PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.9, n.3, 2021
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2021/pmo931

Polinômios e métodos numéricos interativos

Marlon Péricles da Silva Assis   Márcio Batista

Resumo

O presente trabalho aborda os métodos numéricos da Bissecção, Falsa Posição e de Newton para aproximação de zeros das funções polinomiais de qualquer grau, dados os intervalos em que essas funções se anulam ou quando podem ser deduzidas ou em cenários em que tais intervalos possam ser inferidos. Ressalta-se que o texto compreende a elaboração de algoritmos e demanda o pensamento computacional para resolução de problemas, em conformidade com os aspectos previstos na Base Nacional Comum Curricular. A utilização dos *softwares* educacionais Visual Cálculo Numérico e o Excel foi determinante para a eficiência dos algoritmos nos quesitos velocidade e precisão.

Palavras-chave: Métodos Numéricos; Funções Polinomiais; Algoritmos; Base Nacional Curricular Comum; *Softwares*.

Abstract

The present work deals with the numerical methods of Bissection, False Position and Newton to approximate zeros of polynomial functions of any degree, given the intervals in which these functions vanish, either when it can be deduced or in scenarios where such intervals can be inferred. It is noteworthy that this research comprises the elaboration of algorithms and demands computational thinking in order to solve problems in accordance with the aspects provided for the National Common Curricular Base. The use of the educational software Visual Numerical Calculation and Excel was decisive for the efficiency of the algorithms in terms of speed and accuracy.

Keywords: Numerical Methods; Polynomial Functions; Algorithms; Base Nacional Curricular Comum; Softwares.

1. Introdução

Neste artigo apresentamos, sucintamente, parte da pesquisa desenvolvida no trabalho de conclusão de curso Profmat do primeiro autor (2020), sob orientação do segundo autor, onde são propostas atividades para o desenvolvimento de um projeto audacioso em turmas do 3º ano do Ensino Médio. Tendo como pano de fundo as necessidades da sociedade e entendendo que o aluno deve habilitar-se para o pensamento computacional e ao mesmo tempo fazer uso das tecnologias digitais, e considerando o pensamento crítico e a autonomia do educando para investigar, criar modelos, e julgar resultados, no presente trabalho destacamos o uso dos métodos numéricos como ferramenta para aproximação dos zeros das funções polinomiais de qualquer grau.Tais métodos implementam algoritmos, considerando para isso uma dada precisão. Os zeros (raízes, como de costume se fala), quando conhecidos, possibilitam a aplicação em diversas áreas do conhecimento, principalmente no âmbito das Engenharias, onde a empregabilidade dos métodos numéricos é extremamente predominante.

Diversos *softwares* são utilizados para essa finalidade, desde o mais básico como o Excel, como também o Visual Cálculo Numérico (VCN), que é um *software* brasileiro desenvolvido por professores da PUC do estado de Minas Gerais, visando ser um ótimo auxílio para os estudantes do cálculo numérico. O programa é disponibilizado gratuitamente no *site*. Nossa primeira impressão foi que o *design* do VCN é simples e direto. Separadamente, assuntos como ajuste de curvas, cálculo de raízes, derivação, equações diferenciais, interpolação, integração, sistemas lineares, operadores, otimização e seus derivados. Além disso, disponibiliza cálculos de trocas de variáveis, calculadora, tabelas, entre outras ferramentas, tendo uma precisão de dezenove casas decimais. Ao selecionar um ícone qualquer, percebemos que abre uma guia, e se quisermos fazer outros cálculos basta minimizar a aba e selecionar outras, fazendo diferentes cálculos ao mesmo tempo, otimizando assim o tempo. Ao fazermos um teste com o cálculo de raízes, um exercício que leva longos minutos para achar a raiz, neste programa facilmente preenchem-se os dados e após segundos o *software* fornece-nos a raiz. A eficiência desempenhada pelo VCN é surpreendente.

2. Fundamentos Teóricos

Nesta seção apresentamos os rudimentos básicos e acessíveis aos estudantes do terceiro ano do Ensino Médio para que compreendam os métodos de aproximação de zeros de funções.

Apresentamos logo abaixo os conceitos de continuidade e derivabilidade. Ver (GUIDORIZZI, 2016) para uma abordagem elementar desses conceitos.

Definição 1 (Continuidade)**.** Seja uma função f definida em um intervalo aberto contendo x_0. f é dita contínua em x_0 se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Uma função é contínua em um intervalo se é contínua em todo ponto desse intervalo.

Definição 2 (A Derivada)**.** Seja uma função f definida em um intervalo aberto contendo x_0. A derivada de f em x_0, denotada por $f'(x_0)$, é dada por:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

se esse limite existir.

Entre as funções contínuas e deriváveis figuram os polinômios, as exponenciais, as funções trigonométricas, entre outras funções apresentadas no ensino médio.

2.1. Cálculo de Zeros de Funções Reais

Um dos problemas que ocorrem mais frequentemente no cotidiano é calcular as soluções (que são chamadas de raízes) de equações da forma: $f(x) = 0$. Em alguns casos, por exemplo, de equações polinomiais, os valores de x que anulam $f(x)$ podem ser reais ou complexos. Em raros casos é possível obter as raízes exatas de $f(x) = 0$, como ocorre, por exemplo, supondo-se $f(x)$ um polinômio fatorável.

Resolver a equação $f(x) = 0$ consiste em determinar a solução (ou soluções) real ou complexa, p, tal que $f(p) = 0$. Porém, estamos interessados somente nos zeros reais de $f(x)$, que são representados graficamente pelas abcissas dos pontos onde uma curva intercepta o eixo x.

2.2. Localização das Raízes de Polinômios

Na grande maioria dos problemas cotidianos é necessário recorrer a métodos numéricos para calcular aproximações para as raízes reais de uma dada equação. No que segue, apresentaremos algumas técnicas interessantes para determinar a localização dos zeros de uma classe particular de funções, a saber, os polinômios. Representaremos um polinômio real de grau n da seguinte forma:

$$p(x) = a_n x^n + a^{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

com $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais e $a_n \neq 0$.

Teorema 1 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** *Um polinômio real de grau* n *tem exatamente* n *raízes (algumas eventualmente idênticas) que podem ser reais ou complexas.*

O leitor pode encontrar uma demonstração desse teorema em (HEFEZ, 2018).

Teorema 2 (Teorema de Bolzano)**.** *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Se* $f(a) \cdot f(b) < 0$*, então existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = 0$*.*

Uma demonstração desse teorema pode ser encontrada em (NETO, 2015).

Teorema 3 (Regra dos Sinais de Descartes I)**.** *O número* N_+ *de raízes reais positivas de um polinômio real* $p(x)$ *não excede o número* V *de variações de sinal dos seus respectivos coeficientes não nulos, e o valor* $V - N_+$ *é par.*

O leitor encontrará uma demonstração elementar desse resultado em (DESCARTES, 1954) ou em língua portuguesa (ASSIS, 2020).

Teorema 4 (Regra dos Sinais de Descartes II)**.** *O número* N_- *de raízes reais negativas de um polinômio real* $p(x)$ *não excede o número* V *de variações de sinal dos coeficientes não nulos do polinômio* $q(x) = p(-x)$ *, e o valor* $V - N_-$ *é par.*

Demonstração. Consequência direta da regra anterior. $\square$

Teorema 5 (Regra do Máximo)**.** *Todas as raízes* z*, reais ou complexas, de um polinômio* $p(x)$ *na forma*

$$p(x) = a_n x^n + a^{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

verificam a desigualdade $|z| < R$*, onde*

$$R = 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right|. \tag{1}$$

Em particular, se $p(x)$ *tiver raízes reais, elas pertencem ao intervalo* $]-R, R[$*.*

O leitor pode acessar uma demonstração em (ASSIS, 2020).

2.3. Isolamento das Raízes

Nesta seção, usando o teorema de Bolzano enunciado na seção anterior, apresentaremos uma forma de determinar intervalos finitos $[a, b]$ de sorte que a raiz p pertença a tal intervalo. Para tal faz-se uma análise gráfica da função f, e para isso usamos o seguinte artifício: para f uma função contínua, buscamos um intervalo [a,b] no qual se tenha $f(a) \cdot f(b) < 0$ (ou seja, f(a) e f(b) têm sinais contrários), e assim garantimos que existe pelo menos uma raiz real de f no intervalo $[a, b]$.

Além disso, se f é contínua e diferenciável em $[a, b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$ e se f' não troca de sinal em [a,b], ou seja, $f' > 0$ ou $f' < 0$, então f possui uma única raiz em tal intervalo.

2.4. Refinamento

O refinamento da solução pode ser feito utilizando vários métodos numéricos. A forma como deve-se efetuar o refinamento é o que diferencia os métodos. Todos eles pertencem à classe dos métodos iterativos. Um método iterativo consiste em uma sequência de instruções que são executadas passo a passo, algumas das quais são repetidas em ciclos (laços) até que um critério de parada seja satisfeito.

2.5. Critério de parada

Idealmente, queremos parar quando a diferença entre a solução aproximada e a solução exata (e desconhecida) for muito pequena. A tolerância (ϵ) é uma estimativa para o erro absoluto dessa aproximação. Sejam $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ as aproximações para a raiz p na iteração n que um determinado método realiza, o critério de parada é uma regra preestabelecida para interromper a sequência de aproximantes gerada pelos métodos iterativos a partir de um certo instante. Esse deve avaliar quando um aproximante está suficientemente próximo da raiz exata. Assim, o processo iterativo é interrompido quando pelo menos um dos seguintes critérios é satisfeito:

$$|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$$

ou

$$|f(x_n)| < \epsilon$$

ou

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} < \epsilon$$

Outros critérios de parada podem ser utilizados, mas sem adicional conhecimento sobre f ou p, a desigualdade (7) é o melhor critério de parada a ser aplicado porque chega mais perto de testar o erro relativo.

O leitor interessado em completar o conhecimento sobre esse tópico pode encontrar tais temas em (CHAPRA; CANALE, 2008) ou (RUGGIER; LOPES, 1997).

3. Métodos Numéricos Iterativos

Neste capítulo, consideramos um dos problemas mais básicos da aproximação numérica, o problema de busca de raiz. Esse processo envolve encontrar uma raiz, ou solução, de uma equação na forma

$f(x) = 0$, para uma dada função f. Uma raiz dessa equação também é chamada de zero da função f. Segundo (BERRY; SWETZ, 2012), o problema de encontrar uma aproximação da raiz de uma equação data de aproximadamente 1700 a.C. Uma tabela cuneiforme da Coleção Babilônica de Yale que data daquele período fornece um número sexagesimal equivalente a 1.414222 como uma aproximação para $\sqrt{2}$ e essa aproximação tem uma precisão de ordem 10^{-5}.

O leitor pode encontrar mais dados sobre os temas tratados aqui em (CHAPRA; CANALE, 2008) ou (RUGGIERO; LOPES, 1997).

3.1. Método da Bissecção

Seja a função $f(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$ e tal que $f(a).f(b) < 0$. Suponha que o intervalo (a, b) contenha uma única raiz. O método indica que devemos dividir ao meio o intervalo utilizado, testar suas extremidades e escolher aquele subintervalo que cumpre as condições do teorema de Bolzano. Repetindo essa estratégia seremos capazes de localizar o subintervalo contendo o zero da função. A Figura 1 abaixo ilustra o processo.

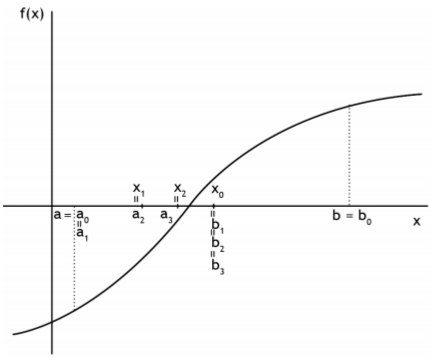


Figura 1: Interpretação geométrica do Método da Bissecção

Tecnicamente, a redução da amplitude do intervalo faz-se pela sucessiva divisão de $[a, b]$ ao meio, ou seja, pelo ponto médio $x_n = \frac{(a_n+b_n)}{2}$, gerando uma sequência de intervalos encaixados da forma: $\{[a, b], [a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], \cdots, [a_n, b_n]\}$, mantendo a cada iteração o subintervalo que contém o zero desejado e desprezando o outro subintervalo. A escolha do subintervalo que será mantido é feita de modo simples: calculamos o valor da função f no ponto médio $x_n = \frac{(a_n+b_n)}{2}$. Temos assim três possibilidades:

- $f(x_n) = 0$. Nesse caso x_n é o zero (exato) de f e não temos mais nada a fazer. Em geral, não é isso que ocorre.
- $f(a_n) \cdot f(x_n) < 0$. Aqui o zero de f está entre a_n e x_n. O intervalo a ser mantido será, então, $[a_n, x_n]$, e definem-se $a_n = a_{n+1}$ e $x_n = b_{n+1}$.
- $f(a_n) \cdot f(x_n) > 0$. Nesse caso, desde que $f(a_n)$ e $f(b_n)$ têm sinais opostos, teremos também $f(x_n) \cdot f(b_n) < 0$. Assim, o zero de f está entre x_n e b_n, e o intervalo a ser mantido será, então, $[x_n, b_n]$, e definem-se $x_n = a_{n+1}$ e $b_n = b_{n+1}$.

3.2. Descrição do algoritmo da bissecção

Dados um intervalo $[a_0, b_0]$, uma função real de uma variável real f contínua em $[a_0, b_0]$ tal que $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$ e uma precisão ϵ. A rotina do cálculo das aproximações é:

$n = 0$.

Enquanto $b_n - a_n > \epsilon$, faça

$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$.

Se $f(a_n) \cdot f(x_n) = 0$, faça $p = x_n$. PARE.

Se $f(a_n) \cdot f(x_n) < 0$, faça $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = x_n$.

Caso contrário, faça $a_{n+1} = x_n$ e $b_{n+1} = b_n$.

$n = n + 1$.

Faça $\bar{x} = \frac{a_n + b_n}{2}$. PARE.

Terminando o processo iterativo, teremos um intervalo [a,b] que contém o zero p de f e, caso $n < N$ para N preestabelecido, encontraremos também uma aproximação $\bar{x}$ de p que satisfaz o primeiro critério de parada, ou seja, tal que $|p - \bar{x}| < \epsilon$.

3.3. Convergência linear

A cada passo, o erro absoluto é reduzido pela metade, e assim o método converge linearmente. Especificamente, se $c_1 = \frac{(a+b)}{2}$ é o ponto médio do intervalo, e c_n é o ponto médio do intervalo da n-ésima iteração, então a diferença entre c_n e uma solução c é limitada por

$$|c_n - c| \leq \frac{|b-a|}{2^n}$$

Assim, se ϵ_n for a estimativa do erro absoluto na n-ésima iteração, então

$$\epsilon_{n+1} \leq \frac{\epsilon_n}{2}$$

e assim notamos que o método da bissecção tem convergência linear, o que veremos ser lento (computacionalmente), comparado a outros métodos.

3.4. Experimentando o método

Considere a função $f(x) = x^4 + 3x^3 - 3x - 4$. Isole suas raízes reais e calcule sua maior raiz positiva com precisão 10^{-2}.

Proposta de Solução: Pela Regra do Máximo, ver equação (1), todas as raízes z reais do polinômio, se existirem, situam-se em $]-5, 5[$. Calculando as respectivas imagens dos inteiros no intervalo $[-5, 5]$, temos:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	261	72	5	-6	-3	-4	-3	30	149	432	981

Tabela 1: Imagens dos inteiros no intervalo [-5,5]

Fazendo a escolha dos subintervalos de [-5,5], tais que as imagens possuam sinais opostos, verifica-se que apenas os intervalos $(-3,-2)$ e $(1,2)$ possuem raízes reais. Além disso, o intervalo $(-3,-2)$ possui exatamente uma raiz real, pois:

1. Pela Regra dos Sinais de Descartes II, o número de raízes reais negativas, N_-, não excede as variações de sinais de $f(-x) = x^4 - 3x^3 + 3x - 4$, $V = 3$, e $V - N_-$ é par. Logo, $N_- \in \{1, 3\}$.

2. Pelas Relações de Girard, o produto das raízes é 4.

Logo, não podemos ter três raízes reais negativas no intervalo $(-3,-2)$, pois assim o produto das raízes seria negativo. Ademais, pela Regra dos Sinais de Descartes I, podemos afirmar que o intervalo (1,2) possui uma única raiz positiva.

Dessa forma, está claro que temos uma raiz real negativa no intervalo $(-3,-2)$ e uma raiz real positiva no intervalo $(1,2)$ e duas raízes complexas.

Agora, vejamos as iterações no Visual Cálculo Numérico (VCN) para calcular a maior raiz positiva. Primeiramente, acessamos a aba Cálculo de Raízes, em seguida, selecionamos o Método da Bissecção, a interface irá abrir, selecionamos o critério de parada $|x_n - x_{n-1}| <$*precisão* e preenchemos os campos da função, do intervalo considerado $(1,2)$ e da precisão 10^{-2}, e por fim clicamos em Calcular para obter a tabela de iterações da raiz aproximada, obtendo $\bar{x} = 1{,}226$. Ver Figura 2.

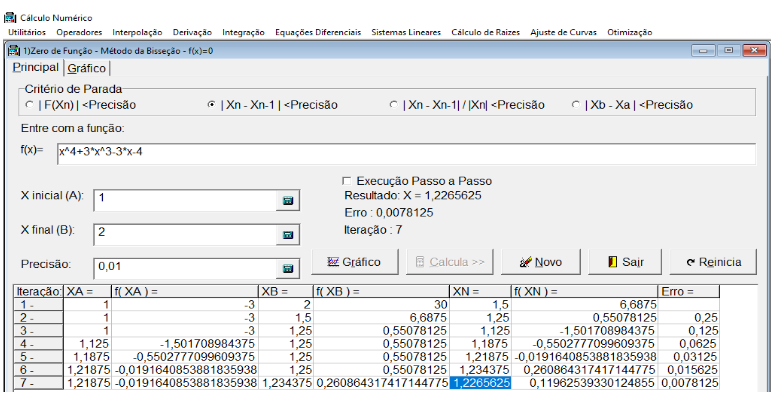


Figura 2: Tela do vcn.exe para método da bissecção

4. Método da Falsa Posição

Suponha $y = f(x)$, onde f seja uma função contínua no intervalo $I = [a, b]$, tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$ e com uma única raiz no intervalo considerado. Enquanto no método da bissecção é feita uma média aritmética simples (sem ponderação) dos valores a e b, o método da falsa posição faz uma média ponderada desses valores com pesos $|f(b)|$ e $|f(a)|$, respectivamente, ou seja, o ponto que divide o intervalo $[a, b]$ é dado por

$$x = \frac{a\,|f(b)| + b|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}. \tag{2}$$

A segunda igualdade segue do fato de que f(a) e f(b) têm sinais contrários.

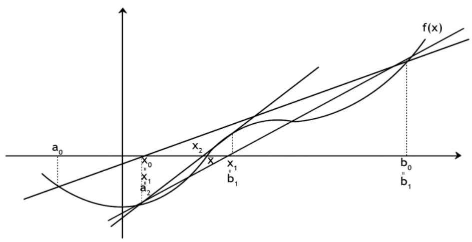


Figura 3: Interpretação geométrica do Método da Falsa Posição

Tecnicamente, a redução da amplitude do intervalo faz-se pela sucessiva divisão de $[a, b]$ pelo ponto $x_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$, gerando uma sequência de intervalos encaixados da forma: $\{[a, b], [a_1, b_1], [a_2, b_2],$ Uma vez obtido x_n a cada iteração, é preciso verificar em qual dos subintervalos $[a_n, x_n]$ ou $[x_n, b_n]$ está a raiz procuarada. Para isso examina-se o sinal de $f(a) \cdot f(x_n)$. Se for negativo, a raiz está no intervalo $[a_n, x_n]$, e definimos $x_n = b_n$; caso contrário, está em $[x_n, b_n]$, e definimos $x_n = a_n$.

4.1. Fórmula de iteração

Na verdade, o que se faz no método da posição falsa é substituir o gráfico de f no intervalo de cada iteração por um segmento de reta. Nesse caso, a aproximação dada pelo número $\bar{x}$, obtido por meio da equação (2), é o ponto de intersecção da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ com o eixo OX.

De fato, a equação da reta $y = Ax + B$ que passa por esses dois pontos, pode ser obtida por

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

De onde segue:

$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Como f(a) e f(b) possuem sinais opostos, podemos tomar

$$x = \frac{a\,|f(b)| + b|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|}.$$

Defina $a_0 = a$ e $b_0 = b$. E observe que, a cada iteração, os limites do intervalo são alterados obedecendo o Teorema de Bolzano – isso pode ser observado no gráfico da Figura 3. Logo, na iteração n um novo intervalo, $[a_n, x_n]$ ou $[x_n, b_n]$, será considerado por conter a raiz, onde também definimos $x_n = a_n$ ou $x_n = b_n$. Dessa forma, por indução, temos a fórmula iterativa:

$$x_n = \frac{a_n\,|f(b_n)| + b_n|f(a_n)|}{|f(b_n)| + |f(a_n)|},\ n = 0, 1, \cdots \tag{3}$$

Observe que esse método sintetizado em (3) procura beneficiar a busca do menor f(x) gerado por a_n ou b_n, sendo equivalente a localizar uma raiz aproximada por meio da média ponderada entre a_n e b_n, utilizando como pesos $|f(a_n)|$ e $|f(b_n)|$.

4.2. Descrição do algoritmo da Falsa Posição

O algoritmo para tal método pode ser o mesmo que o utilizado para o método da bissecção, alterando-se apenas a fórmula de iteração para $x_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$.

4.3. Experimentando o método

Exemplo: Seja $f(x) = x^3 - 9x + 3$. Encontrar a raiz de f(x) do intervalo $I = [0, 1]$ usando a precisão $\epsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ e o critério de parada $|f(x_n)| < \epsilon$.

Proposta de Solução: Primeiramente, isolemos as raízes. Pela Regra do Máximo, ver equação (1), todas as raízes z reais do polinômio, se existirem, situam-se em $]-10, 10[$. Mas, basta observar as respectivas imagens dos inteiros no intervalo $[-4, 4]$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	-25	3	13	11	3	-5	-7	3	31

Tabela 2: Imagens dos inteiros no intervalo [-4,4]

Fazendo a escolha dos subintervalos de [-4,4], tais que as imagens dos extremos possuam sinais opostos, verifica-se que todas as três raízes do polinômio são reais e localizam-se nos intervalos $(-4, -3)$, $(0, 1)$ e $(2, 3)$. Dessa forma, fica claro que o intervalo $[0, 1]$ possui exatamente uma raiz real.

Agora, vejamos as iterações no Visual Cálculo Numérico (VCN). Primeiramente, acessamos a aba Cálculo de Raízes e, em seguida, selecionamos o Método da Falsa Posição. A interface irá abrir e em seguida selecionamos o critério de paragem $|f(x_n)| <$*precisão* e preenchemos os campos da função, do intervalo considerado $(0, 1)$ e da precisão $5 \cdot 10^{-4}$, e por fim clicamos em Calcular para obter a tabela de iterações da raiz aproximada, obtendo $\bar{x} = 0,33765$. Ver Figura 4.

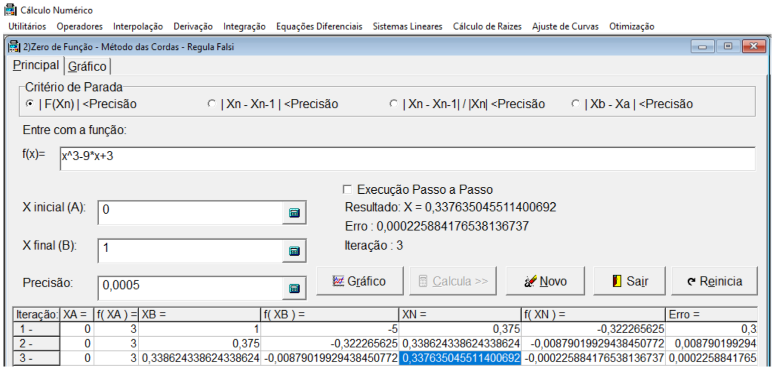


Figura 4: Tela do vcn.exe para método da falsa posição

4.4. Método de Newton-Raphson

O método de Newton (ou de Newton-Raphson) é um dos métodos numéricos mais poderosos e conhecidos para a solução de problemas de busca de resultados. Existem muitas maneiras de introduzir o método, e uma delas é baseada nos polinômios de Taylor. A derivação específica do desenvolvimento produz não apenas o método, mas também um limite para o erro da aproximação. Suponha que $f \in C^2[a, b]$. Denote por $x_0 \in [a, b]$ uma aproximação para a raiz exata p de tal modo que $f'(x_0) \neq 0$ e $|p - x_0|$ é pequeno. Considere o primeiro polinômio de Taylor para $f(x)$ expandido em torno de x_0 e avaliado em torno de $x = p$:

$$f(p) = f(x_0) + (p - x_0)f'(x_0) + \frac{(p - x_0)^2}{2} f''(\xi(p)). \tag{4}$$

onde $\xi(p)$ está entre p e x_0. Uma vez que $f(p) = 0$, de (4) temos:

$$0 = f(x_0) + (p - x_0)f'(x_0) + \frac{(p - x_0)^2}{2} f''(\xi(p)).$$

O método de Newton é derivado supondo que $|p - x_0|$ é pequeno, e assim o termo envolvendo $(p - x_0)^2$ é muito menor. Donde

$$0 \approx f(x_0) + (p - x_0)f'(x_0),$$

e portanto temos

$$p \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} =: x_1.$$

Isso prepara o cenário para o método de Newton, que começa com uma aproximação inicial x_0 e gera a sequência $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ por meio da seguinte fórmula:

$$x_n \approx x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n \geq 1. \tag{5}$$

4.5. Interpretação Geométrica

A figura abaixo ilustra como as aproximações são obtidas com tangentes sucessivas. Começando com a aproximação inicial x_0, a aproximação x_1 é a x-interceptação da linha tangente para o gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$. A aproximação x_2 é a x-interceptação da linha tangente para o gráfico de f em $(x_1, f(x_1))$ e assim por diante.

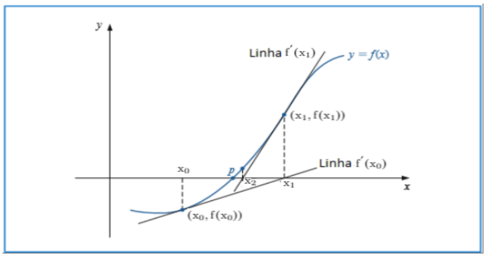


Figura 5: Interpretação Geométrica do Método de Newton

4.6. Descrição do método de Newton

Considere a equação $f(x) = 0$. Suponha que $f^{'}(p) \neq 0$, e que $f(x)$, $f^{'}(x)$ e $f^{''}(x)$ sejam contínuas num intervalo I que contém a raiz $x = p$.

Dados: x_0 (aproximação inicial), ϵ_1 e ϵ_2(precisões) e N (máximo de iterações). Para $n = 0$ até $n = N$ faça $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f^{'}(x_n)$. Se $|f(x_{n+1})| < \epsilon_1$ ou $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon_2$, então $\bar{x} = x_{n+1}$, e terminamos. Se $n = N$, então terminamos, e a sequência de aproximações gerada pelo método não converge para a solução.

4.7. Condições de convergência

Segundo Newton, para haver a convergência a uma raiz em seu método, bastaria que o intervalo (a, b) em análise fosse suficientemente pequeno. Contudo, Raphson e Fourier concluíram que um intervalo pequeno é aquele que contém uma e somente uma raiz.

Haverá convergência a uma raiz no intervalo (a,b) se, e somente se, $f(a) \cdot f(b) < 0$, $f^{'}(a) \cdot f^{'}(b) > 0$ e $f^{''}(a) \cdot f^{''}(b) > 0$

Teorema 6 (Condição suficiente de convergência para o método de Newton)**.** *Seja* (a, b) *um intervalo que contém uma só raiz da equação* $f(x) = 0$*. A sucessão de valores* x_i *gerados pelo método de Newton-Raphson é monótona e limitada (e portanto convergente) se:*

1. $f^{'}(x) \neq 0,\ 8x \in (a, b)$;

2. $f^{''}(x) \neq 0,\ 8x \in (a, b)$;

O leitor pode encontrar uma demonstração de tal resultado em (ALVES, 2001).

Observação 1. Notamos que em casos específicos é interessante que o domínio da função seja o intervalo fechado e o valor inicial seja um dos seus extremos. Neste contexto, precisamos de uma condição extra, a saber, que o extremo escolhido x_0 satisfaça $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

4.8. Convergência quadrática

Nesta subseção verificaremos que a convergência no método de Newton é mais rápida (computacionalmente) e assim mais interessante para fins de programação.

Lembre que a fórmula de iteração do método de Newton, ver (5), é dada por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{6}$$

se $f'(x_n)$ existir e for não nula, $n \geq 0$.

De acordo com o teorema de Taylor, se f tem derivadas até segunda ordem em um intervalo I, então f pode ser representada pela expansão em torno de um ponto próximo da raiz de f. Suponhamos que p seja a raiz. Então pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange temos, para algum ξ que esteja entre x_n e p:

$$f(p) = f(x_n) + f'(x_n)(p - x_n) + \frac{(f''(\xi))}{2}(p - x_n)^2$$

Como p é raiz, então $f(p) = 0$ e portanto

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(p - x_n) + \frac{f''(\xi)}{2}(p - x_n)^2.$$

E assim

$$-f''(\xi)\frac{(p - x_n)^2}{2f'(x_n)} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (p - x_n).$$

Mas, usando equação (6) temos:

$$\frac{-f''(\xi)(p - x_n)^2}{2f'(x_n)} = (x_n - x_{n+1}) + (p - x_n),$$

o qual pode ser reescrito por

$$p - x_{n+1} = \frac{-f''(\xi)(p - x_n)^2}{2f'(x_n)}.$$

Denotando o erro $p - x_n$ por E_n, obtemos que:

$$|E_{n+1}| = \left|\frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}\right| |E_n^2|.$$

4.9. Experimentando o método

Nesta subseção apresentamos um exemplo utilizando o método de Newton de aproximação de reízes.

Vamos determinar a maior raiz real da equação $f(x) = x^3 - 2x - 1 = 0$ com erro inferior a 10^{-3}.

Proposta de Solução: Utilizando a Regra do Máximo, ver (1), temos que suas raízes (reais ou complexas), se existirem, têm módulo menor que 3. Assim, calculando as imagens dos inteiros no intervalo $[-3, 3]$ temos:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-22	-5	0	-1	-2	3	20

Tabela 3: Imagens dos inteiros no intervalo [-3,3]

Observe que o intervalo $[1, 2]$ é o que se encontra mais à direita no eixo positivo OX, tal que os extremos possuem imagens de sinais contrários; logo contém a maior raiz real positiva. Além disso, essa raiz é única, pois pela Regra de Sinais de Descartes I, o número de raízes reais positivas não excede o número V de variações de sinal dos coeficientes não nulos de $f(x)$, que é igual a 1.

Demonstrado que o intervalo $(1, 2)$ possui uma única raiz, podemos verificar as condições de convergência:

1. $f(1) \cdot f(2) < 0$;

2. $f'(x) = 3x^2 - 2$ e daí temos $f'(1) \cdot f'(2) = 1.10 > 0$;

3. $f''(x) = 6x > 0$ em todo o intervalo.

Para a escolha do melhor extremo, observe que $f(2) \cdot f^{''}(2) > 0$. Então, escolhamos $x_0 = 2$.

Com esse quarto ponto também verificado, estão cumpridas as condições de convergência. Agora, vejamos as iterações no Visual Cálculo Numérico (VCN). Primeiramente, acessamos a aba Cálculo de Raízes e em seguida selecionamos o Método de Newton. A interface abrirá e escolhemos um critério de parada (que pode ser $|x_n - x_{n-1}| <$ *precisão*) e preenchemos os campos da função, da derivada, do ponto inicial $x_0 = 2$ e da precisão 10^{-3}, e por fim clicamos em Calcular para obter a tabela de iteração. Ver Figura 6.

Logo, a maior raiz é aproximadamente $1,618$, com erro menor que 10^{-3}.

5. Considerações importantes sobre os métodos

- No método da Bissecção, as iterações não envolvem cálculos laboriosos, porém pode ser difícil encontrar um intervalo [a,b], tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, em equações com raízes de multiplicidade par ou raízes muito próximas umas das outras. Assim, na prática, o método é mais utilizado para diminuir o intervalo que contém a raiz, pois se o intervalo inicial é tal que $b_0 - a_0 >> \epsilon$, e se ϵ for muito pequeno, o número de iterações n tende a ser muito grande, tornando a convergência bastante lenta;

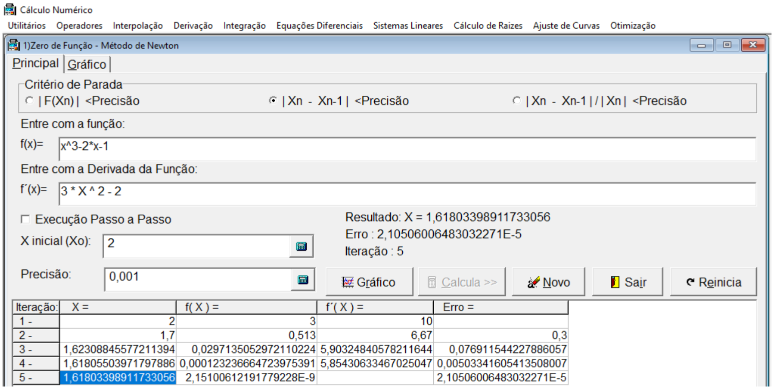


Figura 6: Tela do vcn.exe para o método de Newton

- O método da Falsa Posição utiliza mais informação para gerar as iteradas e é, em geral, de convergência mais rápida que o método da Bissecção. Entretanto, quando a convergência para a raiz só se faz a partir de um extremo do intervalo $[a, b]$, e a imagem desse extremo tem um valor muito elevado, a convergência é lenta. Esta situação ocorre sempre que o gráfico da função apresenta a concavidade voltada para cima ou para baixo no intervalo em estudo, podendo tornar a velocidade de convergência bastante lenta, até mesmo mais lenta que no método da Bissecção;
- Embora o método de Newton tenha uma convergência muito boa, proporcionando geralmente um número pequeno de iterações (considerado o mais rápido entre os apresentados aqui), este se apresenta mais exigente que os demais, pois exige que $f^{'}(x) \neq 0$ no intervalo (a, b).

6. Propostas de atividades para o Ensino Médio

A seguir, apresentamos três atividades sobre o cálculo de raízes aproximadas através dos métodos iterativos apresentados. A primeira atividade enriquece o desenvolvimento do conteúdo dos Métodos da Bissecção e da Falsa Posição, quando requisita ao aluno a utilização do Excel, onde ele deverá entender sobre condicionais, fórmulas de iteração e a construção de algoritmos para encontrar uma solução aproximada. A segunda atividade traz uma alternativa para o cálculo da raiz quadrada. E a terceira atividade potencializa a capacidade de o aluno observar a construção de resultados, através de identificação de regularidades dentro de um determinado método, e até mesmo busca comparar os métodos através de seus erros e convergências.

6.1. Métodos Iterativos no Excel

Atividade 1: Considere o polinômio x^4+x^2-9x+3. Em uma planilha Excel, use as ferramentas para produzir um algoritmo do método da bissecção e da falsa-posição que nos dê a raiz aproximada no intervalo $[1, 2]$ com erro menor que 10^{-3}. Observação: utilize o critério de parada $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$.

Proposta de Solução. Na planilha Excel da Figura 7 , primeiramente preparamos a linha 1 (cabeçalho), onde:

i: i-ésima iteração;

a: extremo esquerdo do intervalo;

f(a): imagem do extremo esquerdo do intervalo;

$\mathrm{x_i}$: ponto médio do intervalo da i-ésima iteração;

$\mathrm{f(x_i)}$: imagem do ponto médio da i-ésima iteração;

b: extremo direito do intervalo;

f(b): imagem do extremo direito intervalo;

ϵ: erro.

Em seguida, preparemos a linha 2 da planilha.

Então, começamos pela iteração 0, a célula A2 recebe o valor 0, a célula B2 recebe o valor 1, a célula C2 recebe a fórmula: $= \mathrm{B2}^4 + \mathrm{B2}^2 - 9 \cdot \mathrm{B2} + 3$, a célula D2 recebe a fórmula: $= (\mathrm{B2} + \mathrm{F2})/2$, a célula E2 recebe a fórmula: $= \mathrm{D2}^4 + \mathrm{D2}^2 - 9 \cdot \mathrm{D2} + 3$, a célula F2 recebe o valor 2, a célula G2 recebe a fórmula: $= \mathrm{F2}^4 + \mathrm{F2}^2 - 9 \cdot \mathrm{F2} + 3$. Observação: o erro na iteração 0 existe, porém não é calculado.

Em seguida, preparemos a linha 3 da planilha.

Vamos agora para a iteração 1, para encontrar o novo valor de a é necessária uma estrutura condicional, utilizemos a estrutura SE. No caso, a célula B3 recebe a fórmula: $= \mathrm{SE}(\mathrm{C2} \cdot \mathrm{E2} < 0; \mathrm{B2}; \mathrm{D2})$, ou seja, se $\mathrm{f(a)} \cdot \mathrm{f(x_i)} < 0$, então a raiz está contida no intervalo $\mathrm{(a, x_i)}$, devemos então tomar como verdadeiro o valor de a e tomar como falso o valor de $\mathrm{x_i}$. Na célula F3, utilizemos a mesma fórmula: $= \mathrm{SE}(\mathrm{E2} \cdot \mathrm{G2} < 0; \mathrm{F2}; \mathrm{D2})$, ou seja, se $\mathrm{f(b)} \cdot \mathrm{f(x_i)} < 0$, então a raiz está contida no intervalo $\mathrm{(x_i, b)}$. Devemos, assim, tomar como verdadeiro o valor de b e tomar como falso o valor de $\mathrm{x_i}$.

As fórmulas de f(a), $\mathrm{x_i}$ e $\mathrm{f(x_i)}$ na linha 3 são iguais à da linha 2; podemos então simplesmente utilizar a alça de preenchimento para baixo. No caso do erro na linha 3, podemos calcular da seguinte maneira: $= \mathrm{ABS}(\mathrm{D3} - \mathrm{D2})$, pois estamos tratando do módulo da diferença entre o valor atual e anterior da raiz.

Por fim, basta agora selecionar a linha 3, e utilizando a alça de preenchimento arrastar para baixo até chegar à iteração 9 onde obtemos erro menor que 10^{-3}.Ver Figura 7.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	i	a	f(a)	x_i	$f(x_i)$	b	f(b)	ε
2	0	1	-4	1,5	-3,1875	2	5	
3	1	1,5	-3,1875	1,75	-0,30859	2	5	0,25
4	2	1,75	-0,30859	1,875	2,000244	2	5	0,125
5	3	1,75	-0,30859	1,8125	0,764908	1,875	2,000244	0,0625
6	4	1,75	-0,30859	1,78125	0,208589	1,8125	0,764908	0,03125
7	5	1,75	-0,30859	1,765625	-0,05481	1,78125	0,208589	0,015625
8	6	1,765625	-0,05481	1,773438	0,075675	1,78125	0,208589	0,0078125
9	7	1,765625	-0,05481	1,769531	0,010129	1,773438	0,075675	0,00390625
10	8	1,765625	-0,05481	1,767578	-0,02242	1,769531	0,010129	0,001953125
11	9	1,767578	-0,02242	1,768555	-0,00616	1,769531	0,010129	0,000976563

Figura 7: Excel para o método da Bissecção

Logo, pelo método da Bissecção, na iteração 9, obtemos $1,768$ como raiz com erro menor que 10^{-3}. Para o método da Falsa Posição, a única mudança está na fórmula iterativa, logo a célula

D2 recebe a fórmula: $= \mathrm{F2} - \frac{(\mathrm{G2}(\mathrm{F2}-\mathrm{B2}))}{(\mathrm{G2}-\mathrm{C2})}$. Todos os demais passos são os mesmos que o método da Bissecção. E como resultado obteremos a planilha da Figura 8.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	i	a	f(a)	x_i	$f(x_i)$	b	f(b)	ε
2	0	1	-4	1,444444	-3,56043	2	5	
3	1	1,444444	-3,56043	1,67551	-1,39114	2	5	0,231065215
4	2	1,67551	-1,39114	1,74614	-0,36982	2	5	0,070630741
5	3	1,74614	-0,36982	1,763624	-0,08785	2	5	0,017483242
6	4	1,763624	-0,08785	1,767705	-0,0203	2	5	0,004081566
7	5	1,767705	-0,0203	1,768645	-0,00466	2	5	0,00093951

Figura 8: Excel para o método da Falsa Posição

Logo, pelo método da Falsa Posição, na iteração 5, obtemos $1,768$ como raiz com erro menor que 10^{-3}.

6.2. Raiz quadrada

Atividade 2: Como $\sqrt{A}$ é uma solução da equação $x^2 - A = 0$, podemos usar o método de Newton para estimar $\sqrt{A}$ (Figura 9).

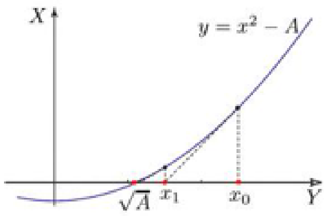


Figura 9: A sucessão converge para a raiz para qualquer valor $x_0 > 0$

1. Utilize o fato que a inclinação da reta tangente à função $y = ax^2 + bx + c$ no ponto (x_0, y_0) é dada por $2ax_0 + b$, para verificar que a fórmula de iteração para obter a estimativa da raiz quadrada é dada por $x_n = 0,5(x_{n-1} + \frac{A}{x_{n-1}})$.

   Proposta de Solução: Dando continuidade à sucessão, temos que a inclinação θ da reta tangente no ponto x_n é tal que $\tan\theta = 2x_n$. Logo,

$$\frac{y_n}{x_n - x_{n+1}} = 2x_n \implies x_n - x_{n+1} = \frac{y_n}{2x_n} \implies x_{n+1} = x_n - \frac{y_n}{2x_n}.$$

   Como $y_n = x_n^2 - A$, temos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - A}{2x_n}.$$

   Dessa forma, $x_{n+1} = 0,5(x_n + \frac{A}{x_n})$.

2. Estime $\sqrt{2}$ e $\sqrt{1000999}$ com ao menos cinco decimais exatos. Utilize para isso a fórmula de iteração em uma planilha do Excel.

   Proposta de Solução: Na Figura 9 abaixo, temos duas planilhas Excel. Para a primeira planilha utilizamos uma aproximação inicial (1,5) e a fórmula de iteração como fórmula de referência. Assim, na célula C8, temos a seguinte fórmula de referência: $= 0,5(B8 + (2/B8))$ para aproximar $\sqrt{2}$. Para a segunda planilha utilizamos a aproximação uma inicial (1000) e a fórmula de referência: $= 0,5(B8 + 1000999/B8)$ na célula C8 para $\sqrt{1000999}$. Em seguida, deslocamos a alça de preenchimento para baixo até obter na aproximação ao menos cinco decimais exatos.

   Dessa forma, $\sqrt{2} \approx 1,41421$ e $\sqrt{1000999} \approx 1000,49937$.

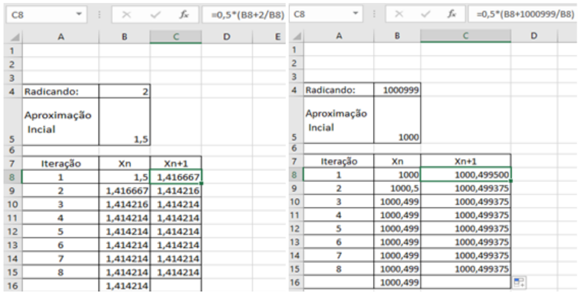


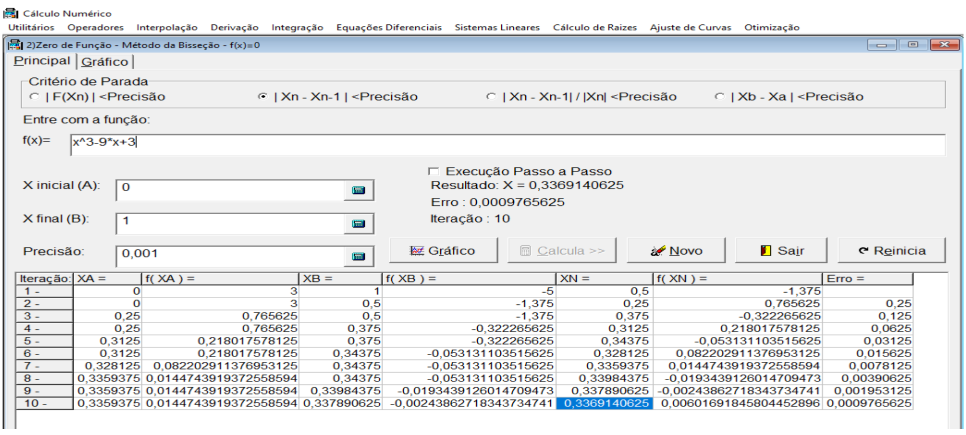
Figura 10: Raiz quadrada no Excel

6.3. Métodos iterativos no Visual Cálculo Numérico

<u>Atividade 3</u>: Considere a função polinomial $f(x) = x^3 - 9x + 3$. Encontrar a raiz de $f(x)$ do intervalo $I = [0, 1]$ usando a precisão $\epsilon = 10^{-3}$ e o critério de parada $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$. Utilizando o Visual Cálculo Numérico para os métodos da Bissecção, Falsa Posição e de Newton, responda:

1. Em qual método foi utilizado menor número de iterações? Em qual método foi utilizado o maior número de iterações?

   Proposta de Solução. Utilizando o vcn.exe, verificamos 10 iterações pelo método da Bissecção, conforme a figura 11 abaixo:



Iteração:	XA =	f(XA) =	XB =	f(XB) =	XN =	f(XN) =	Erro =
1 -	0	3	1	-5	0,5	-1,375	
2 -	0	3	0,5	-1,375	0,25	0,765625	0,25
3 -	0,25	0,765625	0,5	-1,375	0,375	-0,322265625	0,125
4 -	0,25	0,765625	0,375	-0,322265625	0,3125	0,218017578125	0,0625
5 -	0,3125	0,218017578125	0,375	-0,322265625	0,34375	-0,053131103515625	0,03125
6 -	0,3125	0,218017578125	0,34375	-0,053131103515625	0,328125	0,082202911376953125	0,015625
7 -	0,328125	0,082202911376953125	0,34375	-0,053131103515625	0,3359375	0,0144743919372558594	0,0078125
8 -	0,3359375	0,0144743919372558594	0,34375	-0,053131103515625	0,33984375	-0,0193439126014709473	0,00390625
9 -	0,3359375	0,0144743919372558594	0,33984375	-0,0193439126014709473	0,337890625	-0,00243862718343734741	0,001953125
10 -	0,3359375	0,0144743919372558594	0,337890625	-0,00243862718343734741	0,3369140625	0,00601691845804452896	0,0009765625

Figura 11: Tela do VCN para o método da Bissecção

   Pelo método da Falsa Posição verificamos 3 iterações, conforme Figura 12 abaixo.

   E pelo método de Newton sendo $x_0 = 0$ o valor inicial, verificamos 4 iterações, conforme Figura 13.

   Nesse caso, o método que utiliza o menor número de iterações é o da Falsa Posição, e o método que utiliza o maior número de iterações é o da Bissecção. Salientamos que se utilizássemos o valor inicial $x = 1$, teríamos 5 iterações para o método de Newton, mas a solução continuaria a mesma.

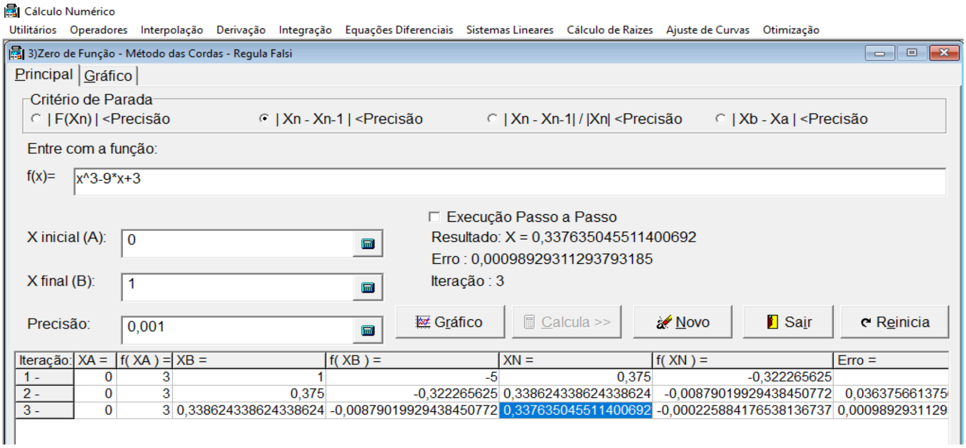


Figura 12: Tela do VCN para o método da Falsa Posição

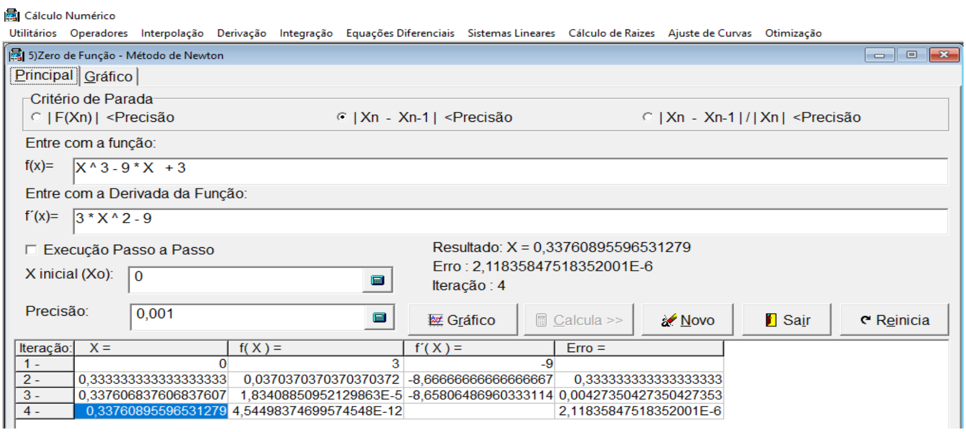


Figura 13: Tela do VCN para o método de Newton

2. Observando os métodos numéricos em questão, o que podemos observar no tocante ao surgimento dos dígitos significativos corretos a cada iteração?

   Proposta de Solução: Observe a Figura 13. Podemos identificar que, no método de Newton em questão, os dígitos corretos começam a surgir a partir da primeira iteração, e a quantidade de dígitos corretos duplica à medida que os valores da sequência aproximam-se da raiz. Isso ocorre porque o método tem convergência quadrática.

3. Observando os métodos numéricos em questão, quanto à precisão, o que se pode dizer?

   Proposta de Solução: É possível observar na Figura 11 que o erro reduz-se à metade a cada iteração no método da Bissecção. Nos demais métodos não é fácil ver alguma regularidade.

7. Considerações finais

Alguns desafios podem ser encontrados durante a execução deste trabalho com alunos do 3º ano do ensino médio. No conteúdo temos uma gama de conceitos que normalmente são tratados nos anos iniciais do ensino superior, mas que se levados para um projeto de extensão ou laboratório de ensino podem ser muito frutíferos. Visto que a BNCC vem mudando a praxe de alguns anos atrás na busca por uma educação científica e tecnológica com base sólida, fazem-se necessários textos nessa direção para auxíliar os professores na elaboração de suas aulas. No tocante ao uso de tecnologias, devemos considerar que muitas escolas possuem uma infraestrutura precária, e muitas vezes não dispõem de laboratórios de informática ou de *softwares* disponíveis. Recomenda-se o uso do *software* Libre Office Calc, que faz parte de uma suíte gratuita e livre, no caso da não existência do Microsoft Excel, que necessita de licença comercial. E, como não é possível a utilização do Visual Cálculo Numérico através de *smartphones*, sugerimos o uso de *tablets* na sala de aula, pois adaptaremos o aluno à realidade do mundo digital de forma criativa.

Alguns autores consideram a formação de professores o maior desafio da atualidade para a educação 4.0. Uma formação diferenciada é essencial para acompanhar tamanha maré de desenvolvimento. O cenário é o de desenvolver competências, e assim o professor deixa de ser o especialista em determinado conteúdo para tornar-se um propulsor para o desenvolvimento do conhecimento, usando metodologias interativas para conduzir os estudantes na busca de informações, geração de soluções e avaliação do trabalho realizado. As salas de aula tornam-se espaços para a construção de conhecimento, e o professor será um líder-pesquisador, que, ao lado dos alunos, engaja-se na busca de soluções para novos problemas.

O ensino sobre métodos iterativos para encontrar raízes não se encerra apenas com a aplicação das atividades que foram propostas, cabe aos professores a elaboração de novas atividades relacionadas, possibilitando que o estudante cada vez mais desenvolva o pensamento computacional. Nesse sentido, a BNCC ressalta a importância de se trabalharem as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer o *referee* pela leitura cuidadosa e por todas as sugestões que levaram ao trabalho ser mais preciso e claro em seus tópicos. O segundo autor é parcialmente financiado pelo CNPq, Brasil, auxílio 303613/2018-1, e ambos os autores foram parcialmente financiados pela Capes, Brasil, Código de Financiamento 001.

Referências

[1] Alves, C. J. S. *Fundamentos de Análise Numérica (I): Secção de Folhas*. Aeist, 2001.

[2] Assis, M. P. *Aproximação de raízes de funções polinomiais através de métrodos númericos iterativos*. Trabalho de Conclusão de Curso - Profmat, 2020.

[3] Berry, J.L; Swetz, F. J. *The Best Known Old Babylonian Tablet?*. United States, 2012. Disponível em: <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/the-best-known-old-babylonian-tablet>. Acesso em: 20 de junho de 2020.

[4] Chapra, S.C.; Canale, R.P. *Métodos Numéricos para Engenharia.* 5ª ed São Paulo: McGraw-Hill, 2008.

[5] Descartes, R. *The Geometry of René Descartes with a Facsimile of the First Edition.* New York: Dover, 1954.

[6] Hefez, A.; Villela, M. L. T. *Polinômios e Equações Algébricas.* 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2018.

[7] Guidorizzi, L. H. *Um Curso de Cálculo: Volume 1.* 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

[8] Neto, A. C. M. *Fundamentos de Cálculo.* 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[9] Ruggiero, M.A. G.; Lopes, V. L. R. *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais.* 2ª ed. Editora Pearson, 1997.

Marlon Péricles da Silva Assis
Universidade Federal de Alagoas
57072-970 Maceió, Alagoas, Brasil
<pericles.uast@gmail.com>

Márcio Batista
Universidade Federal de Alagoas
57072-970 Maceió, Alagoas, Brasil
<mhbs@mat.ufal.br>

Recebido: 11/12/2020
Publicado: 23/06/2021