

O teorema de Pappus-Guldin sobre volume de sólidos de revolução

Alex Ferreira Rossini 

Andre Luiz Goulart Matos 

Resumo

Introduzido de modo axiomático, o Princípio de Cavalieri é uma ferramenta clássica no processo de dedução do volume de sólidos estudados no ensino médio, tais como: cilindro, cone e esfera. A proposta deste trabalho consiste em apresentar um Teorema de Pappus-Guldin como opção para o cálculo do volume de sólidos de revolução. Para isso, apresentaremos o conceito de centroide de uma figura plana homogênea e o localizaremos no plano. Por fim, encontraremos o centroide de um setor circular reto e, por meio do Teorema de Pappus-Guldin, calcularemos o volume da esfera.

Palavras-chave: Sólidos de revolução; Centroide; Teorema de Pappus-Guldin.

Abstract

Introduced axiomatically, Cavalieri's Principle is a classic tool in the process of deducing the volume of solids studied in high school, such as cylinders, cones and spheres. The purpose of this paper is to present a Pappus-Guldin theorem as an option for calculating the volume of solids of revolution. To do this, we will introduce the concept of the centroid of a (homogeneous) plane figure and locate it in the plane. Finally, we will find the centroid of a right circular sector and, using the Pappus-Guldin Theorem, calculate the volume of the sphere.

Keywords: Solid of revolution; Centroid; Theorem of Pappus-Guldin.

1. Introdução

Ao longo de todo o texto usaremos o termo *figura homogênea* em referência a uma região do plano de densidade constante. Neste trabalho, estamos interessados em obter as fórmulas para o volume de certos sólidos de revolução, tendo como método o emprego de um Teorema de Pappus-Guldin pouco explorado no ensino básico. Para realizar esta tarefa, precisaremos do conceito de *centroide* $G = (\bar{x}, \bar{y})$ de figuras planas e de sua localização no plano.

Em física, o conceito de centroide desempenha um papel importante no contexto de dinâmica dos corpos rígidos. Grosso modo, para estudar os efeitos (por exemplo, translação e rotação) da ação de uma força externa em um corpo rígido, que pode apresentar forma irregular, idealiza-se o corpo substituído por uma única partícula, cuja massa é a mesma do corpo original. Esta partícula ou ponto recebe o nome de centroide. Em seguida, considera-se a ação da força externa neste ponto de referência (que “representa” todos os pontos

do corpo) e a análise dos efeitos é simplificada, uma vez que a distribuição da massa do corpo influencia os efeitos.

Para termos uma ideia de centroide imagine, nosso caso de interesse, um disco homogêneo e de mesma espessura ao longo de sua extensão. Em seguida, desejamos equilibrá-lo, de modo que permaneça paralelo ao chão, apoiando-o em uma haste fixa e vertical ao chão. Dependendo do ponto de contato com a haste o prato poderá realizar um movimento de rotação e cair. Caso contrário, o equilíbrio do prato sobre a haste, pode ser interpretado como se a massa do prato estivesse toda concretada sobre o ponto (centroide) de contato com a haste, de sorte que a força exercida pela haste sobre o prato não o rotaciona.

A proposta deste trabalho, como dito anteriormente, é explorar o volume de certos sólidos de revolução. Para este fim, consideremos uma figura plana D (homogênea) girando em torno de um eixo fixo; assim, cada ponto da figura (corpo rígido) gira o mesmo ângulo e cada ponto descreve um caminho circular de certo comprimento a depender de quão longe está do eixo. Não é difícil de imaginar o rastro de tais pontos descrevendo um sólido, e neste contexto, o comprimento do caminho traçado pelo centroide G é especial.

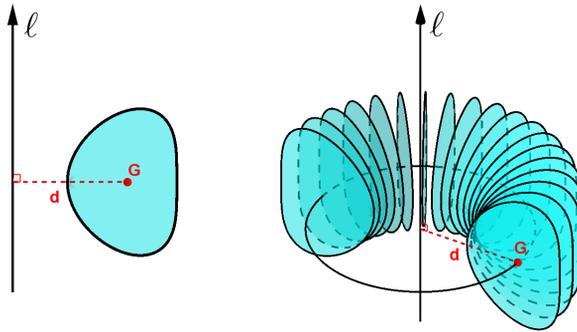


Figura 1: Região D e o correspondente sólido de revolução.

De fato, o volume de tal sólido de revolução é o mesmo do cilindro de base D e altura igual ao comprimento da circunferência descrita por G . Esta relação entre o volume de sólido de revolução e o centroide da figura rotacionada é o conteúdo do teorema a seguir.

Teorema 1 (Pappus-Guldin). *Se D é uma região do plano de área A e ℓ é uma reta no plano de D que não intersecta o interior da região D , então o volume do sólido gerado pela rotação de D em torno de ℓ por um ângulo α (em radianos) é igual a*

$$V = A \times L = \alpha dA,$$

onde L denota o comprimento do arco de circunferência determinado pelo centroide G da região D e d é a distância de G ao eixo de rotação. Em particular, se o sólido é obtido por meio de uma rotação completa em torno de ℓ , então

$$V = 2\pi dA. \tag{1}$$

2. Um pouco de história

De acordo com [2, 7], Pappus nasceu no Egito em Alexandria (aprox. 300 d.C) e seus trabalhos escritos indicam se tratar de um geômetra e professor de matemática. No Livro VII de sua *Coleção* foi apresentado pela primeira vez (sem prova) o enunciado do Teorema 1. Após um longo período sem alarde, de forma

independente, o matemático suíço Paul Guldin (1577-1643) redescobre o resultado geométrico. Contudo, nem Guldin (1640) e nem Cavalieri que estudará o problema (1647) dispunham de uma prova satisfatória para o problema milenar. Em 1644 [3] o matemático John Antonio Roccha, aluno de Guldin, publica na *Opera Geometrica* de Torricelli uma demonstração rigorosa do resultado. Para uma prova do Teorema de Pappus-Guldin (em português) e para saber mais sobre a história deste resultado consulte [6]. Para uma motivação, particular, do resultado veja [4] pag. 284.

3. Centroide de um conjunto de partículas

Como desejamos “substituir” uma figura plana por um ponto (seu centroide) vejamos, então, a definição matemática de centroide para um conjunto de pontos de massa distribuídas num plano.

Considere um sistema de partículas de massas m_1, \dots, m_k e posição $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$. Então, as

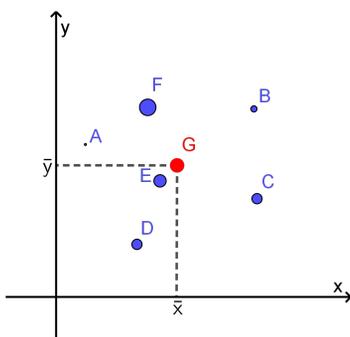


Figura 2: Sistema de partículas.

coordenadas cartesianas do centroide $G = (\bar{x}, \bar{y})$ são calculadas a partir das médias ponderadas, conforme as equações:

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_kx_k}{m_1 + m_2 + \dots + m_k} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_ky_k}{m_1 + m_2 + \dots + m_k}. \quad (2)$$

Note que a quantia \bar{x} tem a propriedade de substituir cada elemento da lista (x_1, x_2, \dots, x_k) de modo a preservar a média ponderada, a mesma propriedade vale para \bar{y} com relação a lista (y_1, y_2, \dots, y_k) .

3.1. Centroide de figuras planas básicas

Conforme vimos em Teorema 1, o volume de um sólido (de revolução) depende da distância d entre o centroide G e o eixo de revolução. Desse modo, a localização de G é uma etapa fundamental e, a fim de tornar o trabalho mais simples, admitiremos as seguintes propriedades:

- (1) O *ponto médio* de um segmento (homogêneo) de reta coincide com G , além disso, a “massa” atribuída a ele é proporcional ao seu comprimento [8].
- (2) Se uma figura plana (homogênea) admite eixo de simetria então G localiza-se sobre tal eixo. Por consequência, se a figura possui dois eixos de simetria então seu centroide encontra-se na intersecção dos eixos.

- (3) Para figuras planas compostas, ou seja, figuras formadas pela justaposição de outras formas (não necessariamente por triângulos) como no do caso polígono ABCDE da Fig. 3, o centroide G é obtido determinando os centroides de cada parte da figura separadamente e, em seguida, aplicando (2) para tal conjunto de pontos.

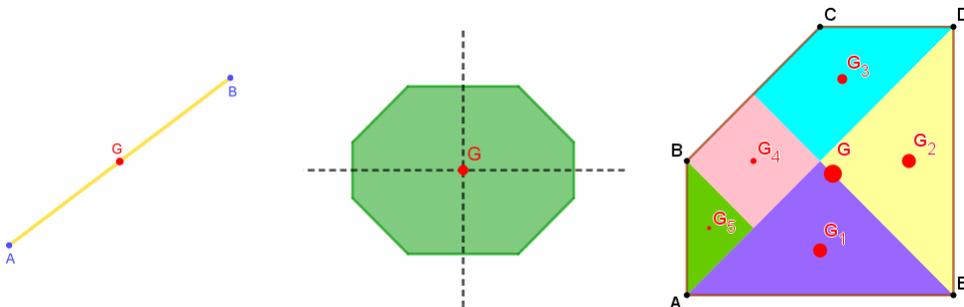


Figura 3: Centroide de figuras planas.

Para futura referência, reunimos no Exemplo 1 a posição de G para um conjunto de figuras planas, a saber: retângulos, triângulos e discos.

Exemplo 1. Localização dos centroides das figuras: retângulo, triângulo e disco. Cabe enfatizar que estamos considerando para cada figura seu contorno e a região limitada pelo mesmo.

- Para um triângulo, localiza-se G sobre a intersecção das medianas, ou seja, G é o *baricentro*. No caso particular de um triângulo retângulo, o centroide localiza-se a um terço de sua altura e base.
- Para um retângulo, tem-se que G está sobre a intersecção das diagonais, visto que elas são eixos de simetria. Perceba que as diagonais são ainda eixos de simetria para o contorno do retângulo, neste caso, os centroides de cada figura coincidem. Neste último caso, o centroide não pertence a figura.
- Para um disco (ou uma circunferência) G é o seu centro, pois qualquer diâmetro é um eixo de simetria.

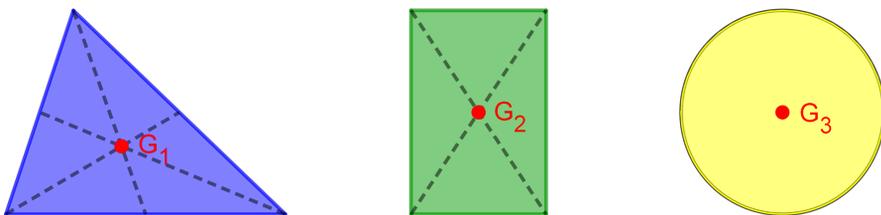


Figura 4: Centroide de figuras planas básicas.

4. Volume de alguns sólidos de revolução

Ao iniciarmos o assunto *volume de sólidos* (de revolução) no ensino básico, tradicionalmente, seguimos uma linha metodológica a partir do *Princípio de Cavalieri*. Isto é, uma sequência didática a fim de apresentar as fórmulas para o volume de tais sólidos inicia-se apresentando a unidade de medida para o volume (cubo de aresta 1 cujo volume, por definição, será igual a 1) em seguida discute-se o volume de um paralelepípedo retângulo e as conhecidas fórmulas são deduzidas.

No presente trabalho, apresentamos as tradicionais fórmulas para o volume de alguns sólidos de revolução (cilindro reto, cone reto, tronco de cone e esfera) sob a ótica do Teorema 1 e dos fatos contidos na Seção 3.1.

4.1. Volume do Cilindro

Sejam ABCD um retângulo de altura $AB = h$ e base $AD = r$ com eixo- y de revolução conforme Fig. 5.

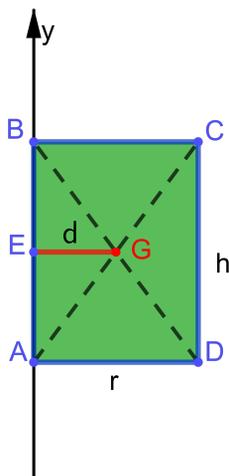
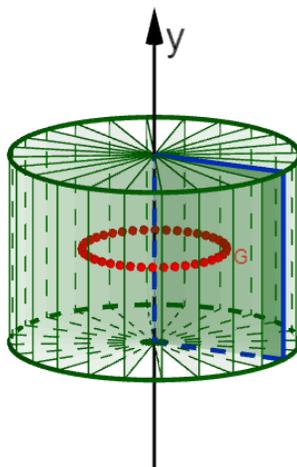


Figura 5: Centro do Cilindro ABCD.

Na Seção 3.1, anotamos que o centroide G de $ABCD$ situa-se sobre o encontro das diagonais. Denotamos por GE a distância d do centroide de $ABCD$ ao eixo- y de revolução. Note que, GE é a base média do triângulo ABD reto em A , pois G é ponto médio de BD e GE é paralelo a AD , logo $d = GE = \frac{r}{2}$. Portanto, pelo Teorema 1, o volume do cilindro reto é

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \cdot d \cdot (ABCD) \\
 &= 2\pi \cdot \frac{r}{2} \cdot (rh) \\
 &= \pi r^2 h.
 \end{aligned}$$



4.2. Volume do Cone

Considere a superfície de um triângulo ABC (reto em A) e um eixo-y de revolução, com AB sobre tal eixo, assim AC é perpendicular ao eixo. Sabemos (Seção 3.1) que a localização do centroide G de um triângulo fica em seu baricentro.

Nestas condições, a distância d do baricentro G ao eixo de rotação é obtida traçando por G a perpendicular ao eixo-y. Dito isso, denotamos por g o diâmetro do círculo que circunscreve ABC, então a hipotenusa BC = g e, além disso, a mediana relativa à hipotenusa mede metade de seu comprimento, isto é, AF = g/2. Desde que G divide as medianas na razão de 2 : 1 temos: AG = $\frac{2}{3}$ AF, e substituindo AF = g/2 obteremos AG = $(\frac{2}{3})(\frac{g}{2}) = \frac{g}{3}$.

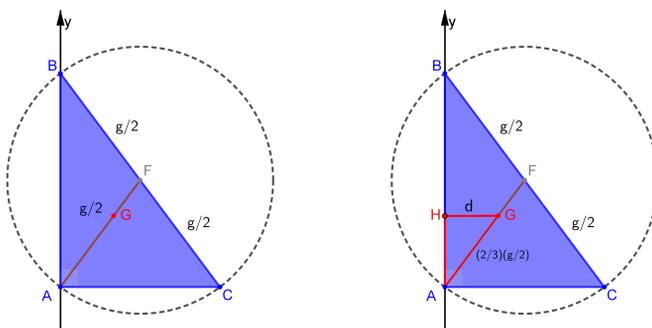


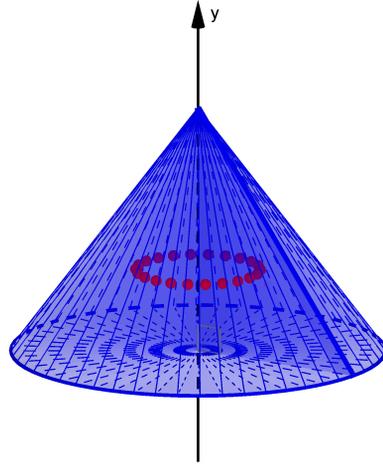
Figura 6: centroide e distância ao eixo.

Agora, traçando a perpendicular partindo de G ao eixo-y determinamos o segmento GH e, conseqüentemente, o triângulo AGH é reto em H. Já que os ângulos $\widehat{G\hat{A}H}$ e $\widehat{A\hat{B}F}$ são congruentes, pois ABF é isósceles, temos $\text{sen}(\widehat{G\hat{A}H}) = \text{sen}(\widehat{A\hat{B}F}) = \frac{AC}{g}$, a última igualdade segue pela Lei dos Senos. Logo,

$$d = GH = AG \cdot \text{sen}(\widehat{G\hat{A}H}) = \frac{AC}{3}.$$

Finalmente, do Teorema 1, segue que o volume V do cone, com $AB = h$ e $AC = r$, é dado por:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \cdot d \cdot (ABC) \\ &= 2\pi \cdot \frac{AC}{3} \cdot \left(\frac{AC \cdot AB}{2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \pi r^2 h. \end{aligned}$$



4.3. Volume do Tronco de Cone

Para a dedução do volume de tronco de cone consideramos a revolução (completa) de um trapézio retângulo $ABCD$ em torno do eixo- y , de modo que o lado AB e a base maior AD permaneçam, respectivamente, sobreposto e perpendicular ao eixo de revolução.

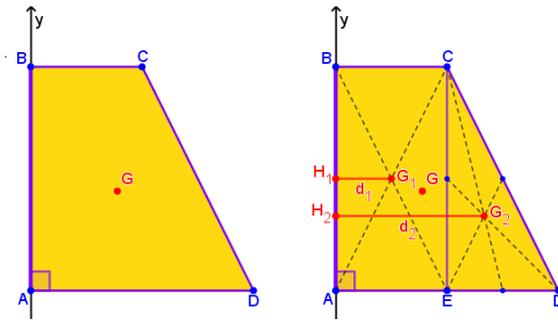


Figura 7: Distâncias dos centroides.

Inicialmente, para determinarmos a distância d do centroide G do trapézio $ABCD$ ao eixo de revolução (eixo- y), dividimos $ABCD$ em um retângulo $ABCE$ e em um triângulo CDE reto em E . Denotamos os centroides de $ABCE$ e de CDE por G_1 e G_2 , respectivamente, e suas respectivas distâncias ao eixo- y por d_1 e d_2 , conforme ilustrado em Fig. 7.

Considerando $AD=R$, $BC=r$ e $AB=h$, respectivamente, o raio da base maior (R), o raio da base menor (r) e a altura (h) do trapézio retângulo $ABCD$, temos

$$d_1 = \frac{BC}{2} = \frac{r}{2} \quad \text{e} \quad d_2 = BC + \frac{ED}{3} = r + \frac{R-r}{3} = \frac{R+2r}{3}.$$

Assim, a distância do centro massa do trapézio retângulo ABCD ao eixo-y, é obtida pela a média ponderada tomando as distâncias d_1 e d_2 como valores e as respectivas áreas como pesos. Logo,

$$d = \frac{d_1 S_1 + d_2 S_2}{S_1 + S_2} = \left(\frac{R^2 + r^2 + rR}{3} \right) \left(\frac{1}{r + R} \right).$$

em que $S_1 = rh$ é a área do retângulo ABCE e $S_2 = \frac{h(R-r)}{2}$ a área do triângulo CDE. Portanto, em vista do Teorema de Pappus - Guldin,

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \cdot d \cdot (\text{ABCD}) \\ &= 2\pi \left(\frac{R^2 + r^2 + rR}{3} \right) \left(\frac{1}{r + R} \right) \left(\frac{(r + R)h}{2} \right) \\ &= \frac{\pi h}{3} [R^2 + r^2 + rR]. \end{aligned}$$



5. Exemplo e alguns problemas resolvidos

Num primeiro olhar, o emprego do Teorema 1 realizado na Seção 4 pode parecer não vantajoso. Porém, para sólidos afastados do eixo de revolução percebemos sua potencialidade. O exemplo 2 a seguir (veja [4, 5] para mais detalhes) ilustra a eficiência, no cálculo do volume de sólidos de revolução, do processo dado pelo Teorema 1.

Exemplo 2. Determine o volume de cada sólido obtido pela revolução das figuras abaixo. Para isso, obtenha a distância d e aplique o Teorema 1.

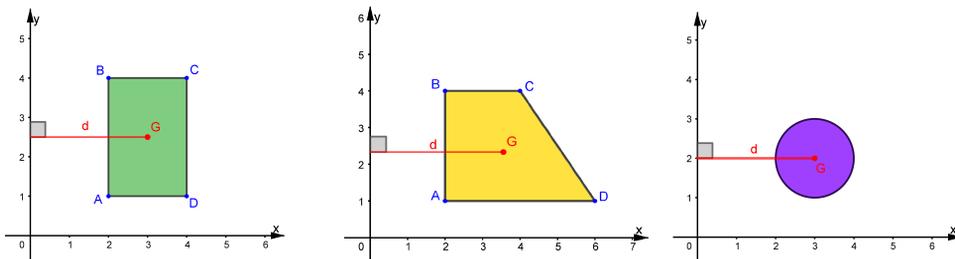


Figura 8: Seções transversais.

Problema 1. Considere o sólido obtido pela revolução de um retângulo ABCD em torno de um eixo-y. Sabe-se que o lado BC mede 6 cm, a diagonal BD mede 12 cm e é paralela ao eixo de revolução, conforme ilustra a figura abaixo. Determine, com base nos dados fornecidos, o volume desse sólido.

Solução: A estratégia (clássica) para obter o volume do sólido é particioná-lo em sólidos menores e/ou adicionar ao sólido inicial porções, cujo volume sejam fáceis de determinar. Visualizando o sólido na



Figura 9: Toros correspondentes às seções transversais.

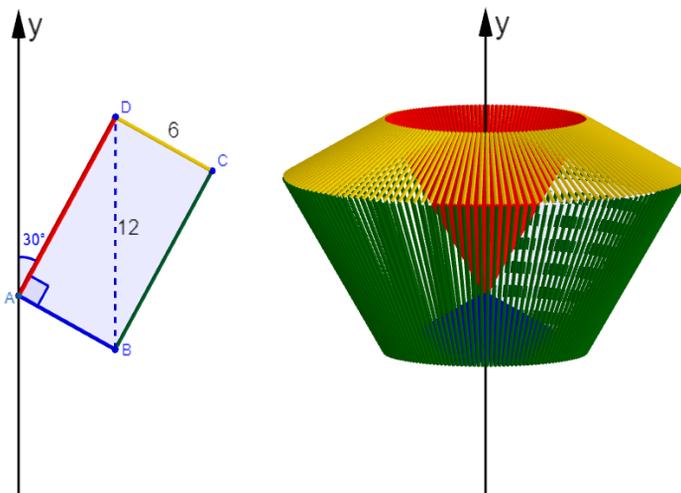


Figura 10: Sólido de revolução.

Fig. 10, podemos concluir que o volume desejado é obtido considerando o volume de dois troncos de cone de mesma base maior e bases menores opostas e subtraindo deste o volume de dois cones de mesmo vértice A e cujas bases são as bases menores dos tais dois troncos de cone.

Para resolver o exemplo à luz do Teorema 1, temos que a área do retângulo ADCD na Fig. 10 (seção transversal do sólido de revolução) vale:

$$(ABCD) = BC \cdot CD = 6 \cdot 12 \cos(30^\circ) = 36\sqrt{3}.$$

Por fim, temos $d = AB \sin(30^\circ) = 3\sqrt{3}$ e daí o volume procurado é:

$$V = 2\pi d(ABCD) = 648\pi.$$

Problema 2. Determine o volume do fuso esférico correspondente ao giro de 35° graus, usando os dados da figura.

Solução: Temos $d = \frac{4r}{3\pi}$ e $\theta = 35^\circ$. Portanto, $V = \frac{35\pi}{180} \cdot \frac{4r}{3\pi} \cdot \frac{\pi r^2}{2} = \frac{7\pi r^3}{18}$.

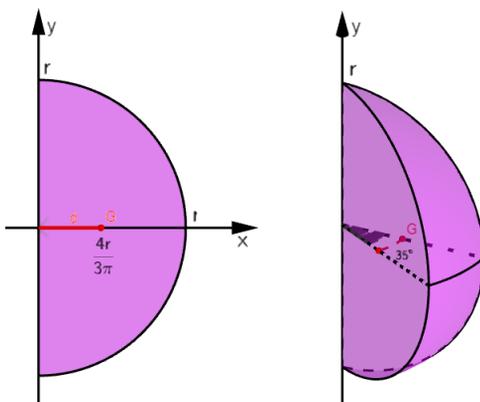


Figura 11: Fuso esférico.

Neste exemplo, assumimos conhecido que $G = (\frac{4r}{3\pi}, 0)$ é o centroide do semidisco e, neste caso, d é a abscissa de G . Na Seção 6 daremos mais detalhes sobre o centroide de um semidisco.

6. Volume da Esfera

Denote por D o setor circular do plano \mathbb{R}^2 formado pelos pontos (x, y) tais que:

$$D : x^2 + y^2 \leq r^2, \text{ com } x \geq 0, y \geq 0 \text{ (} r > 0 \text{)}.$$

Assumimos, por um momento, conhecido que $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{4r}{3\pi}, \frac{4r}{3\pi})$ é centroide da região D .

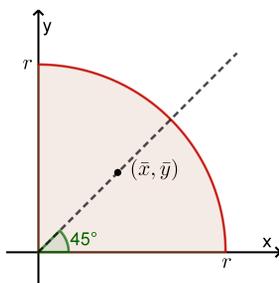


Figura 12: Centroide do setor circular reto.

Por simetria, o ponto $(0, \frac{4r}{3\pi})$ é o centroide do semidisco na Fig. 13.

Logo, $d = \frac{4r}{3\pi}$ é a distância de $(0, \frac{4r}{3\pi})$ ao eixo- x de revolução. Portanto, o volume da esfera é

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \cdot \left(\frac{4r}{3\pi}\right) \cdot \left(\frac{\pi r^2}{2}\right) \\
 &= \frac{4\pi}{3} r^3.
 \end{aligned}$$

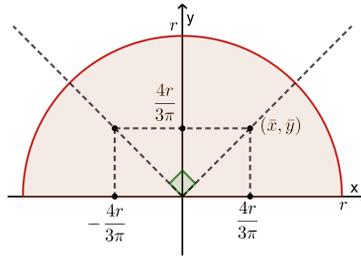


Figura 13: Centroide do semidisco.

de acordo com o Teorema 1. A partir deste ponto trataremos de justificar que o centroide do setor circular D é o ponto $G = (\frac{4r}{3\pi}, \frac{4r}{3\pi})$. Percebemos que o conhecimento prévio do centroide de figuras planas é crucial para manusear o Teorema 1. Assim, o professor interessado no tema pode fazer uso de tabelas que trazem os centroides de várias figuras planas.

No que segue, exploraremos um longo, porém, importante processo para obter o centroide G da região D . A ideia do processo a seguir é aproximar a região D por uma certa família de polígonos cujos centroides poderemos determinar e, num processo limite, encontrar o centroide do setor D .

7. Centroide de semidisco

A presente seção tem o papel de apresentar algumas fórmulas para a área e o centroide de um polígono (convexo) definido por seus vértices, que serão empregadas na localização do centroide de um *semidisco*.

Dado um polígono $A_0A_1 \cdots A_nA_{n+1}$ de vértices consecutivos cujos lados são os segmentos de reta entre $n + 2$ vértices $A_0(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1), \dots, A_n(x_n, y_n), A_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$; a área S de tal polígono (cujos vértices estão ordenados no sentido anti-horário) é dada, em notação de determinantes, pela fórmula (veja [10] para uma demonstração):

$$2S = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_n & x_{n+1} \\ y_n & y_{n+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{n+1} & x_0 \\ y_{n+1} & y_0 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Para $A_0A_1A_2 \cdots A_nA_{n+1}$ as coordenadas (veja [1]) do centroide $G = (\bar{x}, \bar{y})$ são dadas pelas equações:

$$6S\bar{x} = (x_0+x_1) \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix} + (x_1+x_2) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \cdots + (x_n+x_{n+1}) \begin{vmatrix} x_n & x_{n+1} \\ y_n & y_{n+1} \end{vmatrix} + (x_{n+1}+x_0) \begin{vmatrix} x_{n+1} & x_0 \\ y_{n+1} & y_0 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

$$6S\bar{y} = (y_0+y_1) \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix} + (y_1+y_2) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \cdots + (y_n+y_{n+1}) \begin{vmatrix} x_n & x_{n+1} \\ y_n & y_{n+1} \end{vmatrix} + (y_{n+1}+y_0) \begin{vmatrix} x_{n+1} & x_0 \\ y_{n+1} & y_0 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Por meio das fórmulas (3)-(4)-(5) da área e das coordenadas do centroide, respectivamente, de um polígono convexo, localizamos o centroide de um semidisco.

7.1. Processo de exaustão: área de setor circular

Seja D a região do plano \mathbb{R}^2 situada no primeiro quadrante e formada pelos pontos (x, y) tais que $x^2 + y^2 \leq r^2$ ($r > 0$).

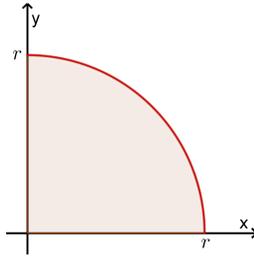


Figura 14: Setor circular D.

Em seguida, considere os pontos $A_i(x_i, y_i)$ sobre a circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ de coordenadas

$$x_i = r \cos\left(\frac{i\pi}{2N}\right) \quad \text{e} \quad y_i = r \sin\left(\frac{i\pi}{2N}\right), \quad 0 \leq i \leq N \quad (N \geq 1). \quad (6)$$

Seja $O = (0, 0)$ a origem do plano (ortogonal) \mathbb{R}^2 . Então, de (3), a área S_N da região delimitada pelo polígono convexo (fechado) $P_N = A_0A_1 \cdots A_NO$ é dada por:

$$2S_N = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_{N-1} & x_N \\ y_{N-1} & y_N \end{vmatrix}.$$

pois o vértice $(x_{N+1}, y_{N+1}) = (0, 0)$. Substituindo as coordenadas (6) dos vértices, a área torna-se:

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{r^2}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left[\cos\left(\frac{i\pi}{2N}\right) \sin\left(\frac{(i+1)\pi}{2N}\right) - \sin\left(\frac{i\pi}{2N}\right) \cos\left(\frac{(i+1)\pi}{2N}\right) \right] \\ &= \frac{r^2}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left[\sin\left(\frac{(i+1)\pi}{2N} - \frac{i\pi}{2N}\right) \right] \\ &= \frac{Nr^2}{2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2N}\right) \right]. \end{aligned}$$

Do ponto de vista geométrico, a medida que N cresce a forma do polígono P_N se aproxima da forma de D . Assim, para cada $N \in \{1, 2, 3, \dots\}$, a área S_N do polígono P_N inscrito em D é uma aproximação por falta da área $A(D)$ da região D e conforme N aumenta o erro cometido por esta aproximação pode ser escolhido tão pequeno quanto se desejar.

Grosso modo, para N grande o suficiente, podemos escrever:

- (1) $P_N \approx D$;
- (2) $S_N \approx A(D)$.

Mais precisamente, para a sequência numérica $(S_N)_{N \geq 1}$ temos a convergência (de áreas):

$$S_N \rightarrow \frac{\pi r^2}{4} = A(D) \quad \text{quando} \quad N \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

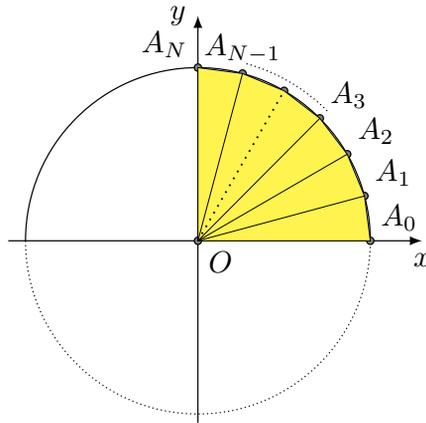


Figura 15: Aproximação para o setor circular.

De fato, do limite fundamental $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$, produzimos o limite abaixo e (7) segue como consequência direta:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} N \text{sen} \left(\frac{\pi}{2N} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\pi \text{sen} \left(\frac{\pi}{2N} \right)}{\frac{\pi}{2N}} = \frac{\pi}{2} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen} \left(\frac{\pi}{2N} \right)}{\frac{\pi}{2N}} = \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2}.$$

É intuitivo, pois $P_N \approx D$, que o centroide (x^N, y^N) de P_N esteja cada vez mais próximo do centroide (\bar{x}, \bar{y}) de D , isto é,

$$(x^N, y^N) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}).$$

Dessa forma, para determinarmos as coordenadas do centroide da região D explicitaremos na Subseção 7.2 a sequência $\{(x^N, y^N)\}_{N \geq 1}$ e em seguida o cálculo de seu limite.

7.2. Centroide de Setor Circular

Inicialmente, vamos determinar as coordenadas do centroide de P_N ; e para isso as fórmulas de *transformação em produto para senos e cossenos* e as identidades (8) que aparecem em [9] (RPM 77, p. 51) serão úteis

$$\sum_{i=0}^n \cos(q + ix) = \frac{\text{sen} \left(\frac{(n+1)x}{2} \right)}{\text{sen} \left(\frac{x}{2} \right)} \cos \left(q + \frac{nx}{2} \right). \quad (8)$$

$$\sum_{i=0}^n \text{sen}(q + ix) = \frac{\text{sen} \left(\frac{(n+1)x}{2} \right)}{\text{sen} \left(\frac{x}{2} \right)} \text{sen} \left(q + \frac{nx}{2} \right).$$

Sejam x^N e y^N as coordenadas do centroide do polígono P_N de área S_N . Então, de (4)-(5) e (8) temos

$$\begin{aligned} x^N &= \frac{1}{6S_N} \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} + x_i) \begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{vmatrix} \\ &= \frac{r^3}{6S_N} \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2N} \right) \right] \sum_{i=0}^{N-1} \left[\cos \left(\frac{(i+1)\pi}{2N} \right) + \cos \left(\frac{i\pi}{2N} \right) \right] \\ &= \frac{r^3}{3S_N} \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4N} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4N} \right) \right] \sum_{i=0}^{N-1} \left[\cos \left(\frac{(i+1)\pi}{2N} \right) + \cos \left(\frac{i\pi}{2N} \right) \right] \\ &= \frac{r^3}{3S_N} \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4N} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4N} \right) \right] \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4N} \right)} \left[2 \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4N} \right) \right] \\ &= \frac{r^3}{3S_N} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4N} \right) \right]^2. \end{aligned}$$

De forma análoga, a ordenada do centroide é dada por

$$y^N = \frac{r^3}{3S_N} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4N} \right) \right]^2.$$

Fazendo $N \rightarrow +\infty$, obtemos

$$x^N \rightarrow \frac{4r}{3\pi} \quad \text{e} \quad y^N \rightarrow \frac{4r}{3\pi},$$

pois, $S_N \rightarrow \frac{\pi r^2}{4}$ e $\left[\cos \left(\frac{\pi}{4N} \right) \right] \rightarrow 1$. Portanto, $G = \left(\frac{4r}{3\pi}, \frac{4r}{3\pi} \right)$ é o centroide da região D , como queríamos demonstrar.

Considerações finais

Para a área de superfícies há também uma fórmula envolvendo o centroide da linha rotacionada e o seu comprimento. Vejamos o seguinte Teorema de Pappus-Guldin para áreas de superfícies de revolução.

Teorema 2. *Girando-se uma curva (ou linha) C ao longo de um ângulo em torno de um eixo de seu plano, eixo este que não corte a curva, a área A da superfície assim formada é igual ao produto do comprimento $|C|$ da curva pelo comprimento L da trajetória descrita pelo centroide G da curva, isto é,*

$$A = |C| \times L.$$

Mais especificamente, seja α rad o ângulo de rotação da linha C então $A = |C| \times \alpha d$, onde d é a distância de G ao eixo de revolução.

No caso de uma volta completa, em torno do eixo, uma circunferência é descrita pelo centroide e, neste caso, $L = 2\pi d$. Portanto, a fórmula dada no Teorema 2 tem a seguinte expressão mais simples

$$A = 2\pi d|C|.$$

A motivação deste trabalho reside no fato de que os resultados de Pappus - Guldin são desconhecidos pela maioria dos docentes e discentes do ensino médio. Para divulgar tais resultados, propomos neste trabalho o uso de uma linguagem apropriada à realidade dos professores e alunos do ensino médio. E de um

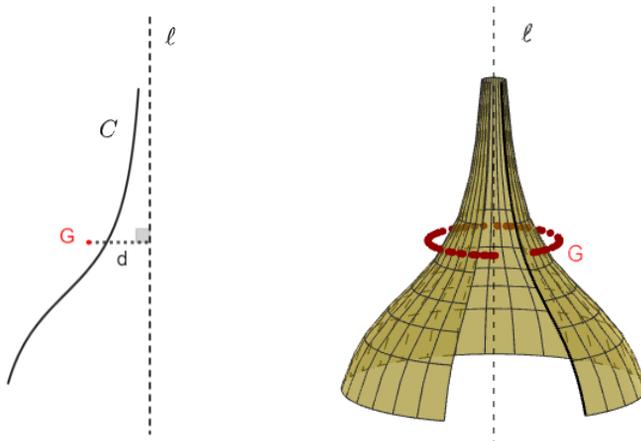


Figura 16: Superfície de Revolução.

ponto de vista mais objetivo, escolhemos alguns exemplos que possibilitem o entendimento destes resultados. Acreditamos que estas poucas aplicações do Teorema 1 tenham o efeito de colaborar com o amadurecimento deste assunto. Além disso, esperamos que os professores do ensino médio, em particular, aqueles que lecionam geometria espacial posicional e métrica, possam difundir entre seus alunos a possibilidade de adotar os Teoremas 1-2 na resolução de problemas relativos a sólidos e superfícies de revolução complementando, assim, as tradicionais estratégias de decomposição em sólidos de volumes conhecidos como comentado no Exemplo 1. Salientamos que este trabalho não pretende desconsiderar ou substituir o modelo tradicional, pelo contrário, acreditamos que os dois podem ser lecionados paralelamente, sempre que possível aos alunos, uma vez que ambos possuem sua relevância no processo de ensino aprendizagem. Deixamos de apresentar exemplos de aplicação do Teorema 2, mas o leitor interessado pode consultar [5] para mais detalhes e exemplos.

Agradecimentos

Agradecemos ao (à) parecerista pela leitura e por suas sugestões que contribuíram para a melhoria do artigo. Agradecemos ao Prof. Claudemir Aniz pelas conversas e por incentivar o processo de escrita desse artigo.

Referências

- [1] Centroid. In: Wikipedia, 2024. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Centroid>. Acesso em: 3 mai. 2024.
- [2] Goodman, A. W., and Goodman, G. *Generalizations of the Theorems of Pappus*. The American Mathematical Monthly, Vol. 76, n. 4, p 355-366 (1969).
- [3] Leahy, A. *James Gregory and the Pappus-Guldin theorem*. The American Mathematical Monthly. Convergence, DOI:10.4169/loci003262 (2010).
- [4] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. Morgado, A. C. A matemática do ensino médio. Vol 2. Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática - SBM. Rio de Janeiro (2006).

- [5] Matos, A. L. G. *Aplicações dos Teoremas de Pappus - Guldin no ensino médio: Corpos Redondos*. Dissertação Profmatt (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande (2018).
- [6] Rautenberg, R. R., Probst, R. W. *Os Teoremas de Pappus Para Os Sólidos de Revolução: A Demonstração de James Gregory*. HIPÁTIA, Vol.4, n.2, p. 262-281, IFSP (2019).
- [7] Reynolds, J. B. *New Formula for Volume*. The American Mathematical Monthly, Vol. 35, n. 4, p. 175-178 (1928).
- [8] Alves, S., Watanabe, R. *O Leitor Pergunta*. Revista do Professor de Matemática – RPM. Número 47, p. 28-32, São Paulo (1997).
- [9] Tengan, E., Sallum, E. M. *Seção Problema*. Revista do Professor de Matemática – RPM. Número 77, p. 51, São Paulo (1997).
- [10] Victor, C. A. S. *Área de um Polígono*. Revista do Professor de Matemática – RPM. Número 35, p. 28-32, São Paulo (1997).

Alex Ferreira Rossini
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS
<alex.rossini@ufms.br>

Andre Luiz Goulart Matos
Escola de Comando e Estado-Maior do Exército
<aluizgoulartmatos@yahoo.com.br>

Recebido: 10/01/2024
Publicado: 28/01/2025