja realizada com o jogo é preciso que os coeficientes dos polinômios em questão sejam inteiros e mais, como:

$$\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{mx^2+nx+p} = \frac{a}{m}x + (\frac{b}{m} - \frac{an}{m^2})$$

com resto $(c - \frac{ap}{m} - \frac{bn}{m} + \frac{an^2}{m^2})x + d - \frac{bp}{m} - \frac{anp}{m^2}$, é preciso que todos os coeficientes sejam inteiros também, da mesma forma que foi feito nos outros casos, condições suficientes para que seja possível utilizar o jogo são que $\dfrac{a}{m^2}, \dfrac{b}{m} \in \mathbb{N}$.

O professor deverá selecionar polinômios, de acordo com as condições anteriores, para que se efetue a divisão usando o jogo, cada um dos três tipos deve ser contemplado. A quantidade de divisões dependerá de cada turma e desenvolvimento da atividade.

5. Considerações Finais

Espera-se que o jogo "Monte seu prédio"apresentado seja um facilitador do ensino e torne a aprendizagem significativa possibilitando ao aluno, bem como ao professor, manipular os objetos matemáticos e integrar a álgebra e a geometria.

Referências

[1] BOYER, Carl B. *História da matemática*, 1968.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018

[3] DAVIDOV, V.V. (1982). Tipos de generalización en la ensenanza. 2. reimpresión. Ciudad de La Habana, Editorial Pueblo y Educación.

[4] LORENZATO, Sérgio. *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*, 2012.

[5] MALUTA, Thais Pariz. *O Jogo nas Aulas de Matemática: Possibilidades e Limites.* Orientador: Profa. Dra. Cármen Lúcia Brancaglion Passos. 2007. TCC (Graduação) – Pedagogia, Departamento de Metodologia de Ensino, Universidade Federal de São Carlos. Disponível em URL: <https://livrozilla.com/doc/854135/o-jogo-nas-aulas-de-matem%C3%A1tica–possibilidades-e-limites>. Acesso em: 23 de Janeiro de 2021.

[6] MOREIRA, Marco Antônio (1999). *Aprendizagem significativa.* Brasília: Editora Universidade de Brasília.

[7] MOURA, M. O. *A séria busca no jogo: do Lúdico na Matemática.* Em: A Educação Matemática em Revista. São Paulo: SBEM– SP, 1994. 17-24 p.

[8] SILVA, Jairo José da. *Filosofias da matemática*, 2007.

[9] SILVA, Lucylla M. da. *Uma Abordagem Geométrica para Operações Básicas dos Polinômios de 1º, 2º e 3º Graus* Dissertação de Mestrado do PROFMAT, 2021.

Débora Borges Ferreira
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
<debora.borges@ufrn.br>

Lucylla Medeiros da Silva
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
<lucylla.medeiros@hotmail.com>

Recebido: 26/09/2023
Publicado: 15/12/2024