PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.12, n.4, 2024
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2024/pmo1238

Sobre amortização antecipada em financiamentos imobiliários no SAC: reduzir o prazo ou a prestação?

Denis Mota de Sousa

Resumo

Um financiamento imobiliário é um empréstimo concedido por uma instituição financeira para a compra de um imóvel. Este tipo de empréstimo, por corresponder a um valor alto, geralmente tem prazos longos e juros mais baixos que os de outras modalidades. No Sistema de Amortização Constante (SAC), o valor das prestações diminuem ao longo do tempo, já que os juros são calculados a cada mês sobre o saldo devedor atualizado. Se o cliente está honrando o pagamento das prestações, ele pode abater uma parte da dívida sem pagar juros (amortização antecipada). Quando isso acontece, normalmente a instituição financeira dá ao cliente duas opções: reduzir o valor da prestação e manter o prazo ou manter o valor da última prestação e reduzir o prazo. Neste trabalho determinamos qual dessas opções resulta em um menor gasto, o que pode servir como um importante critério para decidir qual delas escolher.

Palavras-chave: matemática financeira; financiamento; SAC; amortização antecipada.

Abstract

A mortgage loan is a loan granted by a financial institution for the purchase of a property. Due to the high amount involved, this type of loan usually has long terms and lower interest rates compared to other types of loans. In the Constant Amortization System (CAS), installments decrease over time, as interest is calculated monthly based on the updated outstanding balance. If the client is making regular payments, they can pay off part of the debt without incurring interest (early amortization). When this happens, the financial institution usually offers two options: to reduce the installment amount while maintaining the term, or to keep the last installment amount and reduce the term. In this study, we determine which option results in lower overall costs, providing an important criterion for deciding between the two.

Keywords: financial mathematics; loan; CAS; early amortization.

1. Introdução

Um *financiamento imobiliário* é um empréstimo concedido por uma instituição financeira com a finalidade de pagar pela compra de um imóvel. Por ser um instrumento que viabiliza realizar o sonho da casa própria, essa operação de crédito desperta o interesse de muita gente.

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Devido ao alto valor envolvido, o financiamento imobiliário geralmente possui um prazo longo e taxas de juros mais baixas em comparação a outros tipos de empréstimos. Na compra de um imóvel é comum que se pague um valor de entrada e o saldo restante ser quitado através de um financiamento.

A *amortização* é o ato de reduzir uma parte da dívida. No *Sistema de Amortização Constante* (SAC), as amortizações mensais têm valores fixos, e as prestações diminuem ao longo do tempo, uma vez que os juros são calculados mensalmente com base no saldo devedor atualizado. Esse é o sistema mais utilizado no Brasil, pois oferece vantagens tanto para os bancos quanto para os clientes.

A *amortização antecipada* acontece quando um cliente, estando em dia com o pagamento das prestações, paga uma parte da dívida vigente. Quando isso ocorre, é muito vantajoso para o cliente pois assim parte de sua dívida é paga sem juros, o que não aconteceria se ele pagasse toda a dívida somente através das prestações.

Quando se faz uma amortização antecipada, normalmente a instituição financeira dá duas opções para se refazer o cálculo das prestações seguintes: diminuir o valor da prestação, mantendo o prazo, ou manter o valor da prestação, reduzindo o prazo. Não é tão simples escolher qual das duas é a melhor opção. Neste texto vamos mostrar em qual das duas opções gasta-se menos.

Algumas publicações científicas nacionais já abordaram questões sobre financiamentos imobiliários [1, 2, 3, 4], porém sobre o problema discutido neste artigo ainda nada foi publicado. Ele é de grande relevância pois sua resposta revela uma informação muito importante a se considerar caso se queira abater uma parte da dívida antes do prazo.

2. A Matemática das Prestações

Vamos considerar um financiamento imobiliário de D_0 reais, com prazo de n meses e taxa de juros de $x\%$ ao mês. Neste caso, em cada prestação é amortizado $\frac{D_0}{n}$ reais.

A primeira prestação deve ser paga no mês seguinte a efetivação do contrato e as prestações seguintes são pagas mensalmente. Depois de k prestações pagas, o saldo devedor será de

$$D_k = D_0 - k\frac{D_0}{n},$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$. A sequência de saldos devedores composta por $D_0, D_1, \ldots, D_n$ é uma progressão aritmética cuja razão é $-\frac{D_0}{n}$.

Em cada prestação, além da amortização, são pagos também juros, taxa de administração e seguro. Os juros dependem diretamente do saldo devedor atualizado. Se o financiamento cobra juros mensais de $x\%$, a parcela de juros da k-ésima prestação é de

$$J_k = x\% D_{k-1},$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Neste trabalho não vamos considerar a taxa de administração e o seguro. Assim a prestação é composta pela amortização mais os juros, de forma que a k-ésima prestação é dada por

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{D_0}{n} + J_k \\ &= \frac{D_0}{n} + x\%\left(D_0 - (k-1)\frac{D_0}{n}\right) \\ &= \frac{D_0}{n} + x\%D_0\left(1 - \frac{k-1}{n}\right), \end{aligned}$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$. Note que a sequência $P_1, P_2, \ldots, P_n$ também é uma progressão aritmética, mas essa de razão $-x\%\frac{D_0}{n}$.

Para sabermos quanto se gasta pagando o financiamento até a parcela P_ℓ, segundo a fórmula para a soma de uma progressão aritmética [2], fazemos

$$\begin{aligned} S^{(\ell)} = \sum_{k=1}^{\ell} P_k &= \frac{(P_1 + P_\ell)\ell}{2} \\ &= \frac{\left(\frac{D_0}{n} + x\%D_0 \quad + \quad \frac{D_0}{n} + x\%D_0\left(1 - \frac{\ell - 1}{n}\right)\right)\ell}{2} \\ &= \frac{D_0\ell}{2n}\left(1 + x\%n \quad + \quad 1 + x\%(n - \ell + 1)\right) \\ &= \frac{D_0\ell}{n}\left(1 + x\%\left(n + \frac{1-\ell}{2}\right)\right). \end{aligned} \tag{1}$$

A soma de todas as prestações do financiamento é dada por

$$S^{(n)} = D_0\left(1 + x\%\frac{n+1}{2}\right). \tag{2}$$

Ou seja, pagando todas as parcelas do financiamento, gasta-se $S^{(n)} - D_0 = D_0 x\%\frac{n+1}{2}$ reais a mais que o valor emprestado pela instituição. Da expressão em (2), é possível deduzir que se $x\%\frac{n+1}{2} \geq 1$, será pago pelo menos o dobro do que foi emprestado pela instituição financeira. Isso acontece, por exemplo, se a taxa de juros for de 1% ao mês em um prazo de 200 meses, independente do valor da dívida.

Exemplo 1. Suponhamos que uma pessoa tenha um financiamento de 100 mil reais, a uma taxa de 1% ao mês, no SAC, para serem pagos em 360 meses. Na **Tabela 1** podemos ver os valores das prestações, das amortizações, dos juros e dos saldos devedores para alguns meses.

Pelo resultado obtido em (1), quando a pessoa ter pago metade da quantidade total de prestações, terá gasto, em reais,

$$\begin{aligned} S^{(180)} &= \sum_{k=1}^{180} P_k \\ &= \frac{100.000 \times 180}{360}\left(1 + 1\%\left(360 + \frac{1-180}{2}\right)\right) \\ &= 185.250. \end{aligned}$$

mês (k)	prestação (P_k)	amortização (D_0/n)	juros (J_k)	dívida (D_k)
0	-	-	-	100.000,00
1	1.277,78	277,78	1.000,00	99.722,22
36	1.180,56	277,78	902,78	90.000,00
72	1.080,56	277,78	802,78	80.000,00
108	980,56	277,78	702,78	70.000,00
144	880,56	277,78	602,78	60.000,00
180	780,56	277,78	502,78	50.000,00
216	680,56	277,78	402,78	40.000,00
252	580,56	277,78	302,78	30.000,00
288	480,56	277,78	202,78	20.000,00
324	380,56	277,78	102,78	10.000,00
360	280,56	277,78	2,78	0

Tabela 1: Alguns dados referentes ao financiamento do **Exemplo 1**.

E se todas as prestações forem pagas, segundo o resultado em (2), a pessoa terá um gasto total, em reais, de

$$\begin{aligned} S^{(360)} &= \sum_{k=1}^{360} P_k \\ &= 100.000\left(1 + 1\%\frac{360+1}{2}\right) \\ &= 280.500. \end{aligned}$$

Apresentamos a seguir um resultado interessante sobre as prestações de um financiamento no SAC.

Proposição 1. Se reiniciarmos um financiamento logo após o pagamento da ℓ-ésima prestação, as prestações seguintes continuam as mesmas. Isto é, dado um financiamento com parcelas $P_1, P_2, \ldots, P_n$, se no mês ℓ refizermos o financiamento com a mesma taxa de juros, em $n-\ell$ meses e saldo devedor de D_ℓ reais, denotando suas parcelas por $P_1^*, P_2^*, \ldots, P_{n-\ell}^*$, temos

$$P_1^* = P_{\ell+1}, \quad P_2^* = P_{\ell+2}, \quad \ldots, \quad P_{n-\ell}^* = P_n.$$

Demonstração. Neste caso, para $k^* = 1, 2, \ldots, n-\ell$, temos

$$\begin{aligned} P_{k^*}^* &= \frac{D_\ell}{n-\ell} + x\%D_\ell\left(1 - \frac{k^*-1}{n-\ell}\right) \\ &= \frac{D_0 - \ell\frac{D_0}{n}}{n-\ell} + x\%\left(D_0 - \ell\frac{D_0}{n}\right)\left(\frac{n-\ell-k^*+1}{n-\ell}\right) \\ &= \frac{1}{n-\ell}\left(D_0\left(1-\frac{\ell}{n}\right) + x\%D_0\left(1-\frac{\ell}{n}\right)(n-\ell-k^*+1)\right) \\ &= \frac{1}{\cancel{n-\ell}}\left(\frac{\cancel{n-\ell}}{n}\right)\left(D_0 + x\%D_0\,(n-\ell-k^*+1)\right) \\ &= \frac{D_0}{n} + x\%D_0\left(1 - \frac{\ell+k^*-1}{n}\right) \\ &= P_{\ell+k^*}. \end{aligned}$$

□

3. Reduzir a Prestação ou o Prazo?

Consideremos agora que, em um financiamento, no ℓ-ésimo mês, a pessoa decida amortizar antecipadamente M reais da dívida. Quando solicitamos a amortização antecipada em um financiamento, normalmente a instituição financeira nos dá duas opções:

Opção I. Reduzir o valor da prestação, mantendo o prazo original.

Opção II. Manter o valor da última prestação, reduzindo o prazo.

3.1. Quanto custará cada opção?

Reduzir o valor da prestação dá uma sensação imediata de estar economizando, pois a prestação, a partir do mês seguinte, será mais baixa e isso trará um alívio rápido ao orçamento doméstico. Mas considerando o gasto total com a compra do imóvel, será que essa é a opção mais vantajosa?

Nas duas opções será como se um novo financiamento fosse iniciado com saldo devedor de $\overline{\mathrm{D}_0} = \mathrm{D}_\ell - \mathrm{M}$ reais. Para organizar a comparação, denotaremos por Q_k, com $\mathrm{k} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n} - \ell$, as parcelas da **Opção I** e de R_k, com $\mathrm{k} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}_\ell$, as parcelas da **Opção II**. Vamos calcular quanto se gasta pagando todas as prestações nos dois casos, desconsiderando as prestações até a ℓ-ésima, pois essas serão iguais nas duas opções.

Opção I - Reduzir o valor da prestação, mantendo o prazo original

Se após o pagamento da ℓ-ésima prestação foi amortizado um valor de M reais da dívida e optou-se por reduzir o valor da prestação, mantendo o prazo original, o financiamento será reiniciado com o novo saldo devedor de $\overline{\mathrm{D}_0}$ reais, mesma taxa de juros de $\mathrm{x}\%$ ao mês e prazo de $\mathrm{n}-\ell$ meses. Assim o valor das prestações seguintes serão dados por

$$\mathrm{Q}_\mathrm{k} = \frac{\overline{\mathrm{D}_0}}{\mathrm{n}-\ell} + \mathrm{x}\%\overline{\mathrm{D}_0}\left(1 - \frac{\mathrm{k}-1}{\mathrm{n}-\ell}\right),$$

para $\mathrm{k} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n} - \ell$.

Dessa forma a soma de todas as prestações referentes aos meses após o mês ℓ, segundo a fórmula em (1), é igual a

$$\mathrm{S}_\mathrm{Q}^{(\mathrm{n}-\ell)} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}-\ell} \mathrm{Q}_\mathrm{k} = \overline{\mathrm{D}_0}\left(1 + \mathrm{x}\%\frac{\mathrm{n}-\ell+1}{2}\right). \tag{3}$$

Opção II - Manter o valor da última prestação, reduzindo o prazo

Se após o pagamento da ℓ-ésima prestação foi amortizado um valor de M reais da dívida e optou-se por manter aproximadamente o valor da última prestação, reduzindo o prazo, o financiamento será reiniciado com o novo saldo devedor de $\overline{\mathrm{D}_0}$ reais, mesma taxa de juros de $\mathrm{x}\%$ ao mês e com o prazo de n_ℓ meses, de forma que este último deve satisfazer

$$P_\ell \approx R_1 = \frac{\overline{D_0}}{n_\ell} + x\%\overline{D_0}.$$

Somando $-x\%\overline{D_0}$ nos dois lados da aproximação acima e, em seguida, multiplicando-a por n_ℓ, obtemos

$$n_\ell\left(P_\ell - x\%\overline{D_0}\right) \approx \overline{D_0}.$$

Dividindo os dois lados da nova aproximação por $P_\ell - x\%\overline{D_0}$ temos

$$n_\ell \approx \frac{\overline{D_0}}{P_\ell - x\%\overline{D_0}}. \tag{4}$$

Como n_ℓ deve ser um inteiro, podemos tomar n_ℓ igual ao arredondamento da expressão do lado direito da aproximação em (4).

Assim as prestações após o ℓ-ésimo mês serão calculadas pela fórmula

$$R_k = \frac{\overline{D_0}}{n_\ell} + x\%\overline{D_0}\left(1 - \frac{k-1}{n_\ell}\right),$$

para $k = 1, 2, \ldots, n_\ell$.

A soma de todas as prestações após a ℓ-ésima, segundo a fórmula em (2), é igual a

$$S_R^{(n_\ell)} = \sum_{k=1}^{n_\ell} R_k = \overline{D_0}\left(1 + x\%\frac{n_\ell + 1}{2}\right). \tag{5}$$

3.2. Comparando as duas opções

Na **Opção I** o prazo restante é mantido, $n - \ell$ meses. Já na **Opção II** o valor da última prestação é mantido, porém a o prazo será menor. Então se n_ℓ é menor que o prazo que restava, temos que

$$n - \ell > n_\ell.$$

Dessa forma, comparando as expressões obtidas em (3) e (5), podemos concluir que

$$S_Q^{(n-\ell)} > S_R^{(n_\ell)}.$$

Então, quando alguém faz uma amortização antecipada de um financiamento no SAC, se optar por reduzir o prazo, mantendo o valor das prestações (**Opção II**), pagará menos pelo imóvel.

Exemplo 2. Vamos considerar novamente que uma pessoa fez um financiamento de 100 mil reais, para serem pagos em 30 anos, a uma taxa de 1% ao mês, no SAC. Esta mesma pessoa, logo após o pagamento da 90ª prestação, decidiu amortizar 30 mil reais que havia conseguido economizar.

A instituição financeira na qual ela fez o empréstimo deu duas opções para ela continuar o financiamento após a amortização: reduzir o valor da prestação, mantendo o prazo, ou manter o valor da última prestação, reduzindo o prazo.

Até o 90º mês foram pagos, em reais,

$$\begin{aligned} S^{(90)} &= \sum_{k=1}^{90} P_k \\ &= \frac{100.000 \times 90}{360}\left(1 + 1\%\left(360 - \frac{90-1}{2}\right)\right) \\ &= 103.875. \end{aligned}$$

O valor da dívida, em reais, no mesmo mês estava em

$$D_{90} = 100.000 - 90 \times \frac{100.000}{360} = 75.000.$$

Após a amortização antecipada de $M = 30.000$ reais, o saldo devedor da dívida, em reais, passa a ser

$$\overline{D_0} = 75.000 - 30.000 = 45.000.$$

Opção I - Reduzir o valor da prestação, mantendo o prazo original

Nesta opção, restarão 270 prestações a serem pagas. A primeira prestação, em reais, após a amortização antecipada será de

$$Q_1 = \frac{45.000}{270} + 1\% \times 45.000 = 616{,}67.$$

Como a 90ª prestação, em reais, foi de

$$\begin{aligned} P_{90} &= \frac{100.000}{360} + 1\%100.000\left(1 - \frac{90-1}{360}\right) \\ &= 1.030{,}56, \end{aligned}$$

a opção de reduzir o valor da prestação resultará em uma economia mensal de $413,89$ reais.

Nesta opção, a soma de todas as prestações, em reais, após a 90ª, será de

$$\begin{aligned} S_Q^{(270)} &= \sum_{k=1}^{270} Q_k \\ &= 45.000\left(1 + 1\%\left(\frac{270+1}{2}\right)\right) \\ &= 105.975. \end{aligned}$$

Opção II - Manter o valor da última prestação, reduzindo o prazo

Para calcularmos o novo prazo nessa opção usamos a fórmula em (4). A nova quantidade de prestações após a amortização será a parte inteira de

$$\frac{45.000}{1.030{,}56 - 1\%45.000} \approx 77{,}51.$$

Portanto $n_{90} = 78$.

Neste caso a prestação seguinte será, em reais, de

$$R_1 = \frac{45.000}{78} + 1\% \times 45.000 = 1.026{,}92.$$

E a soma de todas as prestações, em reais, após a 90ª será de

$$\begin{aligned} S_R^{(78)} &= \sum_{k=1}^{78} R_k \\ &= 45.000\left(1 + 1\%\left(\frac{78+1}{2}\right)\right) \\ &= 62.775. \end{aligned}$$

Então na **Opção I** seriam pagos 105.975 reais pelos 45 mil reais restantes da dívida, enquanto na **Opção II** seriam pagos 62.775 reais. Ou seja, na **Opção II** gasta-se 43.200 reais a menos do que na **Opção I**. Além de que liquida-se a dívida em 16 anos a menos.

Na **Figura 1** temos um gráfico comparando o valor das prestações das duas opções, destacando-se as partes de amortização e juros em cada uma delas. As prestações mostradas estão com intervalo de um ano e o índice das prestações estão sendo considerados pela contagem original do financiamento.

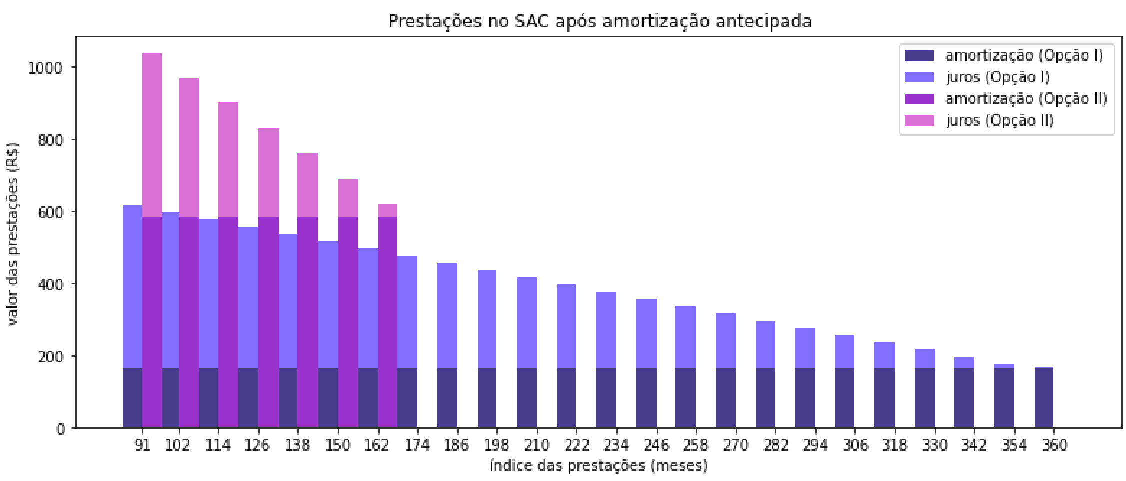

Figura 1: Comparação entre as prestações após a amortização antecipada, indicando amortizações e juros, nas **Opções I** e **II**.

4. Conclusão

Com base no que foi apresentado neste texto, podemos concluir que, em um financiamento no SAC, optar por reduzir o prazo ao realizar uma amortização antecipada é mais vantajoso no sentido de minimizar o valor total pago ao longo do contrato, resultando em uma economia maior em comparação à redução do valor da prestação.

Embora esse possa ser um critério importante para escolher entre as duas opções, ele não deve ser o único. Porque para algumas pessoas, cuja renda está comprometida ou o orçamento apertado, reduzir o valor da prestação pode ser uma prioridade, pois isso alivia a pressão financeira mensal. Com uma parcela menor, é possível destinar recursos para outras despesas essenciais ou emergências, garantindo maior equilíbrio no orçamento e evitando inadimplência.

Outro ponto importante a ser considerado é que as prestações previstas para datas mais distantes tendem a ser desvalorizadas pela inflação ao longo do tempo. Como consequência, elas podem representar uma parcela menor do orçamento doméstico no futuro em comparação ao impacto que teriam atualmente, tornando menos urgente a redução do prazo total do financiamento.

Referências

[1] FERREIRA, Débora Borges. SAC ou price? Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n. 85, p. 42-45, 2014.

[2] MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila. Progressões e Matemática Financeira. Coleção do Professor de Matemática. SBM. 2000.

[3] SANTOS, Keila Maria Borges dos. A matemática do financiamento habitacional. 2015. 72 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

[4] SANTOS, Sérgio Ferreira dos. Análise comparativa dos sistemas de amortizações: SAC e Price (Prof-Mat) - Universidade Estadual do Piauí, Santos, 2020.

Denis Mota de Sousa
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Campus Duque de Caxias Professor Geraldo Cidade
<denis@caxias.ufrj.br>

Recebido: 17/09/2024
Publicado: 17/12/2024