

Origamis: Arte e Matemática na construção dos “Cubos de Colombo” (*Columbus Cube*)

Luana Paula Goulart de Menezes 

Resumo

Arte e Matemática são áreas que possuem um grande potencial de interligação na construção do conhecimento. Com essa inspiração, este artigo apresenta possibilidades de discussão interdisciplinar que executamos em uma oficina sobre o Cubo de Colombo, um origami do tipo modular. Essa oficina foi realizada no âmbito do projeto de extensão Teoria e Investigação em Matemática Elementar (TIME), oferecido pelo departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM). Nosso objetivo é divulgar este trabalho, destacando aspectos interessantes de sua elaboração e execução.

Palavras-chave: Origamis; Geometria; Oficinas de Matemática; Interdisciplinaridade.

Abstract

Art and Mathematics are fields with great potential for interconnection in the construction of knowledge. With this inspiration, this article presents possibilities for interdisciplinary discussion that we implemented in a workshop on the Colombo Cube, a type of modular origami. This workshop was conducted as part of the extension project Theory and Investigation in Elementary Mathematics (TIME), offered by the Department of Mathematics at the State University of Maringá (UEM). Our goal is to share this work, highlighting interesting aspects of its development and execution.

Keywords: Origami; Geometry; Mathematics Workshops; Interdisciplinarity.

1. Introdução

Este artigo tem como objetivo apresentar as ideias e elementos de discussão que tivemos ao planejar e executar uma oficina realizada no âmbito do projeto Teoria e Investigação em Matemática Elementar (TIME), promovido pelo departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM). O referido projeto tem como foco o ensino da Matemática de forma investigativa, visando estabelecer um conhecimento mais sólido e, conseqüentemente, preparar os alunos para diversas olimpíadas de Matemática. Além de docentes efetivos e temporários da UEM e docentes do ensino básico, a equipe do TIME conta com integrantes discentes do curso de Matemática e, eventualmente, de outros cursos, como arquitetura. O número de alunos que participam das oficinas é variável, uma vez que não são obrigados a participarem e também não precisam estar necessariamente envolvidos em outras atividades do projeto para se inscreverem. Nesta oficina, em particular, tivemos 15 alunos participantes. Todavia, outras edições já chegaram a somar 30 participantes.

Os encontros do TIME ocorrem aos sábados, no período da manhã, e envolvem alunos do Ensino Médio e Fundamental. Uma vez por mês, são realizadas oficinas que têm como objetivo proporcionar uma experiência dinâmica e interdisciplinar. Entre os objetivos do projeto direcionado aos alunos participantes, destaca-se a divulgação do curso de Matemática e da profissão acadêmica, além de ampliar nos estudantes a capacidade de resolver problemas e desenvolver o pensamento crítico em matemática.

O programa, além de beneficiar diretamente os alunos, também tem como objetivo capacitar professores por meio de cursos certificados, permitindo que, em curto a médio prazo, possam implementar programas similares em suas próprias escolas e alcançar centenas de alunos. Isso contribuirá para uma maior disseminação dos aspectos mais belos, envolventes e desafiadores da Matemática, com destaque para a curiosidade científica, frequentemente obscurecida por uma educação excessivamente técnica e focada em processos seletivos.¹

Neste trabalho, contudo, o nosso foco é a realização de oficinas direcionadas aos discentes. Para a organização destas, que acontecem uma vez ao mês, temos as seguintes etapas:

1. planejamento e pesquisa de temas e conteúdos;
2. compra e organização de materiais;
3. elaboração de materiais teóricos de apoio à oficina com imagens, conteúdos, exemplos e exercícios.

Em síntese, neste artigo, apresentaremos os resultados da pesquisa realizada para o planejamento de uma oficina sobre a construção de cubos de origami. Descreveremos pontos importantes sobre as conexões com a matemática, bem como alguns aspectos relacionados à execução da oficina com os alunos.

2. A Geometria e os Cubos de Colombo

“A matemática está por toda parte” é uma frase que vez ou outra ouvimos de pessoas acadêmicas ou não acadêmicas. No entanto, não é incomum que as aulas sejam ministradas de forma excessivamente abstrata, o que muitas vezes dificulta o acesso ao conhecimento. No ensino de geometria, observamos que insistir em uma “[...] aula expositiva, utilizando a linguagem formal, sem envolver o aluno em atividades práticas, não permite que a maioria destes desenvolva conhecimentos que respondam às demandas de saberes matemáticos atuais-sejam formativos ou funcionais” ([12], p. 6).

Nessa perspectiva, é comum ouvirmos de diversos alunos, questões como: para que aprender matemática? Qual é o sentido de aprendermos fórmulas, se não existem aplicações no mundo real? Tais questões poderiam ser melhor esclarecidas se possibilitássemos aos alunos vivenciar, tocar, ver, comparar e experimentar as coisas que acontecem, isto é, quando se tornam os protagonistas de sua própria aprendizagem [14].

Como escreve [8], a construção de origamis pode proporcionar vários benefícios. Entre eles, podemos destacar a inspiração para os alunos conhecerem diferentes culturas, o estímulo ao desenvolvimento do senso estético na criação dos ornamentos de papel, a possibilidade de narração teatral usando origamis, o despertar da preocupação ecológica ao pensar em possíveis reaproveitamentos de papel, além de estimular a paciência, a socialização e “[. . .] também as habilidades motoras com uma ênfase no desenvolvimento da organização, na elaboração de sequências de atividades, na memorização de passos e coordenação motora fina do aluno.” ([8], p. 6).

¹Uma descrição sobre o projeto pode ser lida no site do departamento de matemática da universidade: <<https://dma.uem.br/projetos/time>> [3]. Acesso em: 12 de ago. de 2024.

Ao utilizar as dobraduras de papel podemos promover conexões entre conceitos abstratos e situações do dia a dia, pois a criação de cada dobradura exige a aplicação de estratégias geométricas para sua construção. Ademais, as dobraduras funcionam como um recurso didático que torna o processo de ensino-aprendizagem da matemática mais agradável e atraente para os alunos [13].

Visando uma abordagem diferenciada, as oficinas de matemática podem ser um ambiente rico na formação dos estudantes, uma vez que para adquirirmos uma compreensão completa de um conceito, não nos limitamos a memorizar uma definição, mas somos capazes de compreender várias facetas de seu significado. Desse modo, desenvolvemos a habilidade de relacioná-lo ao mundo real, de criar representações visuais e de aplicar essas ideias na resolução de problemas e, conseqüentemente, os alunos se tornam cada vez mais preparados e confiantes para participarem de olimpíadas de matemática.

Com isso em mente, ao escolher a geometria plana e espacial como tema, decidimos realizar uma oficina explorando origamis, não apenas como objetos em si, mas com o objetivo de construir figuras geométricas. Nossa primeira pesquisa nos levou aos bancos de imagem e vídeos na internet, onde descobrimos que é possível montar um cubo com origamis do tipo modular, ou seja, origamis que podem ser construídos em módulos para serem encaixados posteriormente. Racan e Giraffa (2012) escrevem que “Os Origamis tridimensionais, também conhecidos por Origamis estruturais, desenvolvem a percepção virtual e tridimensional dos objetos que são construídos, geralmente fundamentados em peças (módulos) encaixados”.

A palavra origami tem sua origem no japonês, com ‘ori’ significando dobrar e ‘kami’ significando papel ou Deus [8]. Tradicionalmente, os origamis são feitos sem o uso de cola ou tesoura em sua elaboração. Isso foi constatado no artigo [5], o qual recomendamos a leitura sobre a história dos origamis e reproduzimos aqui as condições iniciais de sua elaboração:

- Toma-se inicialmente uma folha de papel quadrada.
- As dobras e movimentos realizados não rasgam a folha.
- Não são realizados recortes, nem colagens na folha de papel.

Como pode ser observado na Figura 1, o cubo que escolhemos é totalmente montado com encaixes, isto é, não requer cola. Nessa figura, também é possível visualizar as linhas pontilhadas que representam as dobras que devem ser realizadas no papel, com setas indicando o sentido em que devem ser feitas.² A forma de montar tal cubo é surpreendentemente simples e foi elaborada por Paul Jackson [4], que é um artista profissional de origami, escritor e professor desde 1983.

Na nossa oficina, foi notória a admiração dos alunos ao montar esse cubo e inclusive uma das monitoras, graduanda em matemática, ficou impressionada com a facilidade dos encaixes.

²Para entender melhor o processo de construção recomendamos o vídeo gravado por Paul Jackson e que pode ser visto em <https://www.youtube.com/watch?v=ScQw_glWYkc&t=15s>. Acesso em 17 de ago. de 2024.

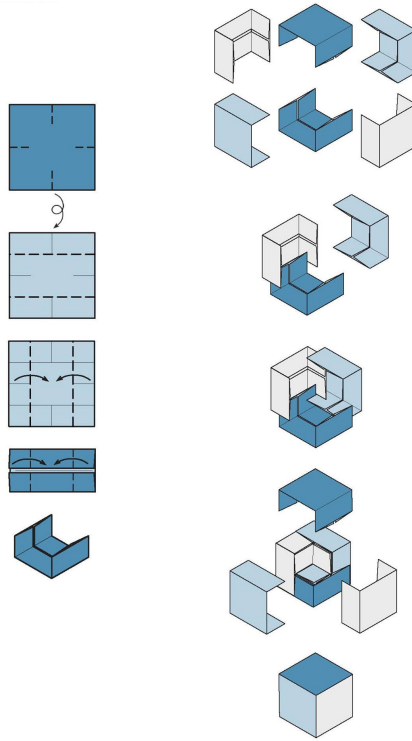


Figura 1: Cubo de Origami [6].

Ainda que fosse interessante, a oficina poderia ser mais elaborada do que a montagem do cubo. Em nossa pesquisa, descobrimos um tipo diferenciado de cubo que foi criado por David Mitchell [7]. Neste cubo, um dos vértices é empurrado para ‘dentro’. Devido a esta estética, conseguimos realizar empilhamentos desses cubos como mostra a Figura 2.

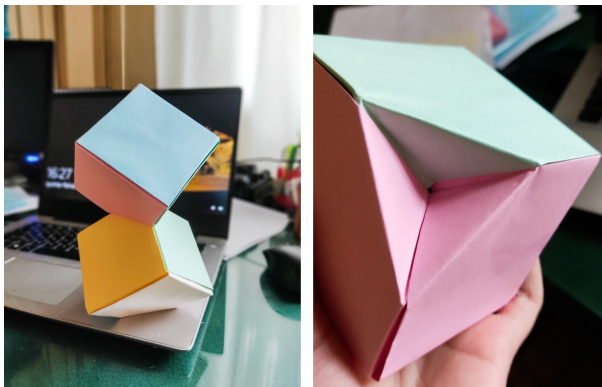


Figura 2: Cubo de Colombo.

Tal Cubo, denominado Cubo de Colombo recebe esse nome em alusão a uma história envolvendo Cristóvão Colombo [7]. Segundo essa história, durante um jantar organizado pelo Cardeal Mendoza, Colombo foi questionado se acreditava que outra pessoa poderia realizar o feito que ele realizou. De forma astuta, ele desafiou os presentes a fazerem um ovo fresco ficar em pé sobre uma superfície. Como ninguém conseguiu, ele revelou o segredo: quebrou levemente a casca do ovo em uma das extremidades, permitindo que ele se equilibrasse. Embora parecesse simples, alguém teve que executar a ideia, assim como, apesar do caminho para as Américas existir, alguém teve que conceber a ideia e outro teve que realizá-la (ver [2]).

Como podemos ver, o Cubo de Colombo pode ser equilibrado sobre uma superfície assim como o ovo da icônica história. Para montá-lo repetimos as dobras ilustradas na Figura 3.

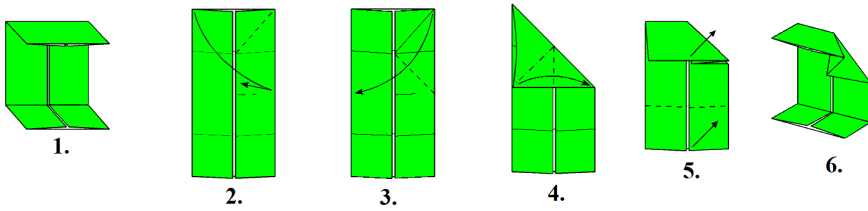


Figura 3: Dobradura dos módulos [7].

Após repetirmos os passos acima em três dos módulos, montamos o cubo como mostra a Figura 4.

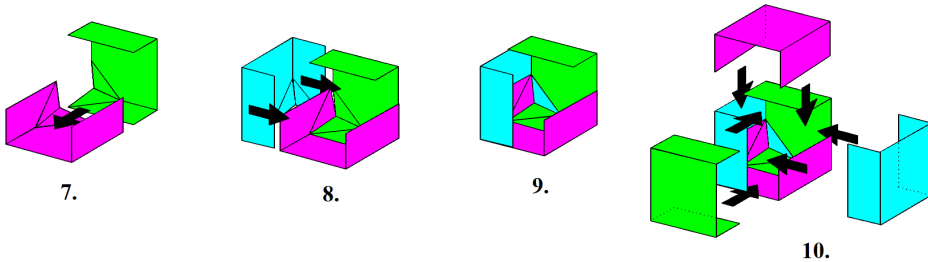


Figura 4: Montagem do Cubo de Colombo [7].

A montagem dos encaixes pode não ser trivial no início, porém, com um pouco mais de atenção, conseguimos montá-lo. Com este estudo sobre o cubo em mãos, adquirimos papéis para origami. Estes são folhas quadradas que podem ter qualquer comprimento de lado. Após a conclusão da tarefa de montar os cubos, passamos para a fase de explorar as conexões matemáticas que poderíamos fazer com o sólido, as quais explicaremos melhor na seção a seguir.

3. Geometria e origamis: possibilidades de discussão

Ao descobrirmos a existência do Cubo de Colombo, nossa primeira ideia de trabalho na oficina foi a definição de poliedro [1].

Definição 1: Um poliedro é a reunião de um número finito de polígonos, chamados de faces. É exigido que cada lado de um desses polígonos seja também lado de um, e apenas um, outro polígono e ainda que a

intersecção de duas faces distintas do sólido seja uma aresta comum, um vértice ou vazia. Os lados desses polígonos são chamados de arestas do poliedro e os seus vértices, de vértices do poliedro.

Essa definição não permite que sólidos que têm formas circulares sejam incluídos no conjunto de poliedros, tais quais as esferas e cones, por exemplo. E, também, não permite que sólidos do tipo abaixo (Figura 5) sejam incluídos.

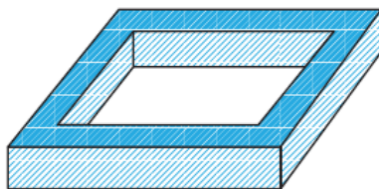


Figura 5: Um exemplo de sólido que não é um poliedro [1].

Porém, com uma modificação de dividir a região de cima entre os dois retângulos em quadriláteros, temos um poliedro.

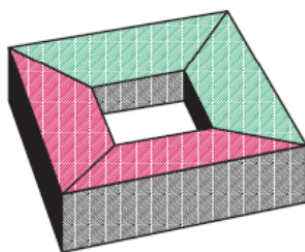


Figura 6: Um exemplo de sólido que é um poliedro [1].

Para melhorar a discussão sobre esse assunto, trouxemos representações de sólidos geométricos. Durante a oficina, trabalhamos com esses sólidos, enquanto os alunos discutiam entre si quais das peças eram ou não poliedros e alguns outros exemplos que são apresentados em [1]. Os sólidos apresentados aos alunos geraram várias discussões sobre a identificação do formato das faces, o número de arestas e vértices, além das características que podem ser observadas visualmente em certos sólidos, como o ilustrado na Figura 5. Note que a face mais escura não é um polígono, mas sim a área delimitada entre dois retângulos. Os alunos conseguiram identificar essas características e, inclusive, fazer desenhos dessas figuras em seus cadernos.

A capacidade de representar em perspectiva e desenvolver habilidades artísticas é de suma importância. Observamos claramente, na prática, a relevância da visualização na aprendizagem de geometria, seja por meio das imagens nos slides ou do manuseio de sólidos geométricos. Vale ressaltar que participaram da oficina alunos do ensino fundamental e médio, que trocaram informações sobre conceitos e discutiram suas opiniões sobre a classificação dos sólidos. Posteriormente, após construirmos o cubo de Paul Jackson e o Cubo de Colombo, os alunos ficaram curiosos se era possível realizar a construção de outros sólidos. Na oficina deste dia não foi possível construir outros tipos, mas podemos encontrar a construção de vários outros sólidos em livros e sites na internet. Também não podemos esquecer que existem artistas na área que criam origamis e vez ou outra novas ideias de construções podem ser encontradas.

Outras definições interessantes que discutimos no projeto foi a definição de poliedro *convexo* e *regular* [1]:

Definição 2: Um poliedro é dito *convexo* se quaisquer dois pontos escolhidos no seu interior podem ser ligados por um segmento de reta que também esteja totalmente no interior do poliedro.

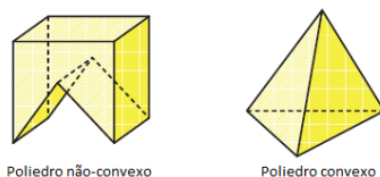


Figura 7: Exemplos de poliedros na discussão de convexidade [1].

Outra definição interessante que discutimos na oficina foi acerca dos poliedros regulares. Os poliedros regulares são abordados no *Timeu* de Platão. Em tal escrito lemos sobre a associação entre eles e os cinco elementos da natureza, sendo: o Tetraedro com o elemento de origem do Fogo, o Cubo com a Terra, o Octaedro com o Ar, o Icosaedro com a Água e o Dodecaedro como representante da imagem do Universo: “visto que havia ainda uma quinta combinação, o deus utilizou-a para pintar animais no universo” (ver [10], p. 144).

Definição 3: Um poliedro é dito *regular* se todas as faces são polígonos regulares iguais e todos os vértices sejam incidentes ao mesmo número de arestas.

Para qualquer poliedro convexo cujas faces são polígonos planos e não cruzam umas às outras é válida a relação de Euler, que é uma fórmula matemática que relaciona os números de vértices, arestas e faces, dada pela seguinte expressão:

$$V - A + F = 2$$

A partir dessas ideias, propomos aos alunos participantes da oficina as seguintes questões:

1. O Cubo de Colombo é convexo?
2. A Relação de Euler nesse cubo é válida? Faça a contagem do número de arestas, vértices e faces para verificar numericamente.
3. Determine a área total do cubo de colombo que você construiu. Que estratégia você usaria para calcular o volume?
4. Junte com seus colegas e construa empilhamentos criativos dos cubos de colombo.

Os alunos ficaram empolgados com as questões e as possibilidades de empilhamento e organização dos Cubos de Colombo. Vários deles até mencionaram que pretendiam utilizar os Cubos como decoração para seus quartos ou mesas de estudo. É muito interessante observar o empenho que uma oficina como essa, que traz algo concreto para o aprendizado, pode promover.

Edgard Pimentel escreve em um artigo publicado no site do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) que “A matemática tem inspirado e favorecido a arte. Perspectiva, proporção e simetria, por exemplo, são fundamentais nas artes plásticas”[9]. Ao nosso ver, a arte também pode inspirar a matemática e até mesmo o seu ensino, como pudemos constatar na oficina. A possibilidade de organizar os cubos, construí-los e explorar um pouco da matemática durante sua criação pode estimular perguntas e criatividade nos alunos.

Na Figura 8, por exemplo, ilustramos alguns dos empilhamentos e organização dos Cubos de Colombo realizados pelos alunos.

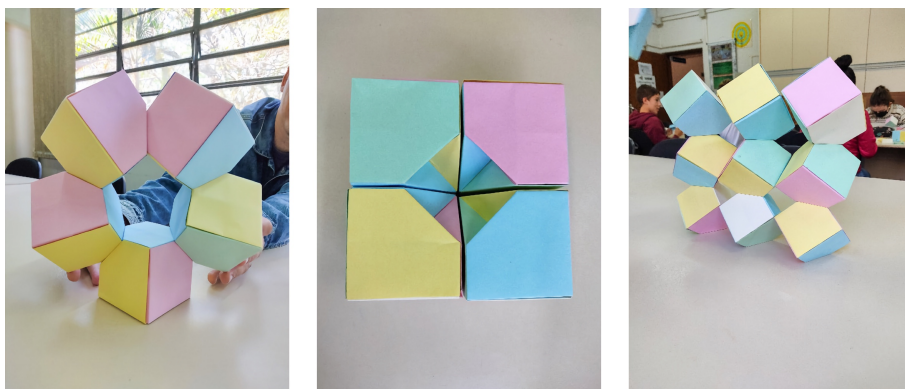


Figura 8: Empilhamentos e organização dos cubos durante a oficina.

Também gostaríamos de destacar que no planejamento da oficina, registramos que envolveríamos os alunos em discussões sobre ângulos, planos, paralelismo, retas e, automaticamente, no decorrer da oficina, os próprios alunos foram desenvolvendo tais conceitos, sendo que os maiores sempre iam auxiliando os menores na construção dessas noções. Como lemos em [11] (p.6-7), “As atividades lúdicas são aquelas que proporcionam prazer por meio das ações que mobilizam quem delas participa. Assim, os estudantes aprendem brincando, de uma maneira agradável, ao mesmo tempo em que desenvolvem aspectos cognitivos, afetivos e motores”.

A exploração geométrica que é possível ser feita com o Origami utiliza conceitos básicos relacionados a ângulos, planos, vértices, paralelismo, semelhança de figuras, entre outros, as noções de proporcionalidade, frações, aritmética, álgebra e funções, são fortemente evidenciadas nesta prática.

Em suma, a investigação exploratória para definir o que é um poliedro convexo, incentivada pelo material manipulativo Cubo de Colombo, gerou uma discussão dinâmica na qual os alunos foram instigados a perceber que a matemática não está pronta e acabada, distante de sua realidade, mas sim algo construído por intermédio do bom senso, da intuição e de acordos com a comunidade matemática. Esse tipo de desconstrução é um dos fundamentos da metodologia adotada pelo projeto do TIME, permitindo que até mesmo um aluno do ensino básico tenha a experiência de conduzir uma pesquisa em matemática, conjecturando, testando, refutando e reformulando suas hipóteses.

No final da oficina, apresentamos um sólido que seria possível obter ‘empurrando’ todos os vértices para dentro, conforme mostrado na Figura 9. Este sólido é chamado de *cuboctaedro*, que consiste em um poliedro com 8 faces triangulares e 6 faces quadrangulares. Apesar de termos mostrado aos alunos essa possibilidade, não tínhamos tentado construir esse sólido em origami. Uma aluna solicitou se poderíamos fornecer algumas folhas de papel usados na oficina para que ela pudesse tentar em casa. Surpreendentemente, ela conseguiu e nos enviou uma mensagem orgulhosa pelo feito.



Figura 9: Cuboctaedro em origami construído por uma aluna da oficina.

4. Considerações Finais

Este artigo teve como objetivo divulgar um dos trabalhos realizados nas oficinas do projeto de extensão TIME (UEM). É inegável que oficinas como esta podem despertar a curiosidade e a criatividade dos alunos em relação à arte e à matemática. Inclusive, vários estudantes expressaram que esta foi uma das melhores oficinas oferecidas no projeto até aquele momento.

Convém lembrarmos que não necessariamente nosso objetivo com as oficinas é o preparo para as olimpíadas como ocorre nos demais sábados do projeto, porém gostaríamos de frisar que a apropriação de conceitos, a estimulação da criatividade e capacidade de visualização geométrica com auxílio de itens como origamis são de suma importância, uma vez que criam possibilidades na elaboração de estratégias diante de problemas matemáticos. Como diz o origamista japonês Tomoko Fuse: “Todo origami começa quando pomos as mãos em movimento. Há uma grande diferença entre conhecer alguma coisa através da mente e conhecer a mesma coisa através do tato.” (ver [8], p. 17).

Esperamos que este trabalho possa ser lido e sirva de inspiração para que professores de matemática possam reproduzir essa oficina em suas aulas, tornando o ensino da matemática mais dinâmico e prazeroso. Além disso, pretendemos continuar com a divulgação e discussão do trabalho do TIME acerca de diferentes oficinas, em especial, as que envolvam a construção de materiais e suas conexões com a matemática. Acreditamos firmemente que projetos de extensão e a divulgação de seus resultados em eventos e artigos científicos podem ser meios de grande contribuição para um ensino de maior qualidade e uma aprendizagem significativa.

Referências

- [1] Barichello, L. *O que é poliedro?*, Campinas. Disponível em: <<https://m3.ime.unicamp.br/arquivos/1296/poliedro-guia.pdf>>. Acesso em: 7 de maio 2024.
- [2] Carter, K. C. *Childbed Fever: A Scientific Biography Of Ignaz Semmelweis*. [s.l.] Transaction Publishers, [s.d.].
- [3] Ferraiol, T. F. *Sobre o TIME*. Disponível em: <<https://dma.uem.br/projetos/time>>. Acesso em: 12 ago. 2024.
- [4] Jackson, P. *How to build an origami tower with cubes*. 2019. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=ScQw_glWYkc&t=15s>. Acesso em: 17 ago. 2024.
- [5] Kozakevicius, A.; Kulesza, M. Estudando funções e algoritmos por meio de origamis. *Revista Professor de Matemática Online*, v. 12, n. 7, 2024.

- [6] Lam, T. K.; Pope, S. *Learning Mathematics with Origami*. Association of Teachers of Mathematics (ATM), UK, 2016.
- [7] Mitchell, D. *Columbus Cubes*. Disponível em: <<http://www.origamiheaven.com/pdfs/columbus.pdf>>, Acesso em: 20 de mar. de 2024.
- [8] Oliveira, F. F. *Origami: Matemática e Sentimento*. 2004. Disponível em <https://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Artigos/Origami_Matemática%20e%20Sentimento.pdf>. Acesso em: 20 de jun. de 2024.
- [9] Pimentel, E. *A influência mútua que existe entre arte e matemática*. Disponível em: <<https://impa.br/noticias/a-influencia-mutua-entre-arte-e-matematica/>>, Acesso em: 15 de mar. de 2024.
- [10] Platão. *Timeu - Crítias* (tradução do grego, introdução, notas e índices: Rodolfo Lopes). Coimbra: Centro de Estudos Clássicos e Humanísticos. Universidade de Coimbra, 2011. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/363788/mod_resource/content/0/Platão%20C3%A3o_Timeu-%20Completo.pdf>. Acesso em: 17 ago. 2024.
- [11] Rancan, G.; Giraffa, L. M. M. *Geometria com Origami: Incentivando futuros professores*. 2012. Disponível em: <https://meriva.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/8688/2/GEOMETRIA_COM_ORIGAMI_INCENTIVANDO_FUTUROS_PROFESSORES.pdf>. Acesso em: 18 ago. 2024.
- [12] Rêgo, R. G; Rêgo, R. M; Vieira, K. M. *Laboratório de ensino de geometria*. Campinas, São Paulo: Autores associados, 2012.
- [13] Reis, E. M.; Medeiro filho, D. A. M. *Origami e Geometria*. [s.d.].
- [14] Santos, J. A. V.; Cunha, D. S. O uso do laboratório no ensino da Matemática: Desafios e possibilidades encontradas pelos professores em suas práticas pedagógicas. *Revista Educação Pública*, v. 21, nº 41, 16 de novembro de 2021.

Luana Paula Goulart de Menezes
Instituto Federal do Paraná
<luana.menezes@ifpr.edu.br>

Recebido: 26/05/2024

Publicado: 02/12/2024