PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.12, n.4, 2024
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2024/pmo1236

Existência de soluções do jogo Círculo Zero para peças restritas a subconjuntos dos inteiros com e sem o zero

Diego Soares Monteiro   Daniel Cunha   Natália Pedroza   Rasec Almeida

Resumo

Este artigo tem como objetivo investigar a existência de soluções para o jogo educativo "Círculo Zero" quando as peças são restritas a subconjuntos específicos de números inteiros. Além de propor a integração do aspecto lúdico e as investigações matemáticas ao ambiente pedagógico, o trabalho visa, também, destacar a pesquisa experimental em matemática como uma ferramenta enriquecedora para ensino de matemática. Através de uma abordagem quantitativa, mostra-se, pela implementação de algoritmos: de exaustão e combinado, que a existência de soluções é, diretamente, impactada pela retirada do elemento neutro da adição e pela hipótese de bijeção entre o número de peças e o número de regiões do jogo. O processo investigativo e o uso do computador são fundamentais para o desenvolvimento desse trabalho, permitindo criar e refutar conjecturas, além de realizar provas assistidas por computador.

Palavras-chave: Círculo Zero; Ludicidade; Investigação Matemática; Demonstração Assistida por Computador; Matemática Experimental.

Abstract

This article aims to investigate the existence of solutions for the educational game "Círculo Zero" when the pieces are restricted to specific subsets of integers. In addition to proposing the integration of playful aspects and mathematical investigations into the educational environment, the work also seeks to highlight experimental research in mathematics as a valuable tool for teaching the subject. Through a quantitative approach, it is demonstrated, via the implementation of exhaustion and combined algorithms, that the existence of solutions is directly impacted by the removal of the additive identity element and the assumption of a bijection between the number of pieces and the number of regions in the game. The investigative process and the use of computers are fundamental to the development of this work, allowing for the creation and refutation of conjectures, as well as the execution of computer-assisted proofs.

Keywords: Circle Zero. Mathematical Investigation. Computer Aided Demonstration. Experimental Mathematics.

1. Introdução

O objetivo desse artigo é estudar a existência de soluções para uma adaptação do jogo educativo "Círculo Zero" por meio de recursos computacionais e demonstrar a validade de nossos resultados a partir de elementos de Álgebra. O computador é parte essencial para a realização desta pesquisa, permitindo criar

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

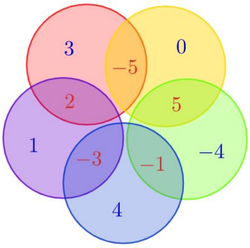
cenários de investigações, conjecturas e até mesmo demonstrações assistidas por computador para algumas proposições. Destacamos que o jogo, ou adaptações dele, pode ser aplicado em diferentes níveis de ensino, desde o ensino fundamental I até o nível superior. A possibilidade de utilização no nível superior é destacada neste trabalho ao utilizarmos a Teoria dos Grupos para definirmos formalmente soluções equivalentes do jogo Círculo Zero.

A motivação para esta pesquisa ocorre a partir de um evento no qual os autores conduziram a aplicação do jogo Círculo Zero com seus estudantes. Durante esse evento, um dos autores desafiou os demais a encontrar uma solução para configurações de círculos específicas, acompanhadas de um conjunto de números determinado por ele, tendo já a intuição de que tal solução seria inalcançável. Em consonância com a assertiva de [6][1], que postula que "a matemática não se restringe a um mero jogo mecânico de fórmulas isoladas, reconhecendo que a intuição domina na gênese das descobertas", ([6], p. 227), nenhum dos autores logrou êxito na execução da tarefa proposta, o que corroborou a suspeita inicial de que, de fato, a solução buscada não era factível.

Posteriormente, impelidos pelo instinto inerente à prática matemática, nos lançamos ao desafio de demonstrar a inexistência de solução para o referido problema. O jogo em questão, constituído por 5 círculos e 10 regiões a serem preenchidas com um conjunto de 10 números, possui um total de $10! = 3.628.800$ possíveis configurações a serem investigadas. Diante da magnitude desse universo de possibilidades, recorremos à programação para realizar diferentes demonstrações.

De maneira informal, o Círculo Zero pode ser concebido como um jogo de tabuleiro circular do tipo quebra-cabeça, composto por n círculos que se intersectam dois a dois. O objetivo é posicionar, em cada círculo, três peças identificadas por números inteiros, provenientes de um conjunto previamente definido, de modo que a soma desses três números resulte em zero. Um exemplo com solução para Círculo Zero com 5 círculos está descrito na Figura 1.

Figura 1: Uma solução do Círculo Zero com 5 círculos



Em nossas pesquisas, encontramos trabalhos escritos que mencionam o jogo Círculo Zero (ver [9, 16, 15]), além de tê-lo encontrado também em vídeo, no canal do Rioeduca na TV, e de ser possível jogá-lo on-line[2]. Jogos como o Círculo Zero possibilitam o desenvolvimento da habilidade de adição e subtração de inteiros de forma lúdica, apresentando ao aluno um novo caminho à aprendizagem destes conceitos. Além disso, exploram a ideia de número negativo e positivo podendo ser relevantes para consolidação de significados dos inteiros (ver [15]).

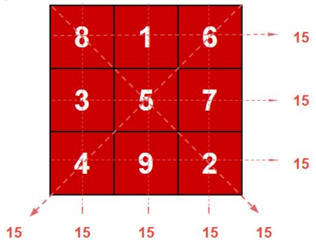
Uma atividade lúdica de natureza similar ao Círculo Zero, porém mais conhecida e frequentemente encontrada nos livros didáticos, é o quadrado mágico, que está entre as formas mais antigas e populares de

[1]Nicolas Bourbaki é um pseudônimo utilizado por um grupo de matemáticos franceses, que escreveram uma série de livros de matemática de forma sistematizada e rigorosa. O grupo foi fundado na década de 1930, ainda hoje outros membros dão continuidade ao trabalho.

[2]National Library of Virtual Manipulatives

recreações matemáticas ([7]). Um quadrado mágico puro de ordem n pode ser definido como uma matriz $n \times n$ construída com os números $1, 2, 3, \cdots, n^2$ de tal forma que a soma dos números em cada linha, coluna e em cada uma das duas diagonais é o mesmo número S, chamado de soma mágica do quadrado mágico (ver [7, 10]). A Figura 2 é um exemplo de solução para quadrado mágico de ordem 3 com soma mágica 15.

Figura 2: Quadrado Mágico 3×3



Note que, no quadrado mágico puro, a quantidade de números a serem dispostos na matriz de ordem n está restrita a um subconjunto de números positivos, que estabelece uma bijeção com o número de entradas da matriz.

Diferentemente do quadrado mágico puro, em que existe uma relação de bijeção entre números (peças) e entradas da matriz, nos exemplos encontrados na literatura para o Círculo Zero, habitualmente, é fornecida uma quantidade de peças maior que a de regiões, onde devem ser dispostas as peças associadas a números, além de outras variações.

Dessarte, no presente artigo, propomos uma adaptação do jogo Círculo Zero, tornando-as análogas as restrições propostas para o quadrado mágico puro e levantamos alguns questionamentos: i) "Fornecendo ao jogador do Círculo Zero um conjunto de peças com cardinalidade igual ao número de regiões do tabuleiro, ele sempre encontrará solução?" e ii) "Se excluirmos a peça associada ao 0, que é elemento neutro da adição, ele sempre obterá solução?".

Ao estabelecermos uma bijeção entre as peças numeradas e as regiões do tabuleiro no jogo Círculo Zero, podemos ver um impacto significativo no jogo. A bijetividade influencia, diretamente, na distribuição das peças, na busca e verificação da existência por soluções válidas. Outrossim, a retirada da peça associada ao elemento neutro da adição restringe uma jogada bastante utilizada pelos alunos, que é a combinação do 0 com dois elementros simétricos entre si.

Organizamos o texto nas seguintes seções: i) Fundamentação teórica onde serão articuladas as ideias acerca de ludicidade, investigações matemáticas e tecnologias digitais em sala de aula, refletindo sobre a importância da utilização dos recursos computacionais para os processos de investigação de soluções e provas matemáticas. ii) Aspectos metodológicos. iii) Resultados onde apresentamos os algoritmos e justificativas matemáticas para os métodos implementados juntamente com os pseudocódigos utilizados para obter os resultados. iv) Segunda parte dos resultados com a apresentação de provas que validam os resultados obtidos computacionalmente.

2. Fundamentação teórica

A ludicidade desempenha um papel significativo no processo educacional, especialmente no ensino da matemática por meio de jogos, os quais podem oferecer oportunidades para os alunos aplicarem habilidades matemáticas em situações contextualizadas, incentivando o raciocínio lógico, a resolução de problemas e a tomada de decisões. A partir de um jogo, é possivel realizar diversos questionamentos e consequentes investigações. Segundo [14] ,

> *Numa investigação matemática, parte-se de uma questão muito geral ou de um conjunto de informações pouco estruturadas a partir das quais se procura formular uma questão mais precisa e sobre ela produzir diversas conjecturas. [...] Neste processo, por vezes formulam-se novas questões e abandonam-se, em parte ou no todo, as questões iniciais. As conjecturas que resistirem a vários testes vão ganhando credibilidade, estimulando a realização de uma prova que, se for conseguida, lhes conferirá validade matemática ([14], p. 2).*

De acordo com [13], durante uma atividade investigativa, espera-se que o aluno trabalhe de maneira produtiva, "formulando questões, representando a informação dada, ensaiando e testando conjecturas e procurando justificá-las". Essa abordagem enfatiza não apenas a resolução de problemas, mas também o processo de investigação em si, promovendo uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos e desenvolvendo habilidades de raciocínio crítico entre os alunos.

Pesquisas como as de [4] destacam a importância de abordagens de ensino que enfatizam a resolução de problemas e a investigação como estratégias eficazes para promover a proficiência matemática dos alunos. Ao fornecer oportunidades para se explorar questões abertas e construir argumentos matemáticos, as investigações matemáticas não apenas enriquecem a experiência de aprendizagem, mas também ajudam os alunos a pensar criticamente e resolver problemas.

Por vezes, tais investigações podem envolver problemas matemáticos que desafiam a demonstração direta, levando à utilização de recursos computacionais como uma forma de auxílio na demonstração. Demonstrações assistidas por computador representam uma abordagem recente se pensarmos na história da matemática, permitindo aos matemáticos explorar e verificar passagens em demonstrações de maneira mais eficiente e detalhada. Como destacado por [3] ,

> *O computador pode servir ao matemático na verificação de passagens em demonstrações matemáticas. Ele é capaz de oferecer ferramentas de cálculos, resoluções, simulações, explorações e esboços, por exemplo. Ele, o computador, é importante para o trabalho do matemático se tomado como ferramenta que pode ser utilizada nesse processo de demonstração, no entanto, para ser utilizado precisa ser programado pelo próprio homem para fazer operações localizadas nas partes da argumentação da demonstração* ([3], p. 207).

O computador auxilia na realização das demonstrações, executando uma sequência de instruções pré-definidas que escolhem, em cada momento, as alternativas que satisfazem os resultados dos passos anteriores (ver [12]). Portanto, se faz necessária a colaboração entre o pesquisador e o computador. Essa interação reflete a complexidade do processo de demonstração matemática, onde o computador atua como um verificador de exaustivos cálculos matemáticos e lógicos, contribuindo para a produção de verdades matemáticas ([3], p. 208). Embora o computador possa realizar algumas partes da resolução de um problema de forma mais eficiente do que o ser humano, "a intuição de um matemático é essencial e não substituível por nenhum programa de computador" ([2]). Portanto, o que o computador pode fazer pelo matemático no processo de demonstração é determinado pelo próprio matemático, que programa o computador para realizar operações específicas de acordo com seu conhecimento científico, intuição e criatividade (ver [3]).

A combinação da ludicidade, investigações matemáticas e demonstração assistida por computador proporcionam um ambiente de aprendizagem dinâmico, promovendo o desenvolvimento de habilidades matemáticas e competências cognitivas. Ao integrar esses aspectos, é possível enriquecer a experiência educacional dos alunos e dos docentes.

3. Aspectos Metodológicos

Os resultados do presente estudo foram obtidos por meio de uma pesquisa experimental em matemática. A matemática experimental representa uma abordagem que utiliza a tecnologia computacional em investigações matemáticas a fim de identificar estruturas e padrões fundamentais.

Segundo [5], a matemática experimental é uma metodologia de pesquisa em matemática que inclui o uso de computação para: ,

> *1. Adquirir conhecimento e intuição. 2. Descobrir novos padrões e relacionamentos. 3. Utilizar apresentações gráficas para sugerir princípios matemáticos subjacentes. 4. Testar e especialmente falsificar conjecturas. 5. Explorar um possível resultado para ver se vale a pena uma prova formal. 6. Sugestão de abordagens para uma prova formal. 7. Substituir derivações manuais longas por derivações baseadas em computador. 8. Confirmação de resultados derivados analiticamente* ([5], p. 2-3).

Note que as atividades mencionadas têm uma semelhança notável com o papel da experimentação laboratorial nas ciências da natureza. Especificamente, elas refletem o conceito de experimentação por meio de computadores. Vale ressaltar que um dos principais benefícios dessa abordagem é sua capacidade de refutar conjecturas. Um único exemplo computacional pode economizar um tempo considerável que de outra forma seria gasto na tentativa de provar noções incorretas.

Esta pesquisa está concentrada na verificação de existência de soluções do jogo educativo Círculo Zero, considerando dois cenários possíveis de valores para as peças do jogo. Para nossas investigações utilizamos Python e MATLAB como linguagens de programção e MAPLE para produzir uma prova assistida por computador.

3.1. Modelando o Círculo Zero por meio de equações diofantinas lineares com restrições

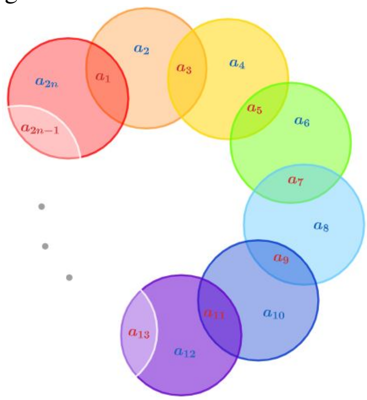
Definição 1. Considere $n \geq 3$ círculos indistinguíveis, que se intersectam dois a dois, conforme Figura 3, e geometricamente definem $2n$ regiões conexas. O jogo Círculo Zero, consiste em colocar $2n$ *peças*, associadas a um dado conjunto $A_n = \{-n, -(n-1), \cdots, n-1, n\} \subset \mathbb{Z}$, de tal forma que cada região receba uma única peça distinta das demais e que a soma dos valores das três peças em cada círculo resulte em zero.

A sequência $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}) \in \mathbb{Z}^{2n}$ é uma solução do Círculo Zero se satisfaz o sistema de equações diofantinas:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = & 0 \\ a_3 + a_4 + a_5 = & 0 \\ \vdots & \\ a_{2n-3} + a_{2n-2} + a_{2n-1} = & 0 \\ a_{2n-1} + a_{2n} + a_1 = & 0 \end{cases} \tag{1}$$

com as restrições de: $a_i \in A_n$ e $a_i \neq a_j$, para $i, j \in \{1, \cdots, 2n\}$ com $i < j$.

Figura 3: Círculo Zero com n círculos



A definição apresentada acima de solução do jogo Círculo Zero por meio da sequência a, não considera a natureza cíclica do jogo, isto é, o fato dos n círculos serem indistinguíveis, além de não considerar orientação: sentido horário e anti-horário. Assim, destacamos que ao considerarmos as rotações do tabuleiro, sequências distintas podem representar a mesma solução para o problema. Chamamos esses casos de “soluções equivalentes”, definidas a seguir.

Da Teoria de Grupos [8], temos que,

Definição 2. Dado um conjunto X não-vazio, uma bijeção $\sigma : X \to X$ é denominada uma permutação do conjunto X.

S_n denota o conjunto, de cardinalidade n, de todas as permutações do conjunto X.

Se $\sigma \in S_n$ e $1 \leq j \leq n$, a notação $\sigma(a_j)$ denota o valor da função bijetiva σ no ponto $a_j \in X$. Desta forma, podemos denotar a permutação σ pelo seguinte diagrama:

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{2n} \\ \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \cdots & \sigma(a_{2n}) \end{pmatrix}$$

exibindo visualmente o domínio e o contradomínio da bijeção σ considerada.

Dadas as permutações:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{2n-2} & a_{2n-1} & a_{2n} \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_{2n} & a_1 & a_2 \end{pmatrix} \text{ e } \sigma_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{2n-2} & a_{2n-1} & a_{2n} \\ a_1 & a_{2n} & a_{2n-1} & \cdots & a_4 & a_3 & a_2 \end{pmatrix},$$

podemos definir que, uma solução $a = (a_1, a_2, \cdots, a_{2n})$ é equivalente a uma solução $c = (c_1, c_2, \cdots, c_{2n})$ se, c é obtida a partir de a através da(s) permutação(ões):

$$\sigma_1^m(a) = \underbrace{\sigma_1 \circ (\sigma_1 \circ (\cdots \circ (\sigma_1(a)) \cdots))}_{m \text{ vezes}} = c, \; \textit{para algum } 0 \leq m \leq n-1,$$

seguida ou não da permutação: $\sigma_2(\sigma_1^m(a)) = c$.

Por exemplo, considere a solução $a = (-5, 0, 5, -4, -1, 4, -3, 1, 2, 3)$ do Círculo Zero com 5 círculos. Geramos outras cinco soluções iguais ilustradas na Figura 4, fazendo as seguintes permutações:

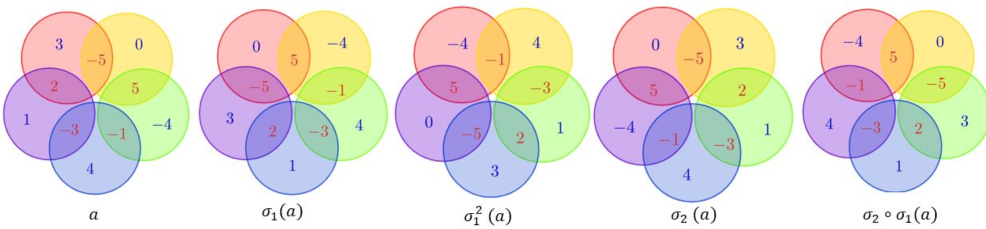
$$\sigma_1(a) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 & -4 & -1 & 4 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & -1 & 4 & -3 & 1 & 2 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1^2(a) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 & -4 & -1 & 4 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -3 & 1 & 2 & 3 & -5 & 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2(a) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 & -4 & -1 & 4 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & 2 & 1 & -3 & 4 & -1 & -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 \circ \sigma_1(a) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 & -4 & -1 & 4 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -5 & 3 & 2 & 1 & -3 & 4 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Figura 4: Exemplos de soluções consideradas equivalentes para $n = 5$



Diversas soluções do jogo Círculo Zero são representantes de uma única classe de equivalência de soluções, conforme Figura 4. Duas soluções que não pertencem a mesma classe de equivalência são ditas distintas.

3.2. Existência de soluções

Habitualmente, um processo de matematização análogo ao da subseção 3.1 é utilizado para a modelagem do quadrado mágico de ordem n, em que se obtém um sistema com $(2n+2)$ equações diofantinas. Comumente, no quadrado mágico puro, investigam-se a existência e multiplicidade de soluções para as incógnitas do sistema sujeitas a restrição de pertencerem a um certo conjunto: $\{1, 2, 3, ..., n^2\}$ que está em bijeção com o número de entradas da matriz (ver [7, 10]).

De forma semelhante, desejamos estudar a existência de soluções para o Círculo Zero impondo restrições as incógnitas do sistema 1 em dois casos. No primeiro caso, as restrições já estão presentes na definição 1 e são aquelas mais usualmente encontradas na literatura ([9, 15, 16]). No segundo, impomos uma restrição a mais: as incógnitas pertencem ao conjunto $A_n \backslash \{0\} = \{-n, -(n-1), \cdots, -2, -1, 1, 2, \cdots, n-1, n\}$. Neste último caso, a restrição imposta torna possível estabelecer uma bijeção entre o número de regiões e o número de peças, estando em consonância com o questionamento proposto por um dos autores e com as práticas comuns de investigações de existência de soluções no quadrado mágico puro.

Sem as restrições, o sistema 1 possui a solução trivial $(0, 0, \ldots, 0, 0) \in \mathbb{Z}^{2n}$, dentre as soluções possíveis. Contudo, mediante as restrições impostas, verificar a existência ou não de solução pode não ser tão direta assim [1], para responder a estas perguntas recorremos a implementação de algoritmos.

4. Algoritmos e resultados

4.1. Método de exaustão

O primeiro algoritmo de estudo utiliza o método da exaustão. Tendo como base os elementos do conjunto A_n, construímos todas as sequências possíveis de $\mathbb{Z}^{2n}$ formada pelos elementos de A_n por meio das 2n-permutações dos $(2n+1)$ elementos de A_n, $P(A_n, 2n)$ (Brualdi, 2009).

$$P(A_n, 2n) = \frac{(2n+1)!}{(2n+1-2n)!} = (2n+1)!$$

O Algoritmo 1 verifica quais sequências satisfazem o sistema (1) e as restrições impostas as incógnitas na definição 1.

Algoritmo 1: Método de exaustão

---

dados: $n \geq 3$**,** A_n
início
  MatrizPermutacoes $\leftarrow$ Permutacoes$(A_n, 2n)$;
  Solucoes $\leftarrow$ [ ] ;
  para *cadaLinha em MatrizPermutacoes* **faça**
    se $(\text{cadaLinha}[1] + \text{cadaLinha}[2] + \text{cadaLinha}[3] == 0$ **e**
      $\text{cadaLinha}[3] + \text{cadaLinha}[4] + \text{cadaLinha}[5] == 0$ **e**
      $\vdots$
      $\text{cadaLinha}[2n-3] + \text{cadaLinha}[2n-2] + \text{cadaLinha}[2n-1] == 0$ **e**
      $\text{cadaLinha}[2n-1] + \text{cadaLinha}[2n] + \text{cadaLinha}[1] == 0)$ **então**
      Adicione cadaLinha à Solucoes
  imprima *Solucoes*
fim

Outrossim, o Algoritmo 1 pode ser usado para verificar a existência de soluções para o segundo caso (as incógnitas pertencem a $A_n \backslash \{0\}$), seja como subconjunto do conjunto solução do primeiro caso, seja por construção das $2n!$ permutações dos elementos de $A_n \backslash \{0\}$.

O método da exaustão, nos permite verificar a existência ou não de soluções para os dois cenários desejados, entretanto, apresenta duas limitações principais. A primeira é não considerar a natureza cíclica do jogo, desse modo, a quantidade de soluções distintas é determinada pelo número total de soluções obtidas pelo método da exaustão dividido por $2n$.

$$\textit{Quant. de soluções distintas} = \frac{\textit{Quant. de soluções encontradas por exaustão}}{2n}.$$

A segunda é o custo computacional e a exigência de bastante memória do computador, uma vez que, o número de permutações realizadas é da ordem de $(2n+1)!$ e/ou $(2n!)$. Do ponto de vista computacional, o método de exaustão se mostrou adequado para o estudo dos casos de 3 até 6 círculos.

Para a quantidade de círculos igual a 3 até 6, inclusive, sempre encontramos soluções para o sistema 1 com as restrições impostas e peças em A_n, a Figura 5 exibe alguns exemplos de soluções.

Quando as peças estão restritas ao conjunto $A_n \backslash \{0\}$ o mesmo não acontece. Destacamos, na Figura 5, para $n = 4$ e $n = 6$ a existência de soluções sem o 0 e para $n = 3$ e $n = 5$ a não existência de soluções sem esse elemento, como apresentado na Tabela 1. Tal fato evidencia que: o estabelecimento de bijeção entre as peças do jogo e as regiões do tabuleiro alinhados com a retirada do elemento neutro da adição alteram significativamente o número de soluções.

Somos induzidos, a princípio, a conjecturar que para uma quantidade ímpar de círculos $(n \geq 3)$, não teríamos solução em $A_n \backslash \{0\}$. Entretanto, pelas limitações impostas pelo método de exaustão, por questões

Figura 5: Exemplo de soluções com peças em A_n nos casos com 3 até 6 círculos

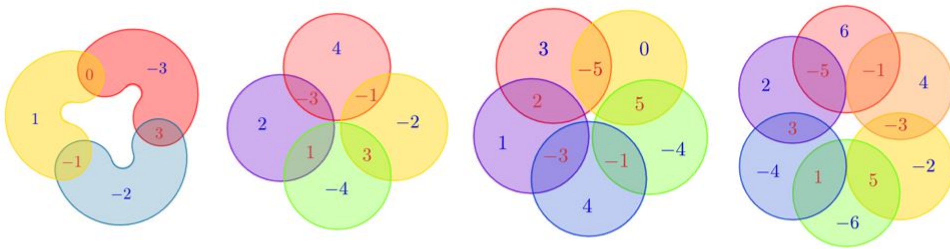


Tabela 1: Quantidade de soluções distintas para 3 círculos até 6.

	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
Quant. de soluções em A_n	6	9	14	20
Quant. de soluções em $A_n \backslash \{0\}$	0	1	0	4

de memória do computador, para n entre 7 e 10, inclusive, não foi possível obter respostas. Tornando-se necessário, usarmos uma estratégia de redução de complexidade do algoritmo, que está descrita na subseção a seguir.

4.2. Algoritmo combinado em divisão de tarefas

Uma estratégia comumente adotada para a resolução de um sistema de equações diofantinas lineares é a de reduzir as múltiplas equações a uma ou duas [1]. Para isso, podemos pensar no problema, decompondo-o, a princípio, em dois grandes conjuntos: $A_{\text{int}} = \{a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{2n-1}\}$ formado pelos elementos que estão nas interseções dos círculos; $A_{\text{ForaInt}} = \{a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2n}\}$ formado pelos elementos que estão fora das interseções, além de considerarmos suas respectivas somas:

$$s_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{2i-1} = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2i-1} \tag{2}$$

$$s_2 = \sum_{i=1}^{n} a_{2i} = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2i} \tag{3}$$

Da soma das equações diofantinas do sistema 1 e da soma dos elementos de A_n e/ou $A_n \backslash \{0\}$ podemos reescrever o modelo, de uma forma mais simplificada, através do sistema de equações diofantinas com certas restrições:

$$\begin{cases} 2s_1 + s_2 = & 0 \\ s_1 + s_2 = & \displaystyle\sum_{i=1}^{2n} a_i = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Cuja solução é $s_1 = s_2 = 0$. A existência de tal solução para o sistema 4 não implica na existência de uma solução para o Círculo Zero, contudo, ao aliar a informação de que a soma dos elementos na interseção tem que ser zero ($s_1 = 0$) à proposição 1, conseguimos construir um algoritmo combinando divisão de tarefas.

Proposição 1. - *Se o jogo Círculo Zero tem uma solução* $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n})$*, então esta solução é uma sequência da forma:* $a = (a_1, -(a_1+a_3), a_3, -(a_3+a_5), a_5, \ldots, a_{2i-1}, -(a_{2i-1}+a_{2i+1}), a_{2i+1}, \ldots, a_{2n-1}, -(a_{2n-1}+a_1)), \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demonstração. Por definição, uma sequência $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n})$ é solução do Círculo Zero se satisfaz o sistema 1 com as restrições impostas, logo decorre imediatamente que $a_{2i} = -(a_{2i-1} + a_{2i+1}),\ \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$ e que $a_{2n} = -(a_{2n-1} + a_1)$. □

Mostramos que a soma dos elementos que estão na interseção (A_{int}), precisa ser zero. Além disso, da proposição 1, sabemos que os n elementos que estão no conjunto A_{int} são suficientes para determinar uma solução do Círculo Zero, assim, como temos interesse na verificação de existência ou não de solução e na contagem de soluções distintas, otimizamos a busca de soluções realizando as combinações simples dos $2n + 1$ elementos de A_n tomados n a n, $C_{(2n+1),n} = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!}$, seguida de uma permutação circular destes n elementos, $PC_n = (n-1)!$. Ao realizarmos as combinações simples, limitamos nossa análise, a princípio, aos possíveis elementos que estão na interseção, portanto, vetores de dimensão n e que devem ser solução de $s_1 = 0$. No conjunto desses vetores que resolvem a equação diofantina $s_1 = 0$ e que tem cardinalidade menor ou igual a $C_{2n,n}$, realizamos as permutações circulares para cada um desses vetores. Tendo os possíveis candidatos a estarem na interseção, calculamos os valores que devem estar fora da interseção, pela proposição 1. Nesta última etapa, muitas vezes, obtemos valores que não pertencem ao conjunto $A_n \cap A_{ForaInt}$ ou soluções com elementos repetidos, desta forma, descartamos tais soluções por não atenderem às restrições do sistema 1.

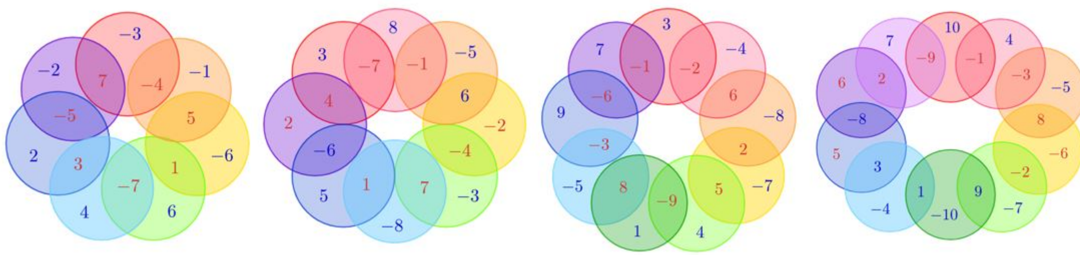
A proposição 2, justifica matematicamente, a proposta do algoritmo em divisão por tarefas.

Proposição 2. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$*, tem-se que* $C_{(2n+1),n} \cdot PC_n \leq P(A_n, 2n) = (2n+1)!$

Demonstração. Para todo $n \in \mathbb{N}$, vale que $\frac{(n-1)!}{(n+1)!n} \leq 1$, isto pode ser verificado por indução. Ao multiplicarmos os dois membros da desigualdade por $(2n+1)!$, temos que: $\frac{(2n+1)!}{(n+1)!n}(n-1)! \leq (2n+1)!$, logo $C_{(2n+1),n} \cdot PC_n \leq P(A_n, 2n) = (2n+1)!, \forall n \in \mathbb{N}$. □

Para a quantidade de círculos igual a 7 até 10, inclusive, sempre encontramos soluções para o sistema 1 com as restrições impostas e peças em $A_n \backslash 0$, a Figura 6 exibe soluções para esses casos e refuta a conjectura proposta inicialmente de que não haveria solução para n ímpar.

Figura 6: Exemplo de soluções com peças em $A_n \backslash 0$ nos caso com 7 até 10 círculos



Para o Círculo Zero com 7 círculos, existem somente duas soluções distintas em $A_7 \backslash \{0\} = \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, conforme mostra a Tabela 2.

Algoritmo 2: Algoritmo combinado em divisão de tarefas

dados: **inteiro:** $\mathrm{n} \geq 3$**,** **matriz:** $\mathrm{B}[\mathrm{C}_{2\mathrm{n},\mathrm{n}}, \mathrm{n}]$**,** **vetores:** ValPossiveis$\mathrm{A}_{\mathrm{int}}$, PermutValPossiveis$\mathrm{A}_{\mathrm{int}}$, ValPossiveis$\mathrm{A}_{\mathrm{ForaInt}}$, QuaseSolucao, Solucao
início
    $\mathrm{A}_\mathrm{n} \leftarrow \{-\mathrm{n}, -(\mathrm{n}-1), ..., (\mathrm{n}-1), \mathrm{n}\}$;
    B ← Todas as combinações n a n dos $2\mathrm{n}$ elementos de A_n;
    ValPossiveis$\mathrm{A}_{\mathrm{int}}$ ← [ ];
    para *cada linha em B* **faça**
        se *soma dos elementos da linha* = 0 **então**
            Adicione a linha à ValPossiveis$\mathrm{A}_{\mathrm{int}}$
    PermutValPossiveis$\mathrm{A}_{\mathrm{int}}$ ← [ ];
    para *cada linha em ValPossiveis*$\mathrm{A}_{\mathrm{int}}$ **faça**
        Fixe o primeiro elemento da linha
        Gere todas as permutações dos outros elementos da linha
        Adicione as permutações a PermutValPossiveis$\mathrm{A}_{\mathrm{int}}$
    ValPossiveis$\mathrm{A}_{\mathrm{ForaInt}}$ ← [ ];
    para *cada linha em PermutValPossiveis*$\mathrm{A}_{\mathrm{int}}$ **faça**
        para *cada par de elementos consecutivos* **faça**
            Adicione (soma do par de elementos) a ValPossiveis$\mathrm{A}_{\mathrm{ForaInt}}$
        Adicione (primeiro elemento + último elemento) a ValPossiveis$\mathrm{A}_{\mathrm{ForaInt}}$
    QuaseSolucao ← [ ];
    para i **de** *1* **a** *número de colunas em PermutValPossiveis*$\mathrm{A}_{\mathrm{int}}$ **faça**
        Concatene a i-ésima coluna de PermutValPossiveis$\mathrm{A}_{\mathrm{int}}$ com a i-ésima coluna de ValPossiveis$\mathrm{A}_{\mathrm{ForaInt}}$;
        Adicione a matriz resultante à QuaseSolucao;
    Solucao ← [ ];
    para *cada linha em QuaseSolucao* **faça**
        se *todos os elementos da linha pertencem a* A_n *e não há elementos repetidos* **então**
            Adicione a linha a Solucao;
    imprima *Solucao*;
fim

Para o caso em que as peças pertencem a A_7 o, número de soluções distintas é de 110. Em $\mathrm{A}_8\backslash\{0\}$, o número de soluções distintas é de 30, para A_8 é de 536. Tais resultados evidenciam que a retirada do elemento neutro da adição e a bijeção entre regiões do tabuleiro e número de peças, implicam significativamente, na contagem e nas estratégias para resolução do jogo. Para casos com $\mathrm{n} = 9$ e $\mathrm{n} = 10$ conseguimos verificar existência, mas não obter o número total de soluções distintas.

5. Verificação e validação dos códigos e resultados obtidos

Apresentamos formas distintas de demonstrar o mesmo resultado para $\mathrm{n} = 3$ e para $\mathrm{n} = 5$. O objetivo é validar os resultados obtidos pelo método da exaustão e do algoritmo combinado.

Tabela 2: Soluções para Círculo Zero com 7 círculos.

(-7,	4,	3,	2,	-5,	-2,	7,	-3,	-4,	-1,	5,	-6,	1,	6)
(-7,	2,	5,	-2,	-3,	-4,	7,	-6,	-1,	6,	-5,	1,	4,	3)

Para o caso $n = 3$, além da demonstração obtida diretamente pelo método da exaustão, apresentamos outra por contradição. Para o caso em que temos 5 círculos o sistema de equações diofantinas (1) torna-se maior e as contradições não se tornam tão explícitas como no caso com 3 círculos. Precisamos, novamente, fazer uso do computador e de linguagem simbólica para verificar os resultados.

5.1. O caso com 3 círculos

Proposição 3. *Seja* $n = 3$ *o número de círculos no jogo Círculo Zero e* $A_3 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ *o conjunto, o qual as peças do jogo devem pertencer. Então,* ***todas*** *as soluções para o Círculo Zero, tem o elemento* 0.

Demonstração. 1. Podemos mostrar este fato de forma exaustiva. Com um programa em Phyton e MATLAB, encontramos 6 soluções distintas restritas ao conjunto $A_3 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ para o Círculo Zero, expostas na Tabela 3, em que cada linha representa uma solução.

Tabela 3: Soluções para 3 círculos com peças em A_3.

(0,	-3,	3,	-2,	-1,	1)
(0,	-3,	3,	-1,	-2,	2)
(0,	-2,	2,	-3,	1,	-1)
(0,	-2,	2,	1,	-3,	3)
(0,	-1,	1,	2,	-3,	3)
(0,	1,	-1,	3,	-2,	2)

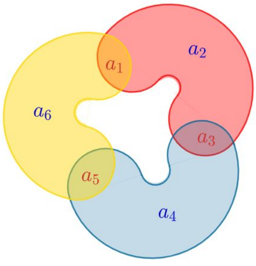
□

Demonstração. 2. Suponha, por absurdo, que todos os elementos de $A_3\backslash\{0\}$ possam ser dispostos nas 6 regiões determinadas pelos três círculos, de tal forma que a soma em cada círculo seja 0.

Para cada uma das 6 regiões de a_i, com $i \in \mathbb{N}$ e $1 \le i \le 6$, conforme Figura 7, devemos associar uma única peça de $A_3\backslash\{0\}$. Pelo sistema de equações diofantinas (1), temos que:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_3 + a_4 + a_5 = 0 \\ a_5 + a_6 + a_1 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Figura 7: Círculo Zero $n = 3$



Do sistema 4, sabemos que:

$$\begin{cases} s_1 = a_1 + a_3 + a_5 = 0 \\ s_2 = a_2 + a_4 + a_6 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Nos sistemas 5 e 6, destacamos que:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_3 + a_5 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Donde concluímos que $a_2 = a_5$, o que é um absurdo, pois por hipótese, $a_2 \neq a_5$. □

5.2. O caso com 5 círculos

Proposição 4. *-Seja* $n = 5$ *o número de círculos no jogo Círculo Zero e* $A_5 = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ *o conjunto, em que as peças do jogo devem pertencer. Então,* ***todas*** *as soluções para o Círculo Zero, tem o elemento* 0*.*

Demonstração. 1. Podemos mostrar este fato de forma exaustiva. Com um programa em Phyton e MATLAB, encontramos 14 soluções distintas restritas ao conjunto $A_5 = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ para o Círculo Zero, expostas na Tabela 4, em que cada linha representa uma solução.

Tabela 4: Soluções para 5 círculos com peças em A_5.

(-5,	0,	5,	-4,	-1,	4,	-3,	1,	2,	3)
(-5,	0,	5,	-3,	-2,	-1,	3,	-4,	1,	3)
(-5,	1,	4,	-3,	-1,	3,	-2,	2,	0,	5)
(-5,	1,	4,	-1,	-3,	5,	-2,	0,	2,	3)
(-5,	1,	4,	0,	-4,	5,	-1,	-2,	2,	3)
(-5,	2,	3,	-2,	-1,	-3,	4,	-4,	0,	5)
(-5,	4,	1,	-4,	3,	-1,	-2,	2,	0,	5)
(-5,	5,	0,	-4,	4,	-1,	-3,	1,	2,	3)
(0,	-5,	5,	-4,	-1,	4,	-3,	1,	2,	-2)
(0,	-5,	5,	-3,	-2,	-1,	3,	1,	-4,	4)
(0,	-5,	5,	-2,	-3,	2,	1,	3,	-4,	4)
(0,	-5,	5,	-1,	-4,	3,	1,	-3,	2,	-2)
(1,	-5,	4,	0,	-4,	-1,	5,	-2,	-3,	2)
(2,	-5,	3,	1,	-4,	-1,	5,	-3,	-2,	0)

□

Para a segunda demonstração analisamos diversos casos separadamente usando linguagem simbólica do MAPLE.

Demonstração. 2. Suponhamos por absurdo que exista uma solução $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10})$ para o Círculo Zero, sem o 0. Da definição 1 e das restrições das peças pertencerem a $A_5 \backslash \{0\}$, podemos construir a Tabela 5, onde X representa os elementos que não podem ser simétricos aditivos.

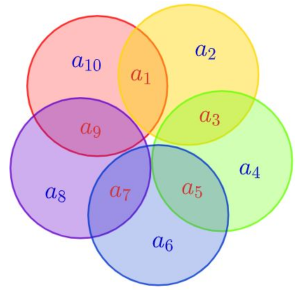
Note que, se a_1 fosse simétrico a a_2, então a_3 deveria ser 0, o que já seria um absurdo, pois estamos supondo que as peças são diferentes de 0, o mesmo raciocínio se estende para os demais casos que estão com X, restringindo, assim, a análise a outros casos.

Para fins de simplificação, vamos considerar o estudo de todas as possibilidades de simetria a partir de a_1, sendo os demais casos análogos. Na Figura 9, consideramos as possibilidades a partir da hipótese de que

Tabela 5: Números que não podem ser simétricos

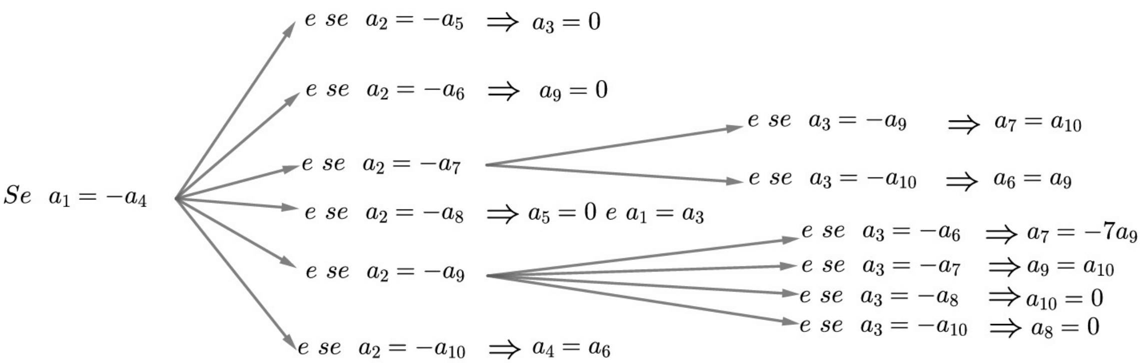
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
a_1	X	X	X						X	X
a_2	X	X	X							
a_3	X	X	X	X	X					
a_4			X	X	X					
a_5			X	X	X	X	X			
a_6					X	X	X			
a_7					X	X	X	X	X	
a_8							X	X	X	
a_9	X						X	X	X	X
a_{10}	X								X	X

Figura 8: Círculo Zero com 5 círculos



a_1 é simétrico aditivo a a_4. A figura em árvore mostra que em todas as ramificações estudadas, chegamos a algum absurdo: peças iguais, pelo menos uma peça igual a 0 ou peças que não pertencem a A_5.

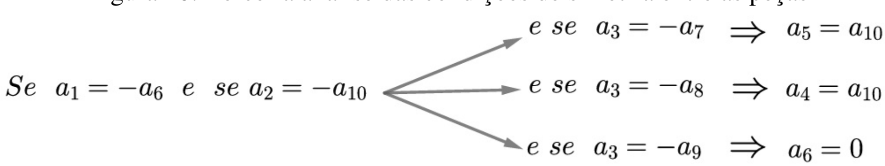
Figura 9: Primeira análise das condições de simetria entre as peças



A segunda análise de condição de simetria entre as partes garante que: se $a_1 = -a_5 \Rightarrow a_3 = a_8$.

Para a_1 simétrico a a_6 e a_2 simétrico a a_{10}, geramos a árvore apresentada na Figura 10.

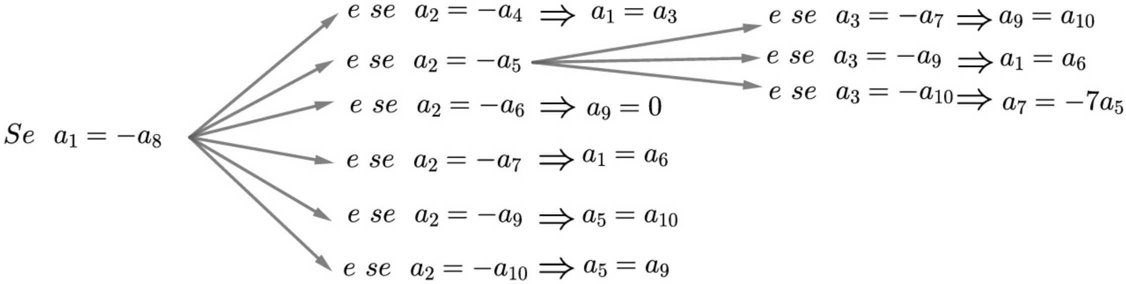
Figura 10: Terceira análise das condições de simetria entre as peças



A quarta análise de condição de simetria entre as partes garante que: se $a_1 = -a_7 \Rightarrow a_4 = a_9$.

O último caso ocorre quando a_1 é simétrico a a_8. Na Figura 11 apresentamos as contradições apresentadas nas ramificações, as quais encerram a demonstração.

Figura 11: Quinta análise das condições de simetria entre as peças



□

6. Considerações finais

Este artigo abordou a investigação sobre a existência de soluções para o jogo educativo "Círculo Zero" para as peças restritas a dois subconjuntos específicos de números inteiros. A pesquisa a partir da ludicidade, estabeleceu um elo entre os cenários de investigação e a determinação de existência de soluções para um problema, utilizando diferentes ferramentas. Assim conseguimos ilustrar como as atividades exploratórias podem motivar e construir ideias matemáticas. A partir de um evento, os autores foram impulsionados a investigar a impossibilidade de resolver o problema proposto, utilizando métodos variados, incluindo a programação computacional.

O artigo revelou, de certa forma, o impacto ao se estabelecer bijeção entre as peças numeradas e as regiões do tabuleiro, assim como a influência da retirada do elemento neutro da adição nas possibilidades de solução do jogo, uma vez que são retiradas quaisquer combinações da forma $-\mathrm{i}, 0, \mathrm{i}$ para um dos círculo, se i e seu simétrico pertencerem ao conjunto de peças definido previamente. Como destacado no texto, para peças em A_8, o número de soluções distintas é de 536, para peças em $\mathrm{A}_8 \backslash \{0\}$ é de 30.

O algoritmo da exaustão apresentou limitações para verificação de existência de solução para casos com mais de 6 círculos, tornando-se necessária a implementação do algoritmo combinado. Os resultados obtidos, foram validados por meio de demonstrações sobre a inexistência de solução para o Círculo Zero considerando casos específicos, como aqueles com 3 e 5 círculos, excluindo o zero. No primeiro caso, a demonstração foi conduzida por meio de uma prova por absurdo. Já no segundo caso, devido à complexidade e ao número de equações envolvidas, foi necessário recorrer a uma prova assistida por computador.

Os experimentos computacionais, permitiram compreender a natureza cíclica do jogo e buscar na teoria de grupos, uma forma de definir soluções equivalentes e soluções distintas. Dessa forma, a pesquisa destacou a versatilidade do jogo, que pode ser aplicado em diferentes níveis de ensino, proporcionando um ambiente desafiador para alunos e professores.

Assim, este estudo buscou não apenas contribuir para a compreensão do jogo Círculo Zero e suas propriedades matemáticas, mas também sugere novas abordagens metodológicas para o ensino de matemática, destacando o potencial das atividades exploratórias e investigativas apoiadas pela tecnologia. Em última análise, a pesquisa reforça a ideia de que a matemática vai além de um mero jogo mecânico de fórmulas isoladas, enfatizando a importância da intuição e da investigação na gênese das descobertas.

Referências

[1] ANDREESCU, Titu et al. *An introduction to Diophantine equations: A problem-based approach*. New York: Birkhäuser, 2010.

[2] ÁVILA, Artur. Entrevista com Artur Ávila. Entrevistadora: Marília Gabriela. Rio de Janeiro. Entrevista concedida ao programa Marília Gabriela Entrevista do canal GNT, programa exibido em 12 de abril de 2015. 2015.

[3] BATISTELA, Rosemeire de Fátima; MOREIRA, Taís Alves; LAZARI, Henrique *Um estudo sobre demonstração matemática por/com computador*. **REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática**, 11, 204-215, 2016.

[4] BOALER, Joe Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching. John Wiley & Sons, 2015.

[5] BORWEIN, Jonathan M.; BAILEY, David H. Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century. Wellesley, Massachusetts: **A K Peters**, 2003.

[6] BOURBAKI, Nicolas. The Architecture of Mathematics. In: The American Mathematical Monthly. v. 57, n.4., p. 221-232, 1950.

[7] BRUALDI, Richard A. *Introductory Combinatorics*: Fifth edition. China: **China Machine Press**, 2009.

[8] DA SILVA, Z. F. D. Grupos, simetrias e quadrados mágicos. Dissertação de mestrado. PROFMAT-UNIRIO, Rio de Janeiro, 2020.

[9] DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando, Coleção: Teláris Essencial — Matemática, 1ª ed., **Editora Ática**, São Paulo, 2022.

[10] DE MELO, Marcelo Ferreira; MACHADO, José Samuel. Quadrados Mágicos: Um passeio pela História e pela Álgebra Linear. **Ciência e Natura**, Santa Maria v. 40, e54, 2018.

[11] PIAGET, Jean. A formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho, imagem e representação. Trad. Álvaro Cabral. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

[12] PONTE, João Pedro; CANAVARRO, Ana Paula. Matemática e novas tecnologias: a calculadora no ensino da matemática. 1997.

[13] PONTE, João Pedro da et al. O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. **Quadrante**, v. 7, n. 2, p. 41-70, 1998.

[14] PONTE, João Pedro da, Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal, **Investigar em educação**, 93–169, 2003.

[15] ROCHA, Eloy da Silva et al. *Uma análise pedagógica dos dados estatísticos das provas de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental do Saeb, no período de 2011 a 2017.* p. 61-62, 2019

[16] TONIAL, Bruna Gabriela. *Jogos no ensino da matemática: um estudo bibliográfico com base nos anais do Enem*, Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática), Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó, 2022.

Diego Soares Monteiro
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
<diego_smonteiro@hotmail.com>

Daniel Cunha
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
<dcunhas@gmail.com>

Natália Pedroza
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
<npsnatalia@gmail.com>

Rasec Almeida
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
<almeida.rasec@gmail.com>

Recebido: 17/08/2024
Publicado: 14/12/2024