

Empacotamento de retângulos em polígonos

Hector Flores Callisaya 

Geisiane de Moura Vettorazzi 

Resumo

Este trabalho apresenta a formulação de um modelo de programação linear inteira para a otimização do empacotamento de retângulos em um domínio poligonal especificado. O problema é definido como a determinação da disposição de retângulos, com possibilidade de rotação de noventa graus, visando maximizar a utilização da área disponível em um domínio delimitado por inequações lineares. O modelo proposto aborda desafios relacionados à eficiência no uso do espaço, às restrições geométricas e à viabilidade das soluções.

Palavras-chave: Geometria Computacional; Problemas de Empacotamento.

Abstract

This work presents the formulation of an integer linear programming model for optimizing the packing of rectangles within a specified polygonal domain. The problem is defined as determining the arrangement of rectangles, including the possibility of ninety-degree rotation, aiming to maximize the utilization of the available area in a domain bounded by linear inequalities. The proposed model addresses challenges related to space efficiency, geometric constraints, and solution feasibility.

Keywords: Computational Geometry; Packing Problems.

1. Introdução

Os problemas de corte e empacotamento são encontrados em diversas áreas industriais, com o objetivo comum de otimizar a utilização de material. Nesses problemas, um objeto maior, geralmente retangular é dividido em peças menores, também retangulares com dimensões específicas. A indústria de papel e plástico, por exemplo, enfrenta o desafio de cortar grandes rolos em folhas menores, enquanto a madeira busca transformar toras em tábuas de medidas padronizadas. Na metalurgia, a otimização ocorre no corte de barras em peças menores, e na indústria têxtil, na divisão de rolos de tecido em moldes para confecção de roupas [13]. Em todos esses casos, o objetivo é maximizar a quantidade de peças obtidas, minimizando o desperdício de material e consequentemente, os custos de produção.

A qualidade do ensino de ciências e matemática é essencial em todos os níveis de escolaridade. Para aprimorar esse processo, professores buscam constantemente novas metodologias, como jogos e experimentos, com o objetivo de tornar o aprendizado mais eficaz e envolvente. Assim, apresenta-se o seguinte problema:

Problema 1. Dada uma folha de papel A4 com dimensões padrão (210mm x 297mm), determina-se o padrão de corte ótimo que maximiza a quantidade de retângulos com dimensões w e h (em centímetros), permitindo translações e rotações de 90 graus.

No processo de solução do problema 1 utilizando o método de tentativa e erro, podem ser destacadas as seguintes etapas que contribuem para o aprendizado:

1. Identificação de combinações de cortes: A geração de todas as possíveis formas de corte da folha de papel apresenta desafios significativos, devido à ampla gama de alternativas.
2. Medição da área aproveitada: Em cada tentativa é necessário calcular a área total ocupada pelos retângulos, o que permite avaliar a eficiência de cada padrão de corte.
3. Comparação de soluções: A análise comparativa das soluções obtidas possibilita a identificação daquela que maximiza a utilização da área disponível, minimizando o desperdício e aproximando-se da solução ideal.

Apesar disso, é importante ressaltar que ao utilizar o método de tentativa e erro, é pouco provável encontrar a solução ótima que maximiza a área utilizada e minimiza o desperdício de material. Essa dificuldade se deve à natureza NP-completa desse tipo de problema [7], portanto, encontrar a solução exata de forma eficiente é um desafio.

Estudos amplamente documentados sobre corte e empacotamento de retângulos em domínios convexos, como os apresentados em [1], [12] e [3], enfatizam a modelagem do problema por meio de programação linear inteira. Esses trabalhos abordam domínios convexos, definidos como aqueles nos quais qualquer segmento de reta entre dois pontos está contido no domínio, considerando translações e rotações de 90 graus. O objetivo principal é otimizar o uso do material e minimizar o desperdício, especialmente em aplicações industriais.

Este trabalho concentra-se no problema de maximizar a quantidade de retângulos idênticos que podem ser empacotados em um contêiner, com foco na redução do desperdício em problemas de corte. Consideram-se translações e rotações de 90 graus para os retângulos. Problemas relacionados, como o empacotamento de retângulos com dimensões distintas ou outros tipos de itens, têm sido amplamente estudados na literatura [1], [4], [6]. Diversas abordagens heurísticas têm sido desenvolvidas para resolver problemas de corte e empacotamento [2], [6]. A modelagem matemática desses problemas apresenta desafios intrínsecos, devido à geometria do contêiner ou domínio e aos movimentos permitidos. Ademais, a eficácia do modelo matemático está diretamente vinculada às hipóteses assumidas, como destacado em [4] e [3].

Nas seções que seguem, os problemas abordados neste trabalho são detalhados de forma estruturada. Na Seção 2, apresentam-se as definições formais dos conceitos fundamentais utilizados ao longo do artigo. A Seção 3 introduz o conceito de corte e empacotamento, explorando suas principais características. Na Seção 4, desenvolve-se a modelagem matemática para sobreposição e inclusão, considerando exclusivamente retângulos de dimensões iguais. Posteriormente, na Seção 5, é calculado um limitante superior para o problema de corte. A Seção 6 descreve os resultados numéricos obtidos a partir dos modelos propostos, discutindo sua eficiência. Por fim, na Seção 7, discute-se o potencial do problema de corte como uma ferramenta lúdica no ensino de geometria e otimização, destacando seu papel no aprimoramento do aprendizado dos estudantes.

2. Noções Preliminares

Seja o sistema de m equações lineares com n incógnitas:

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n \leq b_1 \quad (1)$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n \leq b_2 \quad (2)$$

⋮

$$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n \leq b_m \quad (m)$$

Definição 1. Uma n -upla (x_1, x_2, \dots, x_n) que satisfaz as inequações (1) a (m) do sistema é chamado de solução do sistema conjuntivo.

Definição 2. Uma n -upla (x_1, x_2, \dots, x_n) que satisfaz ao menos uma inequação (1) a (m) do sistema é chamado de solução do sistema disjuntivo.

Os sistemas conjuntivos exigem que todas as condições sejam satisfeitas simultaneamente. Em contrapartida, os sistemas disjuntivos permitem que ao menos uma das condições seja verdadeira, refletindo-se em soluções alternativas ou variáveis com diferentes valores possíveis.

Exemplo 1. Seja o sistema conjuntivo

$$x \leq 1, \quad (1)$$

$$-x \leq 1. \quad (2)$$

Neste caso, a variável x deve satisfazer simultaneamente as inequações (1) e (2). Ver Figura 1(a).

Exemplo 2. Seja o sistema disjuntivo

$$x \geq 1, \quad (3)$$

$$x \leq -1. \quad (4)$$

Neste caso, a variável x deve satisfazer pelo menos uma das inequações (3) e (4). Ver Figura 1(b).



(a) Conjunto Solução

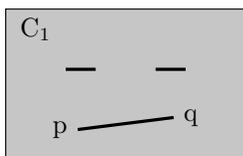


(b) Conjunto Solução

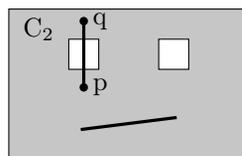
Figura 1: Representação gráfica do conjunto solução de um sistema linear conjuntivo 1(a) e de um sistema disjuntivo 1(b).

Conjuntos convexos são caracterizados por conter todos os segmentos cujos extremos pertencem ao conjunto. Ver Figura 2.

Definição 3. Um subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de conjunto convexo se para quaisquer $p, q \in C$ e $\alpha \in [0, 1]$, tem-se $\alpha p + (1 - \alpha) q \in C$.



(a) Conjunto convexo



(b) Conjunto não convexo

Figura 2: O conjunto C_1 2(a) é um conjunto convexo, pois qualquer segmento de reta está contido em C_1 . Contudo, o conjunto C_2 2(b) não é convexo, uma vez que o segmento que une p e q não está contido em C_2 .

O conjunto vazio, o plano \mathbb{R}^2 , e o conjunto que contem um ponto são conjuntos convexos.

Exemplo 3. Qualquer semi-plano C em \mathbb{R}^2 é um conjunto convexo, ou seja, se

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by \leq c\}$$

onde $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e $c \in \mathbb{R}$ é convexo.

Definição 4. Um subconjunto C de \mathbb{R}^n é limitado, quando existe $M > 0$ tal que $\|p\| \leq M$ para todo $p \in C$.

Definição 5. Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto qualquer. O fecho convexo de D , denotado $\text{conv}(C)$, é o menor subconjunto convexo em \mathbb{R}^n que contém D (ou, equivalentemente, a interseção de todos os conjuntos convexos em \mathbb{R}^n que contém C).

O fecho convexo de dois pontos p e q em \mathbb{R}^2 é o segmento cujos extremos são p e q .

3. Problemas de Corte ou Empacotamento

Adotou-se a definição apresentada em [5] como base para a elaboração do modelo matemático.

Definição 6. Seja $P \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto limitado e convexo. Dado uma sequência de retângulos $\mathcal{P} = \{R_1, R_2, \dots, R_m\}$, dizemos que sequência \mathcal{P} é um empacotamento ou corte em P se as seguintes condições forem satisfeitas:

1. $R_i \subset P$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, ou seja, cada retângulo R_i está completamente contido em P .
2. A interseção entre quaisquer dois retângulos é vazia, ou seja, $A(R_i \cap R_j) = 0$ para todo $i \neq j$, onde $A(\cdot)$ denota a área da interseção dos retângulos.

O conjunto P é denominado *domínio de corte ou empacotamento*, é geralmente descrito por um sistema de inequações lineares ou não lineares. No restante deste trabalho, assumiremos que P é descrito por um número finito de inequações lineares, isto é, P é um polígono.

Em problemas de otimização de corte ou empacotamento de retângulos, o objetivo principal é, dado um domínio P , determinar o empacotamento que maximize a quantidade de retângulos dispostos no interior do domínio P . A formulação desse problema pode ser expressa da seguinte forma:

$$\max \{m \in \mathbb{Z} \mid \{R_1, R_2, \dots, R_m\} \text{ é um empacotamento de } P\} \quad (5)$$

Na Figura 3, é apresentado um corte $\{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10}\}$ de triângulo equilátero P .

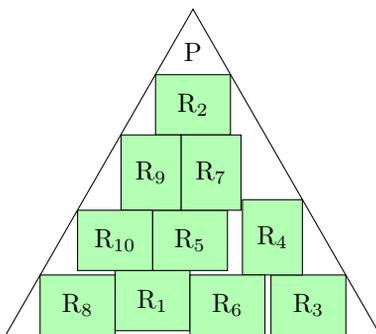


Figura 3: Corte de um triângulo equilátero

4. Modelo de Programação Inteira Mista

Seja $\{R_1, \dots, R_m\}$ um conjunto de m retângulos, cada um definido por sua largura w_i , altura h_i e centro (x_i, y_i) para $i = 1, \dots, m$; o problema consiste em encontrar a configuração mais eficiente de cortá-los ou empacotá-los, permitindo translações em qualquer direção e rotação de noventa graus.

Considere um retângulo com dimensões w e h . Para modelar a rotação, introduzimos uma variável binária r , isto é, que assume os valores 0 ou 1. A variável r indica se o retângulo está na orientação original ($r = 0$) ou rotacionado em noventa graus no sentido anti-horário ($r = 1$). As variáveis que assumem valores binários e representam escolhas entre duas alternativas são comumente denominadas variáveis binárias ou *disjuntivas*.

Desta forma, podemos definir a transformação de noventa graus no sentido anti-horário da seguinte maneira:

$$w_r = (1 - r)w + rh, \quad (6)$$

$$h_r = rw + (1 - r)h. \quad (7)$$

Quando $r = 0$, não temos rotação, pois:

$$w_0 = w,$$

$$h_0 = h.$$

Quando $r = 1$, temos a rotação de noventa graus, pois:

$$w_1 = h,$$

$$h_1 = w.$$

Essas escolhas são mutuamente exclusivas, ou seja, o retângulo não pode estar simultaneamente nas duas orientações, como a figura 4.

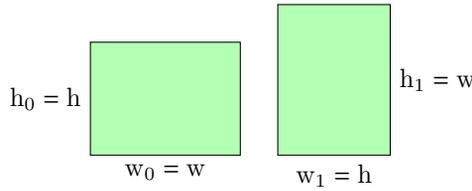


Figura 4: Retângulo com rotação de noventa graus

Consideremos um empacotamento de R_1, R_2, \dots, R_m em um domínio P . Para modelar as duas possíveis orientações, horizontal ou vertical, de cada retângulo, definem-se as variáveis binárias r_1, r_2, \dots, r_m para cada retângulo R_1, R_2, \dots, R_m , respectivamente, obtendo-se m variáveis binárias e as rotações possíveis do retângulo.

$$w_i = (1 - r_i)w + r_i h \quad (8)$$

$$h_i = r_i w + (1 - r_i)h \quad (9)$$

onde $i = 1, \dots, m$.

Para determinar se um retângulo de dimensões w e h pode ser considerado um corte viável ou um empacotamento dentro do domínio P , é necessário verificar se todos os seus vértices estão contidos no interior do domínio. Caso o domínio seja definido por inequações algébricas, essa verificação equivale a assegurar que os vértices do retângulo satisfaçam as inequações que descrevem o domínio P

Lema 1. *Um retângulo R_i de vértices $v^{i,pp}, v^{i,np}, v^{i,nn}$ e $v^{i,pn}$, está contido no domínio P se, e somente se, todos os vértices do retângulo R_i estão contidos no domínio P , isto é $v^{i,l} \in P$, para todo $l \in \{pp, np, nn, pn\}$ onde*

$$v^{i,pp} = \left(x_i + \frac{w_i}{2}, y_i + \frac{h_i}{2} \right) \quad (10)$$

$$v^{i,np} = \left(x_i - \frac{w_i}{2}, y_i + \frac{h_i}{2} \right) \quad (11)$$

$$v^{i,nn} = \left(x_i - \frac{w_i}{2}, y_i - \frac{h_i}{2} \right) \quad (12)$$

$$v^{i,pn} = \left(x_i + \frac{w_i}{2}, y_i - \frac{h_i}{2} \right) \quad (13)$$

Demonstração. Por hipótese, o domínio P é um conjunto convexo e cada retângulo R_i é um conjunto convexo limitado que possui quatro vértices, portanto, se os vértices $v^{i,pp}, v^{i,np}, v^{i,nn}, v^{i,pn}$ do retângulo estão no conjunto P , o fecho convexo também está contido em P , e

$$R_i = \text{conv}(\{v^{i,pp}, v^{i,np}, v^{i,nn}, v^{i,pn}\}) \subset P \quad (14)$$

□

Embora a condição de que todos os vértices de um retângulo estejam contidos em um domínio seja necessária para que o retângulo esteja completamente dentro do domínio, ela não é suficiente. A convexidade do domínio é fundamental para garantir a inclusão total do retângulo no domínio.

Para garantir um corte ou empacotamento válido, é essencial que não haja sobreposição entre os retângulos. Para isso, estabelecem-se condições algébricas que determinam se dois retângulos se intersectam. Fixando um retângulo R_i , considera-se as diferentes posições de outro retângulo de modo que não haja sobreposição, conforme ilustrado na figura 5, assegurando que a área da sobreposição seja nula.

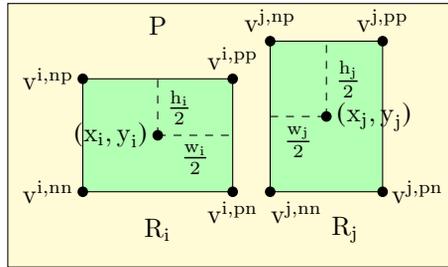


Figura 5: Sobreposição e inclusão

Lema 2. Dado um par de retângulos R_i e R_j , não há sobreposição entre eles se, e somente se, uma das seguintes inequações for satisfeita:

$$\frac{1}{2}(w_i + w_j) \leq x_i - x_j, \quad \forall i < j, \quad (15)$$

$$\frac{1}{2}(w_i + w_j) \leq x_j - x_i, \quad \forall i < j, \quad (16)$$

$$\frac{1}{2}(h_i + h_j) \leq y_i - y_j, \quad \forall i < j, \quad (17)$$

$$\frac{1}{2}(h_i + h_j) \leq y_j - y_i, \quad \forall i < j, \quad (18)$$

para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Demonstração. Dado um retângulo R_i , com centro em (x_i, y_i) , consideramos quatro possíveis translações para outro retângulo R_j , com centro em (x_j, y_j) . Com respeito à separação dos retângulos na direção do eixo x . Se o retângulo R_j estiver à direita do retângulo R_i , para evitar sobreposição, a distância é maior ou igual à metade da soma das larguras dos dois retângulos, isto é, deve-se satisfazer a inequação 16, conforme mostrado na Figura 5. Outra possibilidade é a translação de R_j para o lado esquerdo do retângulo R_i , a distancia dos centros é maior ou igual a metade da soma das larguras dos dois retângulos, neste caso R_i esta completamente a direita de R_j , caso em que a inequação 15 deve ser satisfeita. Similarmente, com respeito ao movimento do retângulo R_j em relação ao eixo y , se R_j estiver acima de R_i , a distância vertical deve ser maior que a média das alturas, conforme a inequação 18. Da mesma forma, se R_j estiver abaixo de R_i , a inequação 17 deve ser satisfeita. \square

O lema 2 fornece uma forma algébrica de determinar se dois retângulos se sobrepõem. No entanto, como apenas uma das restrições precisa ser satisfeita para garantir a não sobreposição, a verificação da não sobreposição de um conjunto de retângulos envolve a resolução de um sistema de restrições disjuntivas, a saber, as inequações (15), (16), (17) e (18).

4.1. Equações para o Empacotamento de Quadrados em Poliedros

Quando restrições impõem a escolha de uma única condição entre várias alternativas, empregam-se variáveis binárias e o método M-grande. As variáveis binárias indicam a condição selecionada em cada solução, enquanto o método M-grande permite reformular restrições inativas, tornando-as irrestritas.

Exemplo 4. Seja o conjunto Ω um subconjunto limitado do plano euclidiano definido pelas restrições disjuntivas:

$$ax + by \leq 0 \quad (19)$$

$$cx + dy \leq 0, \quad (20)$$

onde $x, y \geq 0$. Como o conjunto Ω é limitado, existe $M > 0$ tal que:

$$ax + by \leq M \text{ e } cx + dy \leq M. \quad (21)$$

para todo (x, y) em Ω .

Para que somente uma das restrições (19) ou (20) seja satisfeita, define-se a variável binária r tal que:

$$ax + by \leq M \cdot r \quad (22)$$

$$cx + dy \leq M \cdot (1 - r). \quad (23)$$

Como resultado, obtém-se um sistema (22 - 23) com variáveis $x, y \in \Omega$ reais e $r \in \{0, 1\}$ binárias.

Teorema 1. O conjunto de retângulos $\{R_1, \dots, R_m\}$ de lados w_i e h_i é um empacotamento ou corte no domínio P se, e somente se, existe $M > 0$ tal que:

$$\frac{1}{2}(w_i + w_j) + x_i - x_j \leq M q_{i,j}^{xp}, \quad \forall i < j, \quad (24)$$

$$\frac{1}{2}(w_i + w_j) - x_i + x_j \leq M q_{i,j}^{xn}, \quad \forall i < j, \quad (25)$$

$$\frac{1}{2}(h_i + h_j) + y_i - y_j \leq M q_{i,j}^{yp}, \quad \forall i < j, \quad (26)$$

$$\frac{1}{2}(h_i + h_j) - y_i + y_j \leq M q_{i,j}^{yn}, \quad \forall i < j, \quad (27)$$

$$q_{i,j}^{xp} + q_{i,j}^{xn} + q_{i,j}^{yp} + q_{i,j}^{yn} = 3, \quad \forall i < j, \quad (28)$$

$$v^{i,l}(x_i, y_i) \in P, \quad \forall l = 1, 2, 3, 4. \quad (29)$$

sendo $q_{i,j}^k \in \{0, 1\}$, $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ e os vértices do retângulo R_i estão contidos no domínio, isto é: $v^{i,l}(x_i, y_i) \in P$, $\forall l \in \{pp, np, nn, pn\}$.

Demonstração. Seja R_i com $i = 1, \dots, m$, um empacotamento ou corte e $(x_i, y_i) \in P$ os centros dos retângulos, de lados w_i e h_i . Como P é um conjunto limitado, então o conjunto definido pelas restrições (15),(16),(17),(18) é limitado, por tanto existe um número $M > 0$ tal que satisfaz as restrições lineares

conjuntivas,

$$\frac{1}{2}(w_i + w_j) + x_i - x_j \leq M, \quad \forall \quad i < j, \quad (30)$$

$$\frac{1}{2}(w_i + w_j) - x_i + x_j \leq M, \quad \forall \quad i < j, \quad (31)$$

$$\frac{1}{2}(h_i + h_j) + y_i - y_j \leq M, \quad \forall \quad i < j, \quad (32)$$

$$\frac{1}{2}(h_i + h_j) - y_i + y_j \leq M, \quad \forall \quad i < j, \quad (33)$$

Pelo lema 2, apenas uma das inequações (15),(16),(17),(18) é verdadeira. Assim, existe uma variável binária $q_{i,j}^1$ para indicar se a inequação é verdadeira ou não, sendo $q_{i,j}^1 = 0$ se é verdadeira e $q_{i,j}^1 = 1$ um caso contrário. Desta forma, obtemos as restrições (25),(24),(27),(26). Como os retângulos estão contidos no domínio, em particular os vértices pertencem ao domínio P.

Reciprocamente, as inequações (25),(24),(27),(26) e a equação de ativação (28), garantem que não existe sobreposição, por tanto $A(R_i \cap R_j) = 0$, e o lema 1, assegura que a sequência de retângulos é um empacotamento ou corte no domínio P. \square

Como consequência do teorema 1, para verificar a viabilidade de um determinado corte ou empacotamento, reduz-se o problema à verificação da satisfação de um conjunto de restrições conjuntivas com variáveis mistas, reais e inteiros. Consequentemente, a eficiência na busca por um empacotamento é determinada pela existência de um modelo matemático adequado e o método usado para resolver restrições mistas.

O principal desafio em problemas de corte consiste em maximizar a quantidade de cortes, minimizando o desperdício. Essa otimização, por sua vez, implica um aumento no número de itens m , e, consequentemente, no número de restrições a serem verificadas. No caso particular da verificação de sobreposição, é necessário resolver um sistema linear com $3m$ variáveis, e

$$\frac{5}{2}m(m - 1) \quad (34)$$

restrições e

$$4km \quad (35)$$

restrições para verificar a inclusão, sendo k o numero de restrições que determina o domínio. Na Figura 6, observa-se o crescimento quadrático do número de restrições.

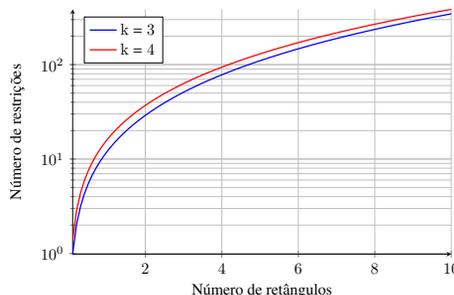


Figura 6: $\frac{5}{2}m(m - 1) + 4k m$

5. Limitante Superior para o Número de Retângulos

O problema de corte consiste em determinar a melhor maneira de dividir uma peça maior (o domínio) em peças menores (retângulos) de forma a minimizar o material desperdiçado. Em outras palavras, busca-se maximizar o número de retângulos que podem ser acomodados dentro do domínio, permitindo rotações de noventa graus, mas encontrar o número máximo não é uma tarefa fácil, pois é necessário resolver as restrições disjuntivas.

Considerando um domínio P e retângulos com lados w_i e h_i , é possível calcular um limitante superior para o número de itens que pode ser obtido. De fato:

$$\begin{aligned} R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_m &\subset P \\ m A(R_1) &\leq A(P), && \text{pois } A(R_j) = A(R_i), \forall j = 2, \dots, m \\ m &\leq \frac{A(P)}{w h}, && A(R_1) = w h. \end{aligned}$$

$$m \leq \left\lfloor \frac{A(P)}{w h} \right\rfloor \quad (36)$$

Portanto, valor (36) representa um limite superior para o número de retângulos que podem ser empacotados no domínio. A igualdade só é atingida quando é possível aproveitar 100% do espaço disponível.

6. Experimentos Numéricos

Os resultados numéricos apresentados nesta seção foram obtidos através de experimentos computacionais realizados em um sistema Linux com as seguintes características: processador AMD A10-5800B APU, 4 GB de memória RAM e sistema operacional Ubuntu 20.04 LTS. A biblioteca de programação linear GLPK [8], acessada por meio da interface de modelagem JuMP em linguagem Julia [10], foi utilizada para resolver as restrições lineares com variável mista.

Os domínios considerados para os experimentos são: um retângulo de largura W e altura H (Figura 37), um triângulo retângulo (Figura 38) e um triângulo isósceles (Figura 39). Nestes três casos, o domínio é descrito por restrições lineares, permitindo a utilização de um solver de programação linear mista. No entanto, a abordagem pode ser estendida a qualquer domínio convexo.

Sejam P_1, P_2 e P_3 domínios definidos como:

$$P_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \begin{cases} -\frac{W}{2} \leq x \leq \frac{W}{2} \\ -\frac{H}{2} \leq y \leq \frac{H}{2} \end{cases} \right\} \quad (37)$$

$$P_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \begin{cases} -\frac{W}{2} \leq x \leq \frac{W}{2} \\ -\frac{H}{W} x + y \leq 0 \end{cases} \right\} \quad (38)$$

$$P_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \left| \begin{array}{l} -\frac{H}{2} \leq y \\ -\frac{2H}{W}x + y \leq \frac{H}{2} \\ \frac{2H}{W}x + y \leq \frac{H}{2} \end{array} \right. \right\} \quad (39)$$

Para a validação experimental, foram consideradas as dimensões padrão de uma folha A4, com largura $W = 21,0$ cm e altura $H = 29,7$ cm. A partir dessa folha, foram definidos diferentes domínios geométricos, como um triângulo retângulo, um triângulo isósceles e outras formas poligonais convexas. Esses domínios estão representados nas Figuras 7(a), 7(b) e 7(c), e servirão como base para os experimentos numéricos apresentados ao longo deste trabalho.

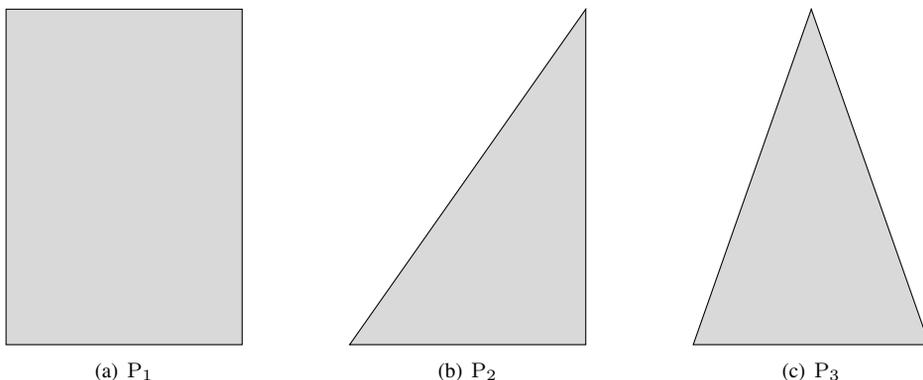


Figura 7: Representação dos domínios convexas P_1 , P_2 e P_3 , utilizados em problemas de corte e empacotamento.

O método proposto é um algoritmo guloso que busca maximizar o número de retângulos de dimensões fixas (largura w e altura h) que podem ser cortados em uma folha maior, considerando rotações de noventa graus. O algoritmo inicia com um retângulo e incrementa esse número iterativamente, isto é, fazemos $m \leftarrow m + 1$, até que não seja mais possível acomodar os m retângulos dentro da folha, isto é: o sistema (25),(24),(27),(26) não tem solução factível, e definimos como solução ótima igual a: $m - 1$. A fim de garantir a viabilidade computacional dos experimentos, estabelecemos um tempo máximo de execução de 10 minutos para a resolução de cada instância do sistema disjuntivo.

A Figura 8 apresenta alguns exemplos de soluções obtidas pelo algoritmo. É importante ressaltar que, devido à natureza heurística do algoritmo, as soluções encontradas podem não ser ótimas.

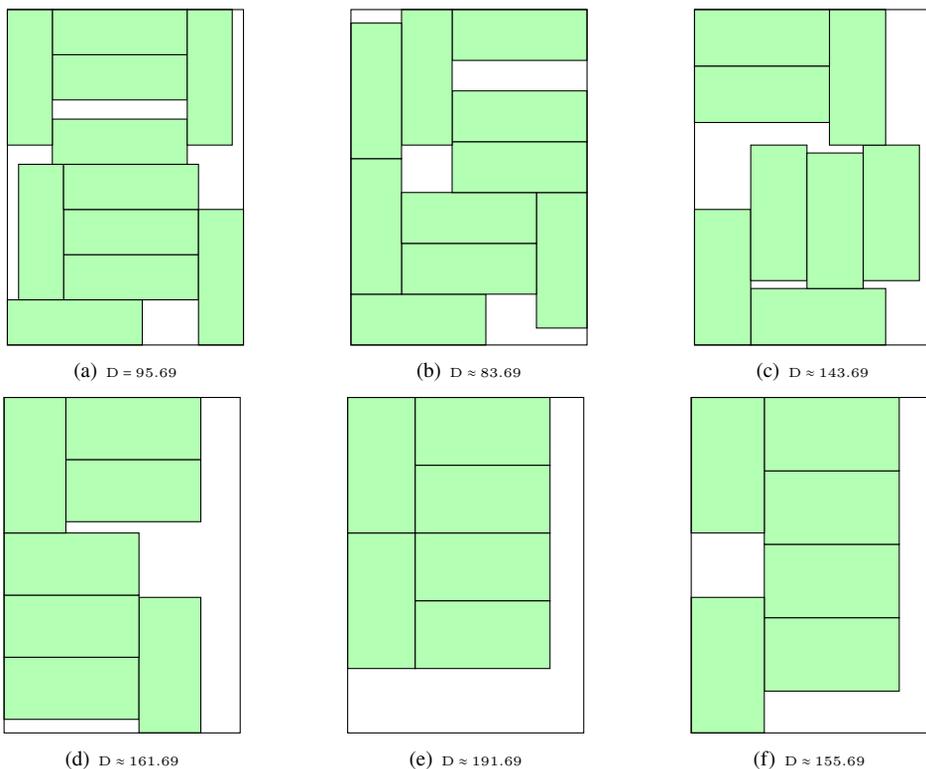


Figura 8: Corte ótimo de uma folha A4 P_1 , com dimensões $W = 21.0$ cm $H = 29.7$ cm.

Em cada solução encontrada, calcularam-se a área total do domínio, a área efetivamente utilizada nos cortes e a área de material não aproveitada, ou seja, o desperdício. A Tabela 1 apresenta um resumo dos resultados obtidos para todas as soluções avaliadas. A melhor solução, que minimiza o desperdício, foi encontrada utilizando retângulos com dimensões de 12 cm x 4,5 cm, resultando em um desperdício de 83,69 cm^2 , conforme apresentado na Figura 8(b).

Corte	Base	Altura	Solução	Desperdício	Densidade	Limitante
8(a)	12	4	11	95.69	84.66%	12.99
8(b)	12	4.5	10	83.69	86.58%	11.54
8(c)	12	5	8	143.69	76.95%	10.39
8(d)	12	5.5	7	161.69	74.95%	9.45
8(e)	12	6	6	191.69	69.95%	8.66
8(f)	12	6	6	155.69	75.03%	7.99

Tabela 1: Resultados obtidos pelo solver GLPK para o domínio P_1 , com dimensões $W = 21,0$ cm e $H = 29,7$ cm.

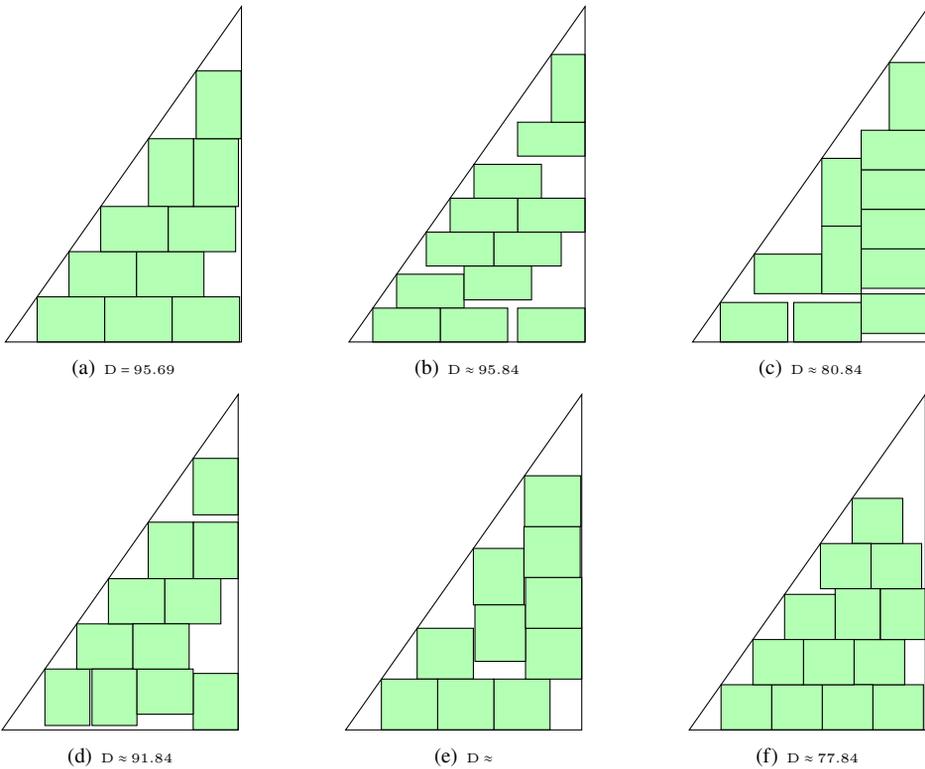


Figura 9: Corte de uma folha triangular P_2 com área 311.84

Corte	Largura	Altura	Solução	Desperdício	Densidade	Limitante
9(a)	6	4	10	71.84	76.95%	12.99
9(b)	6	3	12	95.84	69.30%	17.32
9(c)	6	2.5	11	80.84	74.08%	14.84
9(d)	5	4	11	91.84	70.56%	15.59
9(e)	5	4.5	10	86.84	72.22%	13.85
9(e)	4.5	4.0	13	77.84	75.03%	17.32

Tabela 2: Resultados obtidos pelo solver GLPK para o domínio P_2 , com dimensões $W = 21,0$ cm e $H = 29,7$ cm

A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos para diferentes configurações de corte em um domínio triangular. Para cada configuração, foram calculadas a área total do triângulo, a área total dos retângulos e a área de desperdício. A Figura 9(a) ilustra a configuração de corte que resultou no maior aproveitamento do material, com 76,95% da área do triângulo sendo utilizada.

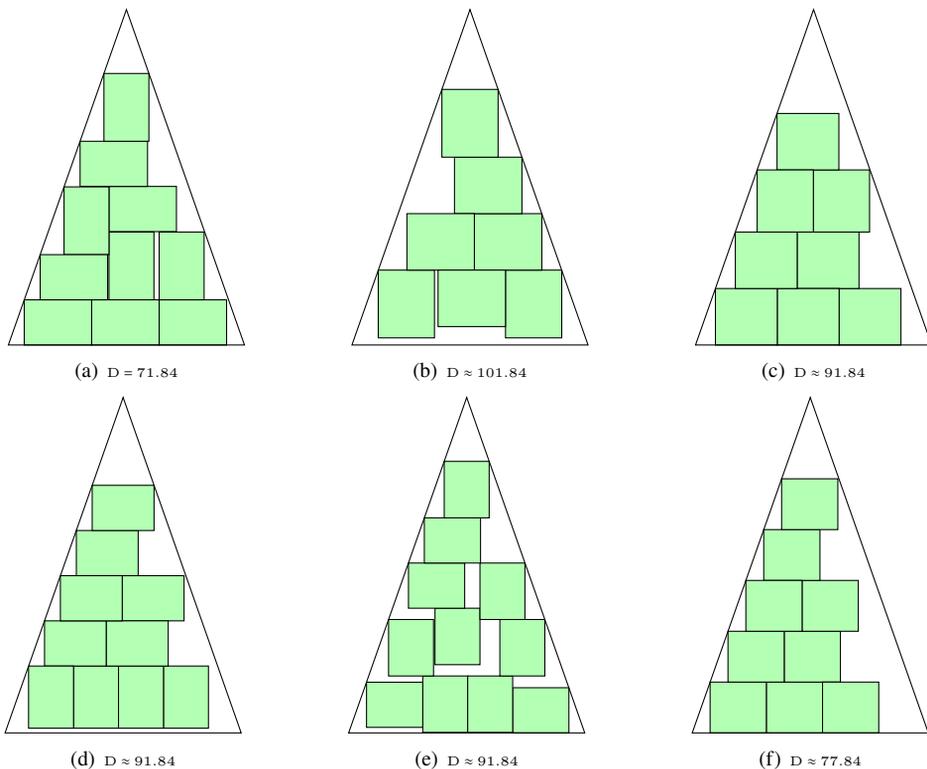


Figura 10: Corte um domínio triangular P_3 com área 311.84

Corte	Largura	Altura	Solução	Desperdício	Densidade	Limitante
10(a)	6	4	10	71.84	76.95%	12.99
10(b)	6	5	7	101.84	67.35%	10.39
10(c)	5.5	5	8	91.84	70.56%	11.33
10(d)	5.5	4	10	91.84	70.56%	14.17
10(e)	5	4	11	91.84	70.56%	15.59
10(e)	5	4.5	9	109.34	64.94%	13.85

Tabela 3: Resultados obtidos para o domínio P_3 com área de 311,84.

Em um triângulo isósceles, a configuração de corte que maximizou o aproveitamento do material, conforme demonstrado na Tabela 3 e na Figura 10(a), resultou em um aproveitamento de 76,93%.

7. Aplicações de Problemas de Corte no ensino

O problema de corte e empacotamento pode ser utilizado como uma aplicação prática no ensino, integrando teoria e prática de maneira significativa. Desde os anos iniciais, em que os estudantes começam a explorar conceitos básicos de geometria, até o ensino superior, onde são abordados tópicos mais avançados de otimização, esse problema pode ser adaptado para estimular o desenvolvimento de habilidades como visualização espacial, resolução de problemas e pensamento crítico.

A exploração de diferentes formas de corte e organização de materiais possibilita a aplicação de conceitos matemáticos fundamentais, como área, perímetro e proporção, ao mesmo tempo em que promove o desenvolvimento de competências voltadas à modelagem matemática e à solução de problemas reais. Essa abordagem prática torna os conceitos abstratos mais acessíveis e relevantes para os alunos.

A inclusão de ferramentas computacionais e softwares de design na resolução do problema adiciona um elemento interativo ao processo de aprendizagem, tornando-o mais dinâmico e engajador. Além disso, esses recursos preparam os estudantes para desafios reais, unindo teoria e prática de forma coesa e eficiente.

As tabelas 1, 2 e 3 ilustram soluções possíveis para o problema 1, considerando diferentes dimensões de largura w e altura h , oferecendo um exemplo concreto de como esse problema pode ser explorado no ambiente educacional.

8. Conclusão

Foram estudados os problemas de corte ou empacotamento em domínios bidimensionais convexos. Calculou-se um limitante superior para a resolução desses problemas e desenvolveu-se uma modelagem matemática. Além disso, foram apresentados resultados numéricos que demonstram diferentes soluções possíveis. Por fim, propôs-se uma metodologia para otimizar o aprendizado através de experiências de corte e/ou empacotamento.

Os códigos-fonte completos em Julia dos algoritmos e modelos apresentados neste artigo estão disponíveis em <https://github.com/hector-fc/packrec/>.

Referências

- [1] Andrade, R.; Birgin, E. G. *Symmetry-breaking constraints for packing identical rectangles within polyhedra*. Optim. Lett. 7, No. 2, 375-405 (2013).
- [2] Assis, N. S.; Rangel, S. *Uma Heurística baseada EM programação dinâmica para o problema de corte bidimensional guilhotinado 2-estágios*. Trends Comput. Appl. Math. 23, No. 4, 683-703 (2022).
- [3] Beasley, J. E. *An Exact Two-Dimensional Non-Guillotine Cutting Tree Search Procedure*. Oper. Res. 33, p. 49-64 (1985).
- [4] Birgin, Ernesto G.; Bustamante, Luis Henrique; Callisaya, Hector Flores; Martínez, Jose Mario *Packing circles within ellipses*. Int. Trans. Oper. Res. 20, No. 3, 365-389 (2013).
- [5] Callisaya, H. F. *Packing on Quadrics*. PhD Thesis, Institute of Mathematics, Statistics and Scientific Computing, University of Campinas, 2012.
- [6] Cassioli, A.; Locatelli, M. *A heuristic approach for packing identical rectangles in convex regions*. Comput. Oper. Res. 38, 1342-1350 (2011).
- [7] Fowler, Robert J.; Paterson, Michael S.; Tanimoto, Steven L. *Optimal packing and covering in the plane are NP-complete*. Journal of The Franklin Institute, v. 12, n. 3, p. 133-137 (1981).
- [8] GNU Linear Programming Kit. *GLPK (GNU Linear Programming Kit)*. [<https://www.gnu.org/software/glpk/>], 2024.
- [9] Henniger, Michael L. *Learning Mathematics and Science through Play*. Journal of The Childhood Education 1987-feb vol. 63 iss. 3, p. 167-171 (1987).
- [10] Lubin, M.; Dowson, O.; Garcia, J. D. *JuMP 1.0: recent improvements to a modeling language for mathematical optimization*. Math. Program. Comput. 15, No. 3, 581-589 (2023).

- [11] Lodi, Andrea; Monaci, Michele *Integer linear programming models for 2-staged two-dimensional knapsack problems*. Math. Program. 94, No. 2-3 (B), 257-278 (2003).
- [12] López, C. O.; Beasley, J. E. *Packing unequal rectangles and squares in a fixed size circular container using formulation space search*. Comput. Oper. Res. 94, 106-117 (2018).
- [13] Salem, Khadija Hadj; Silva, Elsa; Oliveira, José Fernando; Carravilla, Maria Antónia. *Mathematical models for the two-dimensional variable-sized cutting stock problem in the home textile industry*. Eur. J. Oper. Res. 306, No. 2, p. 549-566 (2023).
- [14] Sawaya, N. W.; Grossmann, I. E. *A cutting plane method for solving linear generalized disjunctive programming problems*. Comput. Chem. Eng. 29, 1891-1913 (2005).
- [15] Silva, Alcina Maria Testa Braz da; Mettrau, Marsyl Bulkool; Barreto, Márcia Simão Linhares *O lúdico no processo de ensino-aprendizagem das ciências*. Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos (2019).

Hector Flores Callisaya
Universidade Federal de Mato Grosso
<hector.callisaya@ufmt.br>

Geisiane de Moura Vettorazzi
Universidade Federal de Mato Grosso
<geisiane.vettorazzi@sou.ufmt.br>

Recebido: 11/09/2024

Publicado: 20/12/2024