


# O volume do parabolóide circular no ensino médio

Anderson Lima 

Adriano Lourenço 

Cleisiane Fernandes 

## Resumo

A geometria é uma grande área da matemática que possui diversas aplicações no cotidiano. Há uma gama de problemas envolvendo essa área, dentre eles destacam-se problemas do cálculo de áreas e volumes de superfícies. Exploramos o princípio de Cavalieri, que possibilita o cálculo de volumes de superfícies no ensino médio utilizando equivalências de sólidos, sem o uso de integrais, para calcular o volume do parabolóide circular. Mais precisamente, apresentamos um sólido geométrico que possui volume equivalente ao do sólido desejado.

**Palavras-chave:** Volume; Parabolóide Circular; Cavalieri.

## Abstract

Geometry is a vast area of mathematics that has various applications in everyday life. There is a range of problems involving this field, among which the calculation of areas and volumes of surfaces stands out. We explore Cavalieri's principle, which allows for the calculation of volumes of surfaces in high school using equivalences of solids, without the use of integrals, to calculate the volume of the elliptical paraboloid. More precisely, we present a geometric solid that has a volume equivalent to that of the desired solid.

**Keywords:** Volume; Elliptical Paraboloid; Cavalieri.

## 1. Introdução

Nesta seção, baseamo-nos nas referências [1], [2], [4], [5] e [6].

O parabolóide circular, que apresentamos aqui, é um sólido de revolução gerado pela rotação de uma parábola ao redor de seu próprio eixo. Cumpre destacar que seu formato assemelha-se ao de uma taça, ver Figura 1, estabelecendo, assim, uma conexão entre sua forma e um objeto amplamente presente em nossa sociedade. A exploração do cálculo de seu volume, tema raramente abordado no ensino médio, constitui uma oportunidade ímpar para promover um avanço substancial no desenvolvimento do conhecimento de volumes de sólidos geométricos.

Sejam  $a$  e  $c$  números reais, sendo  $a$  positivo e  $c \neq 0$ . A equação do parabolóide em um ponto  $P(x, y, z)$  é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = cz.$$

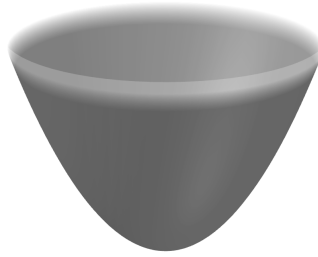


Figura 1. Paraboloide circular.

Arquimedes, embora não tenha trabalhado diretamente com cálculo diferencial e integral, contribuiu de maneira significativa nessa área. Por meio de suas pesquisas, foram desenvolvidos técnicas para o cálculo de área de curvas por meio de aproximação de polígonos, técnica esta conhecida como método da exaustão. Além de Arquimedes, Johannes Kepler, físico que desenvolveu as leis que descrevem o movimento planetário, contribuiu de maneira indireta para o cálculo. Um exemplo disso foi o "problema dos barris de vinho" no qual Kepler observou que era possível estimar o volume dos barris utilizando o volume de outros sólidos, para tal ele imaginou o barril como um cilindro inscrito em uma esfera. Desse forma, ao definir a altura que maximiza o volume do cilindro, maximizaria também o volume do barril.

Bonaventura Cavalieri, matemático italiano, formalizou as ideias de Galileu Galilei e desenvolveu o método dos indivisíveis, trazendo grandes contribuições para o cálculo. Esse método foi uma tentativa de resolver problemas de áreas e volumes, Cavalieri propôs que figuras geométricas eram constituídas por uma infinidade de partes indivisíveis e que a soma dessas partes determinava a área ou o volume da figura.

Diante disso, sem utilizar recursos de cálculo integral em [5], Saraiva prova que:

*Existe um tetraedro que é Cavalieri equivalente a um elipsóide dado.*

Inspirado por esse trabalho e pelo princípio de Cavalieri, provamos que:

*Existe um prisma que é Cavalieri equivalente a um dado paraboloide circular  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = cz$ , limitado por um plano.*

## 2. Princípio de Cavalieri

Cavalieri desenvolveu dois princípios para o cálculo de áreas e volumes:

1. Sejam  $R$  e  $S$  figuras planas incluídas entre um par de retas paralelas. Suponha que, para toda reta  $s$  paralela ao par de retas dadas, as interseções de  $R$  e  $S$  com  $s$  sejam vazias ou sejam segmentos de comprimentos iguais. Então as áreas de  $R$  e  $S$  são iguais.
2. Sejam  $P_1$  e  $P_2$  sólidos contidos entre um par de planos. Suponha que qualquer plano  $\beta$ , paralelo aos primeiros planos, que intersecta um dos sólidos também intersecta o outro e determina nesses sólidos secções de mesma área, então  $P_1$  e  $P_2$  tem volumes iguais.

Dois sólidos que satisfazem o segundo princípio são chamados Cavalieri equivalentes. Um exemplo é dado considerando uma pirâmide e um cone, com bases num mesmo plano, mesma área da base  $A$  e altura  $h_1$ . Traçamos a secção transversal do cone e da pirâmide em uma mesma altura  $h_2$ , como na Figura 2.

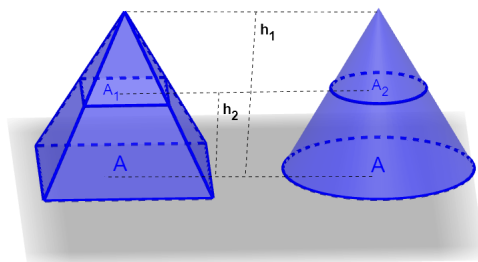


Figura 2. Princípio de Cavalieri.

Por semelhança

$$\begin{cases} \frac{A_1}{A} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 \\ \frac{A_2}{A} = \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow A_1 = A_2.$$

Pelo princípio de Cavalieri segue que o volume do cone é igual ao volume da pirâmide que é

$$\frac{1}{3} \text{Área da Base} \times \text{altura}.$$

Para obter o volume do parabolóide circular limitado por um plano, usaremos o segundo princípio de Cavalieri.

### 3. Teorema Principal

Existe um prisma que é Cavalieri equivalente a um dado parabolóide circular  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = cz$ , limitado por um plano.

*Demonstração.* Considere o parabolóide circular de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = cz,$$

onde  $a$  e  $c$  são constantes. Considere também o plano  $z = k$ , onde  $k$  é uma constante.

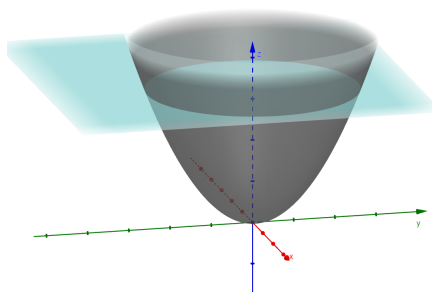


Figura 3. Parabolóide de revolução.

Tome no plano  $z = k$  o quadrado de lado  $a\sqrt{ck}\sqrt{\pi}$ , cujos lados são paralelos aos eixos  $Ox$  e  $Oy$ , e suas diagonais se intersectam no ponto  $P(0, 0, k)$ . Tome também os pontos  $A\left(\frac{a\sqrt{ck}\sqrt{\pi}}{2}, 0, 0\right)$ ,  $B\left(-\frac{a\sqrt{ck}\sqrt{\pi}}{2}, 0, 0\right)$  e considere o segmento  $\overline{AB}$ . Observe que, ao conectar os vértices do quadrado, cujas coordenadas satisfazem  $x > 0$ , ao ponto  $A$ , e os vértices cujas coordenadas satisfazem  $x < 0$  ao ponto  $B$ , obtemos um prisma cuja base é um triângulo equilátero. Consulte a seguir a figura 4.

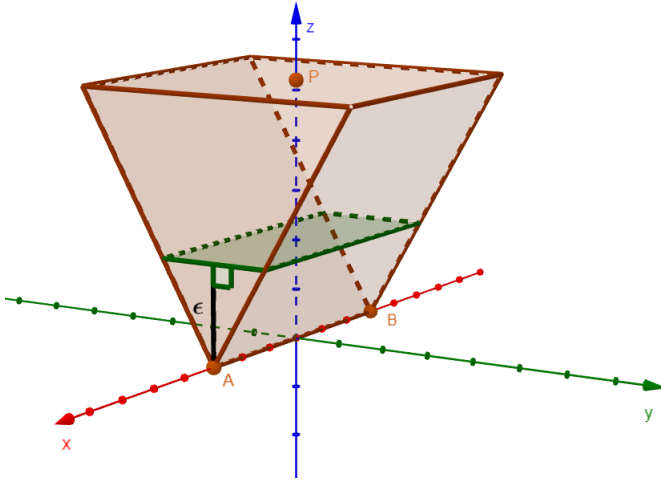


Figura 4. Prisma.

No nível  $\epsilon \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \epsilon \leq k$ , o plano paralelo ao plano  $xy$  determina, no parabolóide circular, a secção dada por uma circunferência de raio  $a\sqrt{c\epsilon}$ , cuja área é dada por:

$$\begin{aligned}
 A_{\epsilon} &= \pi(a\sqrt{c\epsilon})^2 \\
 &= \pi a^2 c \epsilon.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, a secção do prisma pelo mesmo plano é um retângulo de lados de medida  $l = a\sqrt{\pi ck}$ , paralelo ao segmento  $\overline{AB}$ , e de medida  $m$ , paralelo ao eixo  $Oy$ . Por semelhança de triângulos,

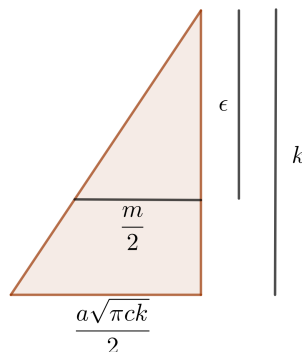


Figura 5.

Segue que

$$\frac{k}{\epsilon} = \frac{a\sqrt{\pi ck}}{m},$$

que permite calcular a área da secção retangular, fornecendo

$$\begin{aligned}
 m.l &= \frac{\epsilon}{k} a\sqrt{\pi ck} \cdot a\sqrt{\pi ck} \\
 &= \frac{\epsilon}{k} a^2 \pi ck \\
 &= \epsilon a^2 \pi c \\
 &= A_{\epsilon}.
 \end{aligned}$$

Portanto, em qualquer nível  $\epsilon$  vale a igualdade da área do disco com a área do retângulo, que nos permite, pelo segundo princípio de Cavalieri, concluir que o volume do parabolóide circular limitado pelo plano  $z = k$  é dado por:

$$\frac{k^2}{2} a^2 c \pi.$$

□

## Referências

- [1] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. História da matemática. Editora Blucher, 2019.
- [2] BRISCHI, Gabriel; LEMES, Rafael; GOMES, Mauro Lucas. Movimentos para o cálculo no século XVII. Trabalho apresentado na disciplina História da Matemática I . [sl]: [sn], [sd]. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/mod/publication/view.php?id=4925373&download=129587028>.
- [3] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana. Atual, 1993.
- [4] DOMINGUES, Hygino Hugueros; EVES, Howard. Introdução à história da matemática. 1. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.
- [5] SARAIVA, José Cloves V. O Volume do Elipsóide no Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, RPM 52, p.21-24, 2003. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/52/5.htm>. Acesso em: 10 de abril de 2024.
- [6] WINTERLE, Paulo; STEINBRUCH, Alfredo. Geometria analítica. Makron Books, São Paulo, 2000.

Anderson Lima  
Universidade Federal de Alagoas  
<[jose.lima@im.ufal.br](mailto:jose.lima@im.ufal.br)>

Adriano Lourenço  
Universidade Federal de Alagoas  
<[adrianolous77@outlook.com](mailto:adrianolous77@outlook.com)>

Cleisiane Fernandes  
Universidade Federal de Alagoas  
<[cleisiane.fernandes@im.ufal.br](mailto:cleisiane.fernandes@im.ufal.br)>

Recebido: 29/10/2024

Publicado: 20/12/2024