PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.12, n.4, 2024
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2024/pmo1237

# O produto de Viète: um capítulo importante na história no número $\pi$

Eduardo Henrique de Mattos Brietzke

**Resumo**

Neste artigo tratamos do produto de Viète, que é um capítulo importante e muito bonito na história do número $\pi$. Apresentamos duas demonstrações, que podem servir como motivação para o estudo de propriedades geométricas interessantes de polígonos e de trigonometria aplicada a arcos diferentes dos usuais $\pi/6$, $\pi/4$ e $\pi/3$. Aproveitamos para revisar as propriedades básicas dos produtos infinitos. Por fim estudamos uma generalização do produto de Viète.

**Palavras-chave:** produto de Viète; polígonos regulares; trigonometria; produtos infinitos.

**Abstract**

In this article we deal with Viète's product, which is an important and very beautiful chapter in the history of the number $\pi$. We present two proofs, which can serve as motivation for the study of interesting geometric properties of polygons as well as trigonometry applied to arcs other than the usual $\pi/6$, $\pi/4$, and $\pi/3$. We take the opportunity to review the basic properties of infinite products. Finally, we study a generalization Viète's product.

**Keywords:** Viète's product; regular polygons; trigonometry; infinite products.

## 1. Introdução

Desde a época dos babilônios e do Egito antigo, sabemos que a razão entre o comprimento de um círculo e seu diâmetro é sempre a mesma, independente do raio desse círculo. Esta razão é denotada pela letra $\pi$, a letra inicial da palavra "perimetros" que significa perímetro em grego, e seu valor é $\pi = 3{,}141592653589793\ldots$. O número $\pi$ é provavelmente a constante que mais aparece em fórmulas da Matemática, da Física e da Engenharia.

Os babilônios consideravam $\pi$ como valendo $3\frac{1}{8} = 3{,}125$. Já os egípcios aproximavam um cŕculo de diâmetro $D$ por um quadrado de lado $8D/9$, de onde resultava o valor aproximado $\pi \approx 3\frac{13}{81} = 3{,}1604\ldots$. Arquimedes, no século III AC, desenvolveu um método para o cálculo de



SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

$\pi$ que norteou os esforços desenvolvidos nos 1500 anos seguintes no cálculo do valor aproximado de $\pi$. Arquimedes calculou uma aproximação para o valor de $\pi$ com duas casas corretas depois da vírgula. Considerando um polígono regular de 96 lados inscrito ao círculo e outro circunscrito, Arquimedes obteve a aproximação

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

ou seja, $3{,}1408\ldots < \pi < 3{,}1428\ldots$.

Apesar de que o valor de $\pi$ com 39 casas depois da vírgula seja suficiente para calcular o perímetro de um círculo de raio $2 \times 10^{25}$m (aproximadamente 20 bilhões de anos luz) com um erro menor do que $10^{-12}$m (aproximadamente o raio do átomo de hidrogênio), ver [2] pág. 537, o cálculo de mais e mais dígitos de $\pi$ continua até hoje e tem motivado o desenvolvimento de muito boa Matemática. Já são conhecidos 100 trilhões de dígitos da expansão de $\pi$. O cálculo dos dígitos de $\pi$ dão um excelente teste para a integridade de hardware e software de um computador. Em 1986 um cálculo da expansão de $\pi$ detectou um problema de hardware num supercomputador Cray-2.

Outra justificativa para que se continue a calcular mais algarismos de $\pi$ é que as mesmas ideias usadas para criar os algoritmos para o cálculo dos algarismos de $\pi$ têm sido usadas para construir algoritmos para aproximar as funções elementares (ver [3]).

Entre 14 de outubro de 2021 e 21 de março de 2022, pela google cloud, foram calculados 100 trilhões de dígitos de $\pi$.

Neste trabalho apresentamos o produto de Viète, que é um capítulo importante e muito bonito na história de $\pi$. O produto de Viète é uma expressão de $\pi$ como produto infinito. Sua dedução pode ser compreendida por alunos do Ensino Médio e pode servir de motivação para o estudo de propriedades geométricas interessantes de polígonos e de trigonometria aplicada a arcos diferentes dos usuais $\pi/6$, $\pi/4$ e $\pi/3$. O ensino de trigonometria padece de aplicações a outros arcos. O produto de Viète [10] é de 1593. Uma transcrição do original de Viète pode ser encontrada em [2], pág. 53-67.

Viète, 1540-1603, foi um juiz por profissão, conselheiro dos reis Henrique III e Henrique IV da França e matemático nas horas vagas. Viète foi o maior matemático francês do século XVI.

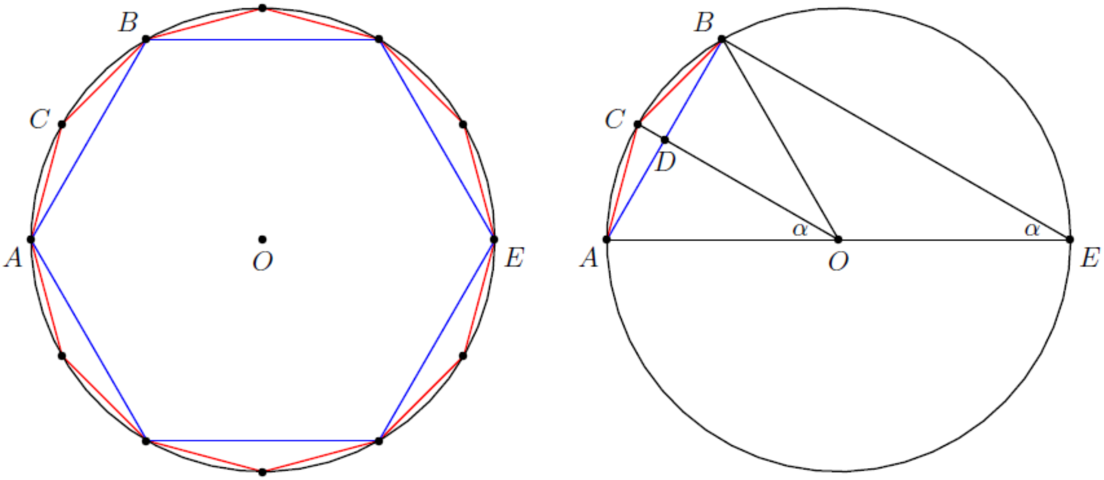
Para entender o produto de Viète, vamos revisar a noção de produto infinito e suas propriedades mais básicas. Na Seção 6, vamos ver uma generalização do produto de Viète. Na Seção 7, apresentamos sem demonstrações algumas outras expressões de $\pi$ como produto infinito. Finalmente, para a conveniência do leitor a Seção 8 revisa alguns fatos usados no decorrer do artigo.

## 2. Razão entre áreas

Nesta seção estudamos a razão entre as áreas de dois polígonos regulares inscritos no mesmo círculo, no caso que um deles tem o dobro de lados do outro.

**Proposição 1.** *Sejam* $\mathrm{P}_1$ *e* $\mathrm{P}_2$ *polígonos regulares inscritos no círculo de raio 1, tendo* $\mathrm{P}_1$ $\mathrm{m}$ *lados e* $\mathrm{P}_2$ $2\mathrm{m}$ *lados, sendo que os vértices de* $\mathrm{P}_1$ *coincidem com vértices de* $\mathrm{P}_2$*, conforme a figura abaixo. Seja* $\alpha = \widehat{\mathrm{AOC}} = \widehat{\mathrm{AEB}} = \frac{2\pi}{2\mathrm{m}}$ *o ângulo central de* $\mathrm{P}_2$ *e seja* $\mathrm{a} = \overline{\mathrm{OD}}$ *o apótema de* $\mathrm{P}_1$*. Então*

$$\frac{\textit{área}\,(\mathrm{P}_1)}{\textit{área}\,(\mathrm{P}_2)} = \mathrm{a} = \cos\alpha.$$




*Demonstração.* Começamos notando que os ângulos $\widehat{\mathrm{AOC}}$ e $\widehat{\mathrm{AEB}}$ são de fato iguais. A razão disto é porque os triângulos AOD e AEB são semelhantes, pois têm o ângulo agudo $\widehat{\mathrm{OAB}}$ em comum e os dois ângulos $\widehat{\mathrm{ADO}}$ e $\widehat{\mathrm{ABE}}$ são retos.

A área do polígono $\mathrm{P}_1$ é $\mathrm{m}$ vezes a área do triângulo AOB e a área de $\mathrm{P}_2$ é igual a $\mathrm{m}$ vezes a área do quadrilátero AOBC. Portanto basta mostrar que

$$\frac{\text{área}\,(\mathrm{AOB})}{\text{área}\,(\mathrm{AOBC})} = \mathrm{a} = \cos\alpha.$$

Seja $\mathrm{L} = \overline{\mathrm{AB}}$ o lado de $\mathrm{P}_1$. Então a área do triângulo AOB é

$$\text{área}(\mathrm{AOB}) = \frac{\mathrm{La}}{2}.$$

A área do quadrilátero AOBC é

$$\text{área}(\mathrm{AOBC}) = \text{área}(\Delta\mathrm{AOB}) + \text{área}(\Delta\mathrm{ABC}) = \frac{\mathrm{La}}{2} + \frac{\mathrm{L}\cdot\overline{\mathrm{CD}}}{2}$$
$$= \frac{\mathrm{L}\cdot(\mathrm{a}+\overline{\mathrm{CD}})}{2} = \frac{\mathrm{L}}{2}.$$

Logo

$$\frac{\text{área}(\mathrm{AOB})}{\text{área}(\mathrm{AOBC})} = \frac{\mathrm{L}a/2}{\mathrm{L}/2} = a.$$

Que $a = \cos\alpha$ segue do fato que $a = \overline{\mathrm{OD}}$ é o cateto adjacente ao ângulo $\alpha$ do triângulo retângulo $\mathrm{AOB}$ de hipotenusa $\overline{\mathrm{OA}} = 1$.

$\square$

## 3. Produtos infinitos

Nesta seção vamos relembrar os fatos mais básicos sobre produtos infinitos. Eles são o análogo de séries (somas infinitas), só são menos conhecidos.

**Definição 1.** Dada uma sequência $(a_n)$ de números reais o produto infinito dos $a_n$ é a expressão

$$\prod_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots .$$

Os produtos parciais são definidos como sendo os termos da sequência $(p_n)$ dada por

$$p_n = a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdots a_n.$$

Dado $p \in \mathbb{R}$, dizemos que o produto infinito converge para $p$ e escrevemos

$$\prod_{n=0}^{\infty} a_n = p$$

se

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p \neq 0.$$

Acima, a exigência de que $p \neq 0$ é uma condição técnica que simplifica os enunciados dos teoremas, conforme comentaremos mais adiante.

**Exemplo 1.** Vamos mostrar que

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \tag{1}$$

é convergente. De fato, notando que

$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{(n-1)(n+1)}{2},$$

temos, por exemplo, que

$$p_6 = \frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{4\cdot 6}{5^2}\cdot\frac{5\cdot 7}{6^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{6}.$$

Mais geralmente, os produtos parciais são da forma

$$p_n = \frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Logo vale (1).

**Teorema 1.** *Se o produto infinito*

$$\prod_{n=0}^{\infty} a_n = p$$

*converge, então*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

*Demonstração.* Supondo que o produto infinito convirja, temos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{p}{p} = 1.$$

□

*Observação* 1. A propriedade enunciada no teorema acima é análoga a uma propriedade das séries, se uma série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Ou seja, em ambos os casos o limite é o elemento neutro da operação. Note que o teorema acima não valeria sem a condição $p \neq 0$ na definição de convergência de um produto infinito, esta condição foi usada na demonstração do teorema, quando dissemos que o limite é $p/p$.

## 4. Produto de Viète

**Teorema 2** (Produto de Viète)**.**

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\cdots.$$

Vamos dar duas demonstrações para o produto de Viète. A primeira, mais bonita mas um pouco mais longa, é bem geométrica, e foi a forma como Viète pensou. Inclusive a Proposição 1 da seção 2 aparece no trabalho de Viète (ver [2], pág. 53-56). A segunda demonstração é mais curta e mais algébrica. Mas é o método desta segunda demonstração que se presta à generalização que apresentamos no final.

*Primeira demonstração.* Consideremos uma sequência de polígonos regulares inscritos no círculo de raio 1, começando com um quadrado e a cada etapa dobrando o número de lados do polígono. A sequência começa com um quadrado $\mathrm{P}_0$ e, para cada $\mathrm{n} \geqslant 0$, temos um polígono $\mathrm{P}_\mathrm{n}$ com $2^{\mathrm{n}+2}$ lados. Assim, o ângulo central do polígono $\mathrm{P}_\mathrm{n}$ vale $\alpha_\mathrm{n} = \frac{\pi}{2^{\mathrm{n}+1}}$.

Utilizando a Proposição 1, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\text{área do quadrado}}{\text{área do octógono}} &= \cos\frac{\pi}{4} \\ \frac{\text{área do octógono}}{\text{área do } 2^4\text{-ágono}} &= \cos\frac{\pi}{8} \\ \frac{\text{área do } 2^4\text{-ágono}}{\text{área do } 2^5\text{-ágono}} &= \cos\frac{\pi}{16} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2}$$

Sabendo que $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e usando a identidade

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}, \qquad \forall\theta \in (-\pi, \pi) \tag{3}$$

(para a conveniência do leitor, incluímos uma demonstração desta propriedade na Seção 8, no final do artigo) concluímos que

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Daí segue, analogamente, que

$$\begin{aligned} \cos\frac{\pi}{16} &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \\ \cos\frac{\pi}{32} &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

e, em geral,

$$\cos\frac{\pi}{2^\mathrm{n}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}{2} \qquad (\mathrm{n}-1 \text{ raízes quadradas}). \tag{4}$$

Substituindo (4) em (2), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\text{área do quadrado}}{\text{área do octógono}} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\\
\frac{\text{área do octógono}}{\text{área do } 2^4\text{-ágono}} &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\\
\frac{\text{área do } 2^4\text{-ágono}}{\text{área do } 2^5\text{-ágono}} &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{5}$$

Multiplicando as $n-2$ primeiras igualdades de (5), obtemos

$$\frac{\text{área do quadrado}}{\text{área do } 2^n\text{-ágono}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdots\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}{2}.$$

Fazendo $n$ tender para infinito, a área do $2^n$-ágono regular inscrito tende para a área do círculo, que é $\pi$. O quadrado inscrito no círculo de raio 1 tem lado $\sqrt{2}$ e, portanto, área 2. Logo

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\cdots.$$

*Segunda demonstração.* Utilizando a fórmula do seno do arco duplo, temos

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = \cos\frac{x}{2}\cdot 2\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{2}.$$

Utilizando repetidas vezes a mesma fórmula, segue que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x &= \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdot 2^2\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{4}\\
&= \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdot 2^3\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{8}\\
&\vdots\\
&= \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot 2^n\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}.
\end{aligned}$$

Dividindo por $x$, obtemos que, $\forall n$ e $\forall x \neq 0$,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\frac{2^n\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}}{x}. \tag{6}$$

A ideia agora é fazer $\mathrm{n}$ tender ao infinito. Note que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n \operatorname{sen}\frac{x}{2^n}}{x}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}.$$

Chamando $t=\frac{x}{2^n}$ e usando o limite fundamental (ver a Seção 8 abaixo)

$$\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}=1, \tag{7}$$

concluímos que

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x}=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cos\frac{x}{2^4}\cdots. \tag{8}$$

Finalmente, para $x=\frac{\pi}{2}$, otemos

$$\frac{2}{\pi}=\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cos\frac{\pi}{2^4}\cdots.$$

O valor dos cossenos que aparecem na igualdade acima já foram calculados na primeira demonstração. Substituindo, temos

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\cdots.$$

□

Viète demonstrou este teorema em 1593 e utilizou-o para calcular o valor de $\pi$ com 9 casas depois da vírgula. O produto de Viète foi o primeiro produto infinito na história da Matemática.

Como curiosidade vamos ver o que acontece fazendo $x=\frac{\pi}{3}$ em (8). De $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, obtemos

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}=\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{48}\cdots. \tag{9}$$

Como $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, usando a igualdade (3) repetidamente, encontramos o valor de todos esses cossenos. Por exemplo,

$$\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{24} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{48} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2},$$

$$\vdots$$

Substituindo os valores desses cossenos em (9), encontramos um produto infinito do mesmo tipo que o de Viète

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2}\cdots. \tag{10}$$

Note que o produto infinito (10) também poderia ter sido obtido pelo mesmo método da primeira demonstração do Teorema de Viète, se iniciássemos com um triângulo equilátero em vez de um quadrado.

Vamos agora provar, como consequência do Teorema 2, um resultado que costuma ser apresentado como exercício nas disciplinas de Análise na Reta, com outra demonstração.

**Corolário 1.**

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n\ \textit{raízes quadradas}} = 2.$$

*Demonstração.* O produto de Viète converge. Então, pelo Teorema 1, seu termo geral tende a 1, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}^{n\ \text{raízes quadradas}}}{2} = 1.$$

Como o denominador é constante igual a 2, para que o quociente tenda a 1 é necessário que o numerador tenda a 2. $\square$

## 5. Uma igualdade relacionada

Uma expressão relacionada é a igualdade

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}^{n \text{ raízes quadradas}}}{2} = 1. \tag{11}$$

Ela pode ser deduzida do produto de Viète. Para isto, reescrevemos o produto de Viète como

$$\frac{2}{\pi} = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdots ,$$

onde

$$r_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ raízes quadradas}}.$$

Definimos também

$$s_n = \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ raízes quadradas}}.$$

Em seguida, notamos que

$$r_n \cdot s_n = \sqrt{2+r_{n-1}} \cdot \sqrt{2-r_{n-1}} = \sqrt{2^2 - r_{n-1}^2} = s_{n-1}.$$

Com isto, podemos multiplicar o produto parcial por $s_n$,

$$\begin{aligned}
\frac{r_1}{2} \cdot \frac{r_2}{2} \cdots \frac{r_n}{2} \cdot s_n &= \frac{1}{2^n} r_1 r_2 \cdots r_{n-1} \cdot s_{n-1} \\
&= 2^{-n} r_1 r_2 \cdots r_{n-2} \cdot s_{n-2} \\
&\;\vdots \\
&= 2^{-n} r_1 r_2 \cdot s_2 \\
&= 2^{-n} \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} \\
&= 2^{-n} \sqrt{2} \cdot \sqrt{2^2 - 2} \\
&= 2^{-n+1}.
\end{aligned}$$

Logo

$$r_n^{-1} = 2^{n-1} s_n.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} 2^n s_n = \lim_{n\to\infty} 2r_n^{-1} = \pi.$$

Uma maneira alternativa de provar a mesma coisa é lembrar que, por (4), temos

$$\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{r_n}{2}.$$

Então

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2^{n+1}} = \sqrt{1-\frac{r_n^2}{4}} = \frac{\sqrt{4-r_n^2}}{2} = \frac{s_n}{2}.$$

Portanto

$$\pi\cdot\frac{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\dfrac{\pi}{2^{n+1}}} = 2^n s_n.$$

Fazendo $n$ tender para infinito e usando o limite fundamental (7) com $t = \frac{\pi}{2^{n+1}}$, temos

$$\lim_{n\to\infty} 2^n s_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\dfrac{\pi}{2^{n+1}}} = \pi\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t} = \pi,$$

provando (11).

Para ver (11) e várias outras identidades do mesmo tipo, o leitor pode consultar [5].

## 6. Uma generalização

O teorema que apresentamos nesta seção envolve a função trigonométrica inversa $\arccos x$. Para a conveniência do leitor, fazemos uma revisão desta função na última seção. Este resultado foi descoberto por Levin [6], em 2005, e a demonstração que apresentamos é uma adaptação das ideias de [7].

**Teorema 3.** *Para todo* $x \in (-2, 2)$ *vale*

$$\frac{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}}{\arccos\left(\dfrac{x}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2+x}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}{2}\cdots. \tag{12}$$

*Observação* 2. O produto de Viète é o caso partidular de (12) em que $x = 0$, enquanto que (10) corresponde ao caso $x = 1$.

*Demonstração.* Reescrevemos (8) como

$$\frac{\operatorname{sen} t}{t} = \cos\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2^2}\cos\frac{t}{2^3}\cos\frac{t}{2^4}\cdots, \qquad \forall t \neq 0,$$

e, para $t \in (0, \pi)$, fazemos a substituição $t = \arccos(\frac{x}{2})$ (note que $x \in (-2, 2)$).

Então

$$\operatorname{sen} t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}},$$

para todo $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, ou seja, para $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Acima, ao tomar a raiz quadrada com sinal mais, usamos que $\operatorname{sen} t > 0$ para $t \in (0, \pi)$.

Temos

$$\begin{aligned}
\cos t &= \frac{x}{2}\\
\cos\frac{t}{2} &= \sqrt{\frac{1+\cos t}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{x}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+x}}{2}\\
\cos\frac{t}{4} &= \sqrt{\frac{1+\cos\frac{t}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}{2}\\
\cos\frac{t}{8} &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}{2}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}{\arccos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2+x}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}{2}\cdots$$

para todo $x \in (-2, 2)$.

□

## 7. Outras representações de $\pi$ por produtos infinitos

Uma outra representação de $\pi$ por meio de um produto infinito é o famoso *produto de Wallis*

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{8}\cdots \tag{13}$$

Este produto foi obtido por Wallis em 1655 (ver [9]). O produto de Wallis é de natureza bem diferente do produto de Viète, no entanto, em 1999, o matemático T. Osler [8] descobriu uma conexão entre os dois. Existe uma família infinita de identidades para a qual os produtos de Wallis e de Viète são casos extremos:

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{\pi} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{17}{16}\cdots\\
\frac{2}{\pi} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{23}{24}\cdots\\
\frac{2}{\pi} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{31}{32}\cdot\frac{33}{32}\cdots\\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

Em cada uma dessas igualdades, aparecem os primeiros fatores do produto de Viète seguidos por uma infinidade de fatores do produto de Wallis.

Em 1873, o matemático belga E. Catalán [4] provou as identidades de tipo Wallis (ver [9])

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{16}{17}\cdots \tag{14}$$

e

$$\sqrt{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{14}{15}\cdots \tag{15}$$

É interessante notar que o produto dos lados direitos das igualdades (14) e (15) é igual ao lado direito da igualdade (13) e, portanto, o produto de Wallis pode ser obtido como uma consequência direta dos dois produtos de Catalán.

Existem muitos produtos infinitos importantes na Matemática. Por exemplo [1],

$$\operatorname{sen} x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}. \tag{16}$$

A igualdade (16) é devida a Euler, que viveu um século depois de Wallis, no entanto o produto de Wallis (13) pode ser obtido como caso particular de (16), para $x = \frac{\pi}{2}$. De fato,

$$
\begin{aligned}
1 = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} &= \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\pi^2}{2^2n^2\pi^2}\right)\\
&= \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n)^2-1}{(2n)^2}\right)\\
&= \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)(2n)}\\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\right)\cdots,
\end{aligned}
$$

de onde segue imediatamente o produto de Wallis (13). Para encerrar, comentamos que fazendo $x = \frac{\pi}{3}$ em (13) e seguindo o mesmo raciocínio feito acima, obtemos que

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{10} \cdots .$$

## 8. Complementos

Nesta seção, para a conveniência do leitor, relembramos alguns resultados que foram usados acima.

**1.** A demonstração da igualdade (3) é simples. Somando as igualdades

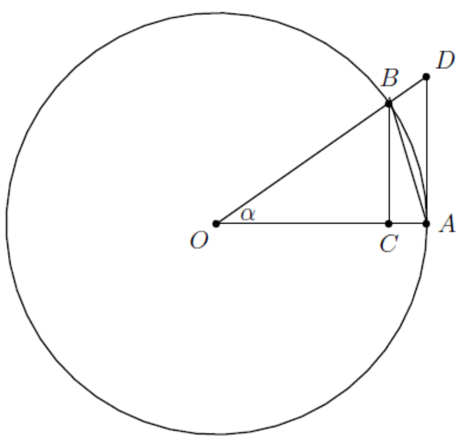
$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$$
$$1 = \cos^2\frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

obtemos

$$1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

Dividindo por 2 e extraindo a raiz quadrada de ambos os lados, obtemos (3).

**2.** Para a demonstração do limite fundamental (7), consideremos a figura abaixo, onde $\alpha = \widehat{AOB}$, $t$ é a medida do arco $AB$. Sejam $A_1$ a área do triângulo $OAB$, $A_2$ a área do setor circular $OAB$ e $A_3$ a área do triângulo $OAD$. Note que ao interpretar $t$ como sendo o comprimento do arco $AB$, estamos considerando o caso $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Da desigualdade




$$A_1 \leqslant A_2 \leqslant A_3,$$

segue que

$$\frac{\overline{OA} \cdot \overline{BC}}{2} \leqslant \frac{t}{2} \leqslant \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AD}}{2},$$

ou seja,

$$\frac{\operatorname{sen} t}{2} \leqslant \frac{t}{2} \leqslant \frac{\operatorname{tg} t}{2}.$$

Da desigualdade $\frac{\operatorname{sen} t}{2} \leqslant \frac{t}{2}$ segue que

$$\frac{\operatorname{sen} t}{t} \leqslant 1$$

e da desigualdade $\frac{t}{2} \leqslant \frac{\operatorname{tg} t}{2}$ segue que

$$\frac{\operatorname{sen} t}{t} \geqslant \cos t.$$

Assim ficou provado que, para todo $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, vale

$$\cos t \leqslant \frac{\operatorname{sen} t}{t} \leqslant 1. \tag{17}$$

Mas as funções $\cos t$ e $\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ são pares (não mudam se substituirmos $t$ por $-t$). Logo as desigualdades (17) valem para todo $t \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$. Como

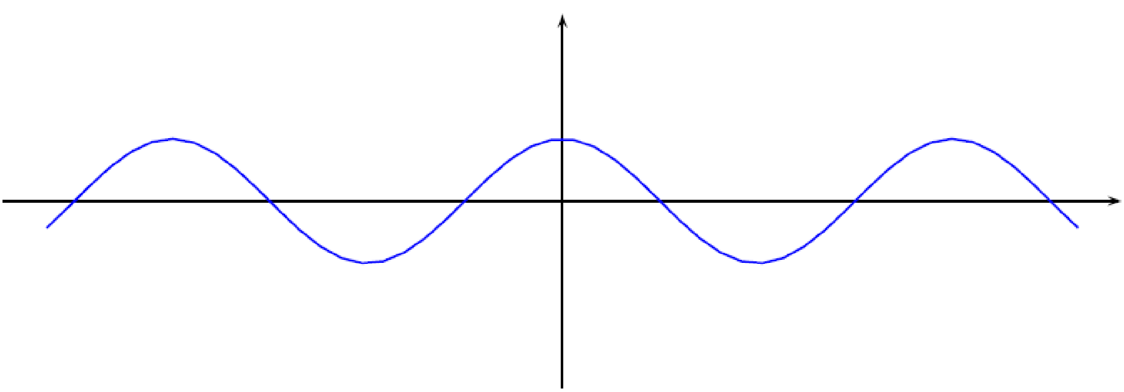
$$\lim_{t \to 0} \cos t = \cos 0 = 1,$$

e, pelas desigualdades (17), a função $\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ está mais próxima de 1 do que a função $\cos t$, temos que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$$

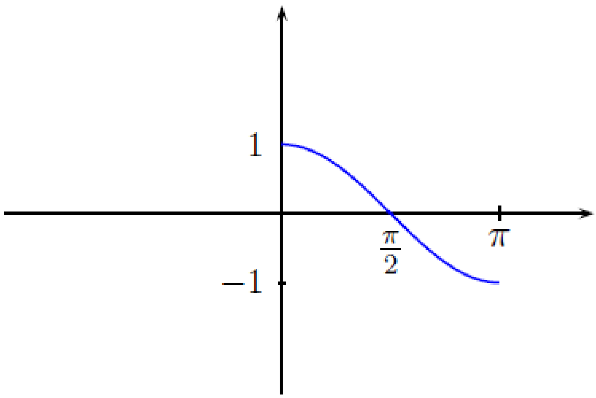
**3.** Finalmente, vamos fazer uma revisão da função trigonométrica inversa $\arccos(x)$.

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, cujo gráfico é dado abaixo, não tem inversa, pois não é injetora,



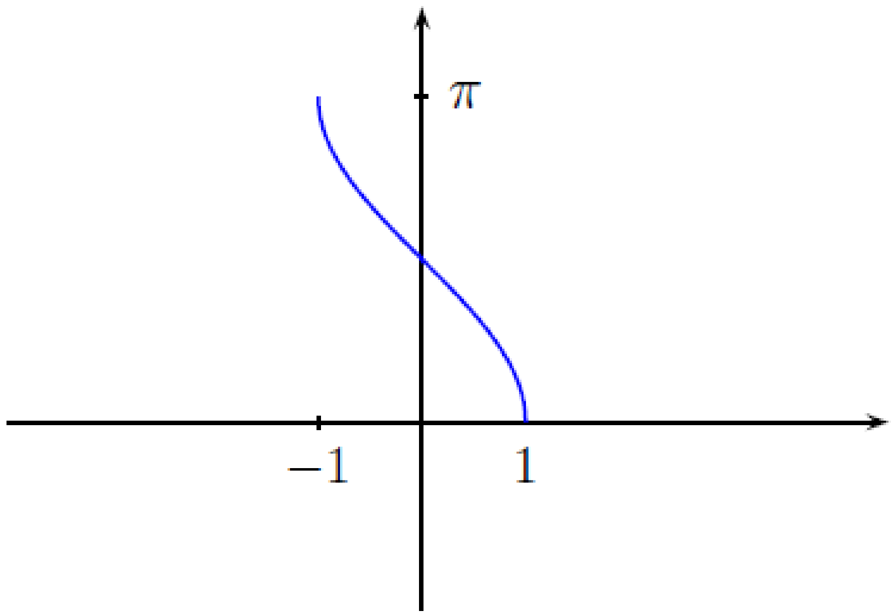
$f(x) = \cos x$

já que existem retas horizontais que cortam seu gráfico em mais de um ponto e, por isto, existem $x_1 \neq x_2$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Uma maneira de conseguir uma inversa é restringir o domínio. Consideremos a função $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \cos x$, $\forall x \in [0, \pi]$, cujo gráfico é dado abaixo.




$$g : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \ g(x) = \cos x$$

A função $g$ é uma restrição de $f$. A imagem de $g$ é o intervalo $[-1, 1]$. Qualquer reta horizontal corta o gráfico de $g$ no máximo uma vez. Portanto para qualquer $y \in [-1, 1]$ existe um único $x \in [0, \pi]$ tal que $g(x) = y$, ou seja, $g$ tem uma inversa $h : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Esta inversa é chamada de função arco cosseno. Se $h(s) = t$, então $g(t) = s$, isto é, $t$ é o arco cujo cosseno é $s$. Costuma-se usar a notação $h(x) = \arccos(x)$. Assim, por exemplo, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ pois $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Como qualquer função inversa, o gráfico de $h$ é obtido pela reflexão do gráfico de $g$ em relação à reta $y = x$. O gráfico de $h(x) = \arccos(x)$ é dado abaixo.




$$h : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ \ h(x) = \arccos x$$

## 9. Agradecimento

Agradeço ao (à) parecerista pela leitura atenta e por sugerir as referências bibliográficas [5], [6] e [10].

## Referências

[1] L. Ahlfors – Complex Analysis. An Introduction to the Theory of Functions of One Complex Variable. AMS Chelsea Publishing, 3rd edition, 2021.

[2] L. Berggren, J. Borwein, and P. Borwein – Pi: A Source Book. 3rd edition, Springer, 2004.

[3] R. Brent – Fast multiple-precision evaluation of elementary functions. J. Assoc. Comp. Machine 23 (1976), 242-251.

[4] E. Catalán – Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 77 (1873), 198-201.

[5] B. Edun – Finite and infinite nested square roots converging to unity. Ramanujan J. 51 (2020), 495-500.

[6] A. Levin – A new class of infinite products generalizing Viète's product formula for $\pi$. Ramanujan J. 10 (2005), 305-324.

[7] S. Moreno and E. García-Caballero – On Viète-like formulas. Journal of Approximation Theory, 174 (2013), 90-112.

[8] T. Osler – The united Viète's and Wallis' products for $\pi$. Amer. Math. Monthly, 106 (1999), 774-776.

[9] J. Sondow and H. Yi – New Wallis- and Catalan-type infinite products for $\pi$, e, and $\sqrt{2+\sqrt{2}}$. Am. Math. Monthly 117 (2010), 912-917.

[10] F. Viète – Variorum de Rebus Mathematicis Responsorum Liber VII (1593).

Eduardo Henrique de Mattos Brietzke
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
<brietzke@mat.ufrgs.br>

Recebido: 16/04/2024
Publicado: 17/12/2024