PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.13, n.1, 2025
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2025/pmo1303

Progressão Aritmética: fatos interessantes e curiosidades inusitadas

Manoel Rodrigues de A. Neto   Talysson P. da Silva   Wállace M. de Sousa

Resumo

Este trabalho tem como objetivo calcular a soma dos termos de uma Progressão Aritmética (PA) por meio do cálculo da área de uma figura poligonal. Para isso, faremos uma associação entre uma PA positiva e uma figura poligonal, onde a medida da área dessa figura corresponderá à soma dos primeiros termos da referida PA. Além disso, exploramos duas curiosidades relacionadas às Progressões Aritméticas: a primeira aborda números primos dispostos em Progressão Aritmética, enquanto a segunda investiga pontos de uma parábola cujas ordenadas formam uma PA.

Palavras-chave: progressão aritmética; números poligonais; números primos; parábola.

Abstract

This work aims to calculate the sum of the terms of an Arithmetic Progression (AP) through the calculation of the area of a plane figure. To achieve this, we will associate a positive AP with a plane figure, where the measure of the area of this figure will correspond to the sum of the first terms of the given AP. In addition, we explore two curiosities related to Arithmetic Progressions: the first involves prime numbers arranged in Arithmetic Progression, while the second examines points on a parabola whose ordinates form an AP.

Keywords: arithmetic progression; polygonal numbers; prime numbers; parabola.

1. Introdução

Antes de tudo, os números fascinam e despertam a curiosidade de muitos matemáticos ao longo da história, seja por suas propriedades intrínsecas, seja por seus relacionamentos e aplicações com outros campos da matemática ou até mesmo de outras ciências. Atualmente, um dos maiores desafios no ensino da matemática é justamente despertar essa curiosidade e interesse nos estudantes, mostrando que a matemática vai muito além da mera memorização de fórmulas ou algoritmos.

Neste artigo, concentraremos nossa atenção no ensino e aprendizagem de uma parte do currículo matemático que tem se tornado cada vez mais desafiadora: as sequências, em especial as Progressões Aritméticas (PAs). Uma das razões para isso é a superficialidade com que esse tema vem sendo abordado nos livros didáticos, muitas vezes sem contextualização, o que impede uma construção clara e significativa desses conceitos. Para não nos afastarmos do objetivo desse artigo, omitiremos aqui outras razões, mas elas podem ser encontradas em detalhes em [6].

Além disso, os documentos oficiais da educação básica do nosso país, como os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), associam o ensino de sequências no ensino médio, em especial as Progressões Aritméticas, ao ensino das funções afim de domínios discretos. A partir disso, Oliveira em [12] afirma que o ensino médio é a etapa responsável por relacionar os conceitos de sequências com sua aplicabilidade, como, por exemplo, modelar problemas que envolvam juros simples por meio de sequências como as Progressões Artiméticas.

Nesse sentido, em busca de uma abordagem mais significativa do ensino desses conceitos, faremos uma associação entre as Progressões Aritméticas e a geometria das formas, utilizando como pano de fundo os números poligonais ou figurados como os números triangulares e quadrangulares. Além disso, faremos um estudo introdutório acerca de números primos que estão em Progressão Aritmética e sobre pontos numa cônica cujas ordenadas formam uma PA.

Organização do artigo. Na seção 2, faremos uma revisão sobre Progressões Aritméticas e números poligonais. Na seção 3, associaremos uma Progressão Aritmética positiva a uma figura poligonal e, utilizando essa associação, calcularemos a soma dos termos da PA através do cálculo da área da figura poligonal associada. Na última seção, discutiremos sobre Progressões Aritméticas que contêm infinitos números primos e sobre pontos da parábola $y = x^2$ cujas ordenadas formam uma PA.

O conjunto dos números naturais é $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ e usaremos os símbolos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$ para o conjunto dos números inteiros e reais respectivamente (veja [8]).

2. Progressões Aritméticas e Números Poligonais

Nesta seção, faremos uma revisão sobre as Progressões Aritméticas e os números poligonais. Por fim, apresentaremos uma relação entre esses dois tópicos.

2.1. Progressões Aritméticas

Uma *Progressão Aritmética* é uma função $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ onde $a_n := a(n)$ e os termos a_n são tais que cada termo, a partir do segundo, corresponde à soma do termo anterior com uma constante real, chamada de *razão* da PA, indicada pela letra $r \in \mathbb{R}$. Também consideramos uma PA apenas como sendo o conjunto imagem de uma função com essas propriedades, que será denotado por (a_n). O termo a_n é chamado de n-ésimo termo desta PA.

Para uma melhor compreensão, vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1. O conjunto $(a_n) = \{3, 5, 7, 9, \ldots\}$ é uma PA, cujo primeiro termo $a_1 = 3$ e razão $r = 2$.

Exemplo 2. A PA (a_n) cujo primeiro termo é 22 e que cada termo, a partir do segundo, é o anterior somado com -5, é dada por $(a_n) = \{22, 17, 12, 7, \ldots\}$.

Exemplo 3. O conjunto a seguir $(a_n) = \{2\}$ é uma PA, cujos termos são $a_n = 2$ para qualquer número natural n e a razão é $r = 0$.

As Progressões Aritméticas são classificadas quanto ao sinal de sua razão. A PA do primeiro exemplo é classificada como *crescente*, pois $r = 2 > 0$; a PA do segundo exemplo é classificada como *decrescente*, pois $r = -5 < 0$ e, por fim, a PA do último exemplo é classificada como *constante*, pois $r = 0$.

Naturalmente, o padrão das Progressões Aritméticas nos permite fazer alguns questionamentos: Dada uma PA, como calcular um termo qualquer a_n sem precisar conhecer todos os termos anteriores? Outro questionamento seria: é possível calcular a soma dos m primeiros termos de uma PA sem necessariamente conhecê-los?

A resposta da primeira pergunta, de acordo com [11], surge naturalmente da definição de PA e, através de algumas manipulações algébricas, percebemos uma lei de formação ou recorrência entre os termos desta PA.

Para melhor entendimento do leitor, considere uma PA dada por $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$. Assim:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r = a_1 + 2 \cdot r \\ a_4 &= a_3 + r = a_1 + 3 \cdot r \\ &\vdots \end{aligned}$$

Generalizando esse raciocínio, o n-ésimo termo da PA é dado por:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \tag{1}$$

Essa expressão é chamada de *fórmula do termo geral* da PA e, a partir dela, podemos encontrar o termo que desejamos.

A resposta do segundo questionamento, foi dada pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), considerado o mais brilhante matemático de sua época. Segundo relatos históricos em [3], quando Gauss cursava a 3ª série primária, com apenas 10 anos de idade teve sua genialidade testada, quando seu professor, Buttner, pediu para os alunos da sua turma que somassem todos os números inteiros de 1 até 100. Gauss imediatamente apresentou sua solução e Buttner, impressionado com a velocidade com que Gauss respondeu ao desafio, solicitou que explicasse sua solução.

Ao somar os extremos 1 com 100 , em seguida os termos equidistantes dos extremos 2 com 99, 3 com 98, e assim por diante, o resultado sempre será 101. Como temos 50 pares com esse resultado, basta multiplicar mentalmente 101 por 50 e encontraremos 5050 como resposta desse desafio.

Agora, estendendo o raciocínio de Gauss para qualquer PA. Indicando por S_n a soma dos n primeiros termos da PA cujos termos são $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$, temos que

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \tag{2}$$

e

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 \tag{3}$$

Somando as duas equações (2) e (3) e notando que existem n parcelas desse somatório (no segundo membro) satisfazendo $a_i + a_{n-i+1} = a_1 + a_n$, obtemos que:

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) \\ &= (a_1 + a_n) \cdot n, \end{aligned}$$

ou seja,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}. \tag{4}$$

Do ponto de vista prático, essa fórmula é essencial, pois permite calcular a soma dos n primeiros termos de uma PA, conhecendo apenas o primeiro e o n-ésimo termo.

Exemplo 4. A soma dos sete primeiros termos da PA definida por $\{3, 6, 9, 12, \cdots\}$ é

$$\begin{aligned} S_7 &= \frac{(3+21)\cdot 7}{2} \\ &= 84 \end{aligned}$$

visto que $a_7 = 21$.

2.2. Números Poligonais Triangulares e Quadrangulares

Os *números poligonais*, ou figurados, segundo [14], são números que podem ser modelados por meio de arranjos de pontos representando figuras geométricas regulares. Esses números podem ser classificados como números lineares, planos e sólidos. O primeiro possui uma dimensão, o segundo duas dimensões e o terceiro três dimensões. Nesse artigo, focaremos a atenção apenas para os números poligonais planos, em especial os triangulares e quadrangulares.

Os números poligonais *triangulares*, denotados por T_n para cada $n \in \mathbb{N}$, podem ser obtidos por meio da soma dos números naturais consecutivos, ou seja,

$$\begin{aligned} T_1 &= 1 \\ T_2 &= 1+2=3 \\ T_3 &= 1+2+3=6 \\ T_4 &= 1+2+3+4=10 \\ T_5 &= 1+2+3+4+5=15 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Os números triangulares podem ser arranjados geometricamente por meio de pontos, como mostra a figura:

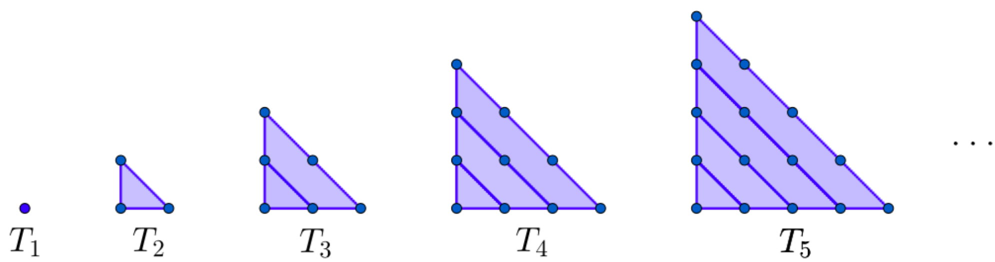

Figura 1 – Representação geométrica dos números triangulares.
Fonte: Autores.

Exemplo 5. Sejam T_n, com $n \in \mathbb{N}$, os números poligonais triangulares. Verifique que:

(a) $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$;

(b) $\sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(n+2)$.

Solução: Mostraremos apenas o item (b). Considere a seguinte sentença aberta:

$$P(n) : \sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(n+2), \text{ com } n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Vamos mostrar, por indução em n, que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Passo 1: $P(1)$ é verdadeira. De fato, basta observar que ambos os membros da Equação (5) vale 1, quando $n = 1$.

Passo 2: Suponhamos que $P(n)$ é verdadeira, ou seja, $\sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(n+2)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} T_i &= T_{n+1} + \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(n+2) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(n+2) \\
&= \frac{3(n+1)(n+2)}{6} + \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(n+2) \\
&= \frac{1}{6} \cdot (n+1)(n+2)(n+3),
\end{aligned}$$

como gostaríamos. Por indução, concluímos que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ◊

Os números poligonais *quadrangulares*, denotados por Q_n para cada $n \in \mathbb{N}$, são obtidos através da soma dos n primeiros números ímpares consecutivos:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= 1 \\
Q_2 &= 1 + 3 = 4 \\
Q_3 &= 1 + 3 + 5 = 9 \\
Q_4 &= 1 + 3 + 5 + 7 = 16 \\
Q_5 &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

ou, a partir do segundo número quadrangular, da soma de dois números triangulares consecutivos

$$\begin{aligned}
Q_2 &= T_1 + T_2 \\
Q_3 &= T_2 + T_3 \\
Q_4 &= T_3 + T_4 \\
Q_5 &= T_4 + T_5 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

ou ainda por meio da relação $Q_n = n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$\begin{aligned} Q_1 &= 1 \cdot 1 \\ Q_2 &= 2 \cdot 2 \\ Q_3 &= 3 \cdot 3 \\ Q_4 &= 4 \cdot 4 \\ Q_5 &= 5 \cdot 5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Assim como os números triangulares, podemos também modelar os números quadrangulares por meio do seguinte arranjo de pontos:

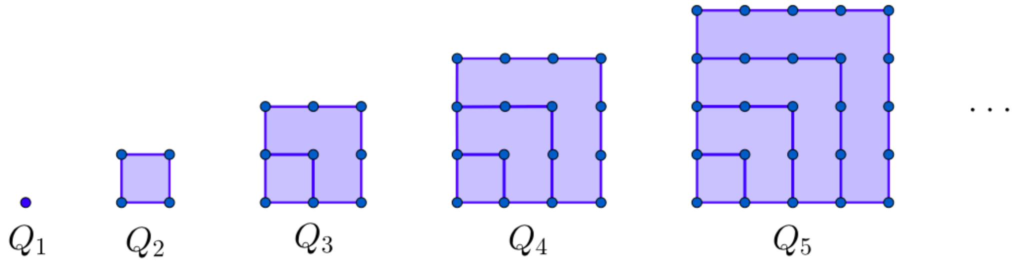

Figura 2 – Representação geométrica dos números quadrangulares.
Fonte: Autores.

Exemplo 6. Sejam Q_n, com $n \in \mathbb{N}$, os números poligonais quadrangulares. Prove que

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1).$$

Solução: Considere a seguinte sentença aberta:

$$P(n) : \sum_{i=1}^{n} Q_i = \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1), \text{ com } n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Vamos mostrar, por indução em n, que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Passo 1: $P(1)$ é verdadeira. De fato, basta observar que ambos os membros da Equação (6) vale 1, quando $n = 1$.

Passo 2: Suponhamos que $P(n)$ é verdadeira, ou seja, $\sum_{i=1}^{n} Q_i = \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} Q_i &= Q_{n+1} + \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1) \\
&= (n+1)^2 + \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1) \\
&= \frac{6(n+1)^2}{6} + \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1) \\
&= \frac{1}{6} \cdot (n+1)[2n^2 + 7n + 6] \\
&= \frac{1}{6} \cdot (n+1)(n+2)(2n+3),
\end{aligned}$$

como gostaríamos. Por indução, concluímos que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Podemos observar nas figuras anteriores uma relação notável que salta aos nossos olhos: esses números poligonais se comportam como soma dos termos de uma Progressão Aritmética. Isto é, $T_n = a_1 + \cdots + a_n$, onde (a_n) é a PA definida por $a_n = 1 + (n-1) \cdot 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, enquanto que $Q_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, onde (b_n) é a PA definida por $b_n = 1 + (n-1) \cdot 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ◊

O Exemplo 6 é um caso particular do seguinte resultado.

Proposição 1. *Seja* (a_n) *uma Progressão Aritmética, dada por* $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$. *Então*

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i)^2 = a_1^2 \cdot n + n(n-1) \cdot r \cdot a_1 + \frac{n(2n-1)(n-1)r^2}{6}.$$

Demonstração. Considere a seguinte sentença aberta:

$$P(n) : \sum_{i=1}^{n} (a_i)^2 = a_1^2 \cdot n + n(n-1) \cdot r \cdot a_1 + \frac{n(2n-1)(n-1)r^2}{6}, \text{ com } n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Vamos mostrar, por indução em n, que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Passo 1: $P(1)$ é verdadeira. De fato, basta observar que ambos os membros da Equação (7) vale a_1^2, quando $n = 1$.

Passo 2: Suponhamos que $P(n)$ é verdadeira, ou seja, $\sum_{i=1}^{n} (a_i)^2 = a_1^2 n + n(n-1) r a_1 + \frac{n(2n-1)(n-1)r^2}{6}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} (a_i)^2 &= a_{n+1}^2 + \sum_{i=1}^{n} (a_i)^2 \\
&= (a_1^2 + 2nra_1 + n^2r^2) + a_1^2 n + n(n-1)ra_1 + \frac{n(2n-1)(n-1)r^2}{6} \\
&= a_1^2(n+1) + (n+1)nra_1 + \frac{(2n^2+3n+1)nr^2}{6} \\
&= a_1^2(n+1) + (n+1)nra_1 + \frac{(n+1)\big(2(n+1)-1\big)nr^2}{6},
\end{aligned}$$

como gostaríamos. Por indução, concluímos que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Assim como os números poligonais, nosso objetivo é modelar uma PA através da associação desta com uma figura poligonal com o objetivo de que a medida da área dessa figura seja exatamente igual ao valor da soma dos termos daquela PA.

Na próxima seção, veremos através de exemplos e de maneira genérica como faremos essa associação e, ao fim, provaremos a igualdade entre a soma dos primeiros termos de uma PA e o valor da área da figura poligonal associada.

3. Calculando a soma dos termos de uma PA de uma forma diferente

A contextualização matemática vai além da sistematização do exercício matemático, pois mostra o conhecimento de forma concreta e traz significado para aquilo que está sendo estudado pelo aluno. Como alternativa para o ensino de Progressões Aritméticas, uma proposta de apresentação do conteúdo é associar o cálculo da soma dos termos de uma PA por meio da área de figuras poligonais, trazendo o assunto dentro de um contexto que faça sentido para o estudante.

Nesta seção, faremos alguns exemplos de como calcular a soma dos termos de uma PA via fórmulas do cálculo de áreas de figuras poligonais. Para esse fim, primeiro associaremos uma PA cujos termos tem um mesmo sinal positivo a uma figura poligonal. As figuras a seguir foram feitas usando o applet [13].

Seja (a_n) uma PA. Dizemos que (a_n) é *positiva* se $a_n \geq 0$ para todo inteiro positivo n e existe pelo menos um inteiro positivo n_0, tal que $a_{n_0} \neq 0$.

Associação 1. Para cada par ordenado $\big((a_n), m\big)$, sendo (a_n) uma PA positiva e $m \geq 2$ um número natural, associaremos uma figura poligonal $F = F(a_n, m)$ cujos vértices (marcados no plano cartesiano) são dados por: $O = (0, 0)$, $A_1 = (0, a_1)$, $A_m = (m, a_m)$ e $H_m = (m, 0)$.

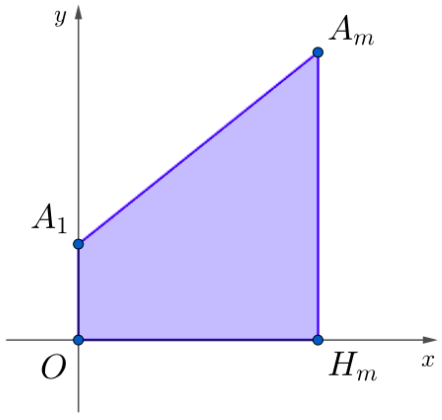

Figura 3 – Figura associada a uma PA.
Fonte: Autores.

As possíveis figuras poligonais associadas a uma PA positiva, como veremos a seguir, são: retângulo, triângulo retângulo ou trapézio retângulo.

Definição 1. Seja $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$ uma PA positiva. Dizemos que (a_n) é uma PA *retangular* se $r = 0$.

Exemplo 7. Considere $a_n = 4$, para todo $n \geq 1$. Assim, a figura associada a (a_n) é um retângulo. De fato, notemos que para qualquer $m \geq 2$, a figura poligonal associada a esta PA é um retângulo.

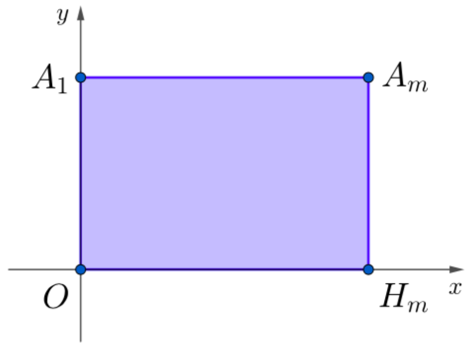

Figura 4 – Representação gráfica de uma PA retangular.
Fonte: Autores.

Além disso, notemos que o valor da soma dos m primeiros termos desta PA é $(\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_1) \cdot \mathrm{m}/2 = \mathrm{a}_1 \cdot \mathrm{m} = 4\mathrm{m}$, o qual é o mesmo valor da área da sua figura associada, pois o segmento OA_1 mede 4 e o segmento OH_m mede m.

Definição 2. Seja $\mathrm{a}_\mathrm{n} = \mathrm{a}_1 + (\mathrm{n} - 1) \cdot \mathrm{r}$ uma PA positiva. Dizemos que (a_n) é *triangular* se $\mathrm{a}_1 = 0$.

Exemplo 8. Considere $\mathrm{a}_\mathrm{n} = (\mathrm{n} - 1) \cdot 2$, para todo $\mathrm{n} \geq 1$. Assim, a figura poligonal associada a (a_n) é um triângulo. De fato, notemos que para qualquer $\mathrm{m} \geq 2$, a figura poligonal associada a esta PA é:

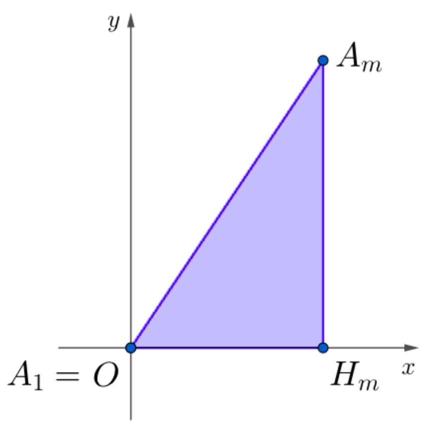

Figura 5 – Representação gráfica de uma PA triangular.
Fonte: Autores.

Mais ainda, o valor da soma dos m primeiros termos desta PA também é igual ao valor da área de sua figura associada, a saber $(\mathrm{m} - 1) \cdot \mathrm{m}$.

Definição 3. Seja $\mathrm{a}_\mathrm{n} = \mathrm{a}_1 + (\mathrm{n} - 1) \cdot \mathrm{r}$ uma PA positiva. Dizemos que (a_n) é *trapezoidal* se $\mathrm{a}_1 \cdot \mathrm{r} \neq 0$.

Exemplo 9. Considere $\mathrm{a}_\mathrm{n} = 2 + (\mathrm{n} - 1) \cdot 2$. Assim, a figura poligonal associada a (a_n) é um trapézio. De fato, notemos que para qualquer $\mathrm{m} \geq 2$, a figura poligonal associada a esta PA é:

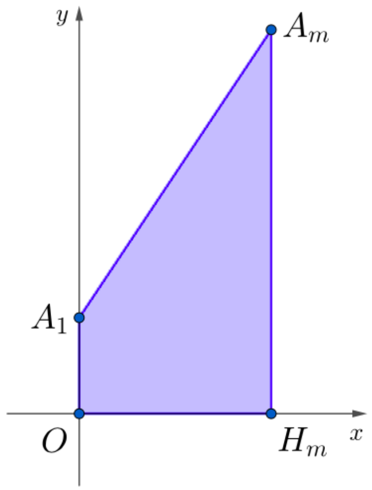

Figura 6 – Representação gráfica de uma PA trapezoidal.
Fonte: Autores.

Como antes, o valor da soma dos m termos desta PA coincide com o valor da área de sua figura poligonal associada, a saber $(\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_\mathrm{m}) \cdot \mathrm{m}/2$.

Se observarmos direito, isto vale em geral, ou seja, o valor da soma dos m primeiros termos de uma PA positiva coincide com o valor da área da figura associada como podemos constatar no seguinte resultado.

Teorema 2. *A soma dos* m *primeiros termos de* (a_n) *uma PA positiva é igual ao valor da área de sua figura poligonal associada (veja Associação 1).*

Demonstração. Seja $\mathrm{a}_\mathrm{n} = \mathrm{a}_1 + (\mathrm{n} - 1) \cdot \mathrm{r}$ uma PA positiva. Primeiramente lembremos que o valor da soma dos $\mathrm{m} \geq 2$ termos de uma PA é

$$\mathrm{S}_\mathrm{m} = \frac{(\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_\mathrm{m}) \cdot \mathrm{m}}{2}.$$

Por outro lado, existem apenas três possibilidades para uma PA positiva: retangular, triangular e trapezoidal.

(i) se (a_n) for retangular, então $\mathrm{r} = 0$. Portanto, $\mathrm{a}_1 = \mathrm{a}_\mathrm{m}$ e o valor da área da figura poligonal associada é $\mathrm{a}_1 \cdot \mathrm{m}$;

(ii) se (a_n) for triangular, então $\mathrm{a}_1 = 0$. Portanto, o valor da área da figura associada é $\mathrm{m} \cdot \mathrm{a}_\mathrm{m}/2$;

(iii) se (a_n) for trapezoidal, então $\mathrm{a}_1 \cdot \mathrm{r} \neq 0$. Portanto, o valor da área da figura associada é $(\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_\mathrm{m}) \cdot \mathrm{m}/2$.

De qualquer forma, temos que o valor da soma dos m primeiros termos de uma PA positiva é igual ao valor da área da figura poligonal associda. □

Observação 1. 1. Notemos que de maneira análoga, podemos associar a cada uma dessa figuras poligonais (trapézio retangular, triângulo retangular ou retângulo) uma PA positiva;

2. A soma dos m primeiros termos de (a_n) uma PA positiva pode também ser obtida em função de a_1, r e m. A saber,

$$S_m = m\left(a_1 + \frac{(m-1)r}{2}\right)$$

e, desta forma, podemos entender m como a medida da base de um retângulo de lado a_1 e, também, de um triângulo retângulo com altura $(m-1)r$.

3. Podemos também associar (a_n) uma PA negativa (ou seja, $a_n \leq 0$ para todo inteiro $n \geq 1$ e $a_{n_0} \neq 0$ para algum inteiro positivo n_0) a uma figura poligonal. Neste caso, para cada $m \geq 2$, a figura associada tem os seguintes vértices: $O = (0,0), A_1 = (0,-a_1), A_m = (m,-a_m)$ e $H_m = (m,0)$. Desta forma, o valor da área desta figura será igual a menos o valor da soma dos m primeiros termos de (a_n). As figuras poligonais associadas são: retângulo, triângulo retângulo ou trapézio retângulo. Deixamos a cargo do leitor a elaboração de alguns exemplos desses casos.

4. Curiosidades sobre Progressões Aritméticas

Neste seção, veremos algumas curiosidades inusitadas acerca das Progressões Aritméticas. Uma delas é sobre a existência de infinitos números primos sobre uma PA. A outra, trata de pontos que pertencem a parábola $y = x^2$, cujas coordenadas são números inteiros e com ordenadas formando uma PA.

4.1. Números primos e PA

Um problema interessante sobre sequências de números inteiros é saber quando estas contêm uma quantidade infinita de números primos. No nosso caso, gostaríamos de saber se existem Progressões Aritméticas com infinitos números primos. Diremos que $p \in \mathbb{N}$ é um número *primo* se $p > 1$ e seus únicos divisores positivos são 1 e p. Para mais informações sobre números primos, veja [8].

Exemplo 10. A Progressão Aritmética $a_n = 5 + (n-1) \cdot 6$ contém infinitos números primos.

Solução: Primeiramente, notemos que todo número primo maior do que 3 é da forma $1 + 6m$ ou $5 + 6m$. De fato, se $p = 5$, então não temos o que fazer. Agora, suponhamos que $p > 5$. Pelo algorítmo da divisão de Euclides, temos que existem $n, r \in \mathbb{Z}$ tais que

$$p = (n-1) \cdot 6 + r, \text{ com } n > 0 \text{ e } 0 \leq r < 6.$$

Como p é um número primo, segue que $r \in \{1, 5\}$. Além disso, notemos que o conjunto

$$\Lambda := \{1 + 6m;\ m \in \mathbb{N}\}$$

é fechado multiplicativamente.

Suponhamos agora, por absurdo, que haja apenas uma quantidade finita de números primos da forma $5+6m$, a saber,

$$5 < p_1 < \cdots < p_k.$$

Assim, o número $(m := p_1 \cdots p_k + 1)$

$$a_m = 5 + 6 \cdot (p_1 \cdots p_k)$$

não é divisível por nenhum dos números primos $5, p_1, ..., p_k$ e, consequentemente, sua decomposição em fatores primos só pode conter primos da forma $1 + 6m$. Assim, a_m é da forma $1 + 6m$, o que é uma contradição, visto que a_m é da forma $5 + 6m$. $\lozenge$

Mais geralmente, vale o seguinte resultado.

Teorema 3 (Teorema de Dirichlet). *Em uma PA de números naturais, com o primeiro termo e a razão primos entre si, existem infinitos números primos.*

A demonstração do Teorema 3 pode ser encontrada em [10].

Definição 4. Sejam $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$. Dizemos que $\{a_1, ..., a_n\}$ é uma *Progressão Aritmética de* n *termos* se existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $a_{i+1} - a_i = r$, para todo $i = 1, ..., n-1$. Neste caso, o *comprimento* de $\{a_1, ..., a_n\}$ é n e a *razão* é r.

A seguir, veremos algumas Progressões Aritméticas de comprimento finito formadas apenas por números primos.

Quadro 1 – Primos em Progressão Aritmética.

Comprimento	PA	Razão	Descobridor
5	$\{5, 11, 17, 23, 29\}$	6	
6	$\{7, 37, 67, 97, 127, 157\}$	30	G. Lemaire
7	$\{7, 157, 307, 457, 607, 757, 907\}$	150	G. Lemaire
10	$\{199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089\}$	210	E. B. Escott
12	$\{110437, 124297, 138157, 152017, 165877, 179737, 193597, 207457, 221317, 235177, 249037, 262897\}$	13860	E. Karst

Fonte: ANDERSEN, 2020.

De fato, segue o seguinte resultado.

Teorema 4 (Green-Tao, [9]). *Os números primos contêm infinitas Progressões Aritméticas de comprimento* k *para todo* k *natural.*

4.2. Pontos sobre a parábola que formam uma PA

Sejam $(b_1, a_1), ..., (b_n, a_n) \in \mathbb{Z}^2$. Diremos que $(b_1, a_1), ..., (b_n, a_n)$ formam uma *PA sobre a parábola* $y = x^2$, se $a_i = b_i^2$ para todo $i = 1, ..., n$ e $a_1, ..., a_n$ formam uma PA. Para mais informações sobre Progressões Aritméticas em outras cônicas, veja [2].

Notemos que $\{1, 25, 49\}$ é uma Progressão Aritmética de 3 termos satisfazendo o fato de que todo $a_i \in \{1, 25, 49\}$ é um quadrado perfeito. Desta forma, temos que $(1, 1), (5, 25), (7, 49)$ formam uma PA sobre a parábola $y = x^2$.

Observação 2. Fermat propôs, em uma carta para Frénicle em 1640, que não existem quatro números inteiros distintos que sejam quadrados perfeitos e formem uma Progressão Aritmética. Posteriormente, essa conjectura foi provada por Euler e outros matemáticos. Para mais informações, consulte ([7], Vol. II, Ch. XIV). Uma demonstração desse resultado utilizando curvas elípticas pode ser encontrada em [2].

Proposição 2. *Existem infinitas Progressões Aritméticas de* 3 *termos cujos elementos são quadrados perfeitos. Ou seja, existem infinitas Progressões Aritméticas de* 3 *termos sobre a parábola.*

Demonstração. Basta notar que, para cada $t \in \mathbb{Z}$, os pontos $\left(t^2 - 2t - 1, (t^2 - 2t - 1)^2\right)$, $\left(t^2 + 1, (t^2 + 1)^2\right)$ e $\left(t^2 + 2t - 1, (t^2 + 2t - 1)^2\right)$ são pontos da parábola $y = x^2$ e que $\{(t^2 - 2t - 1)^2, (t^2 + 1)^2, (t^2 + 2t - 1)^2\}$ é uma Progressão Aritmética de 3 termos com razão $r = 4t^3 - 4t$. $\square$

A seguir, exibimos alguns pontos em Progressão Aritmética sobre a parábola.

Quadro 2 – Pontos em PA sobre a parábola.

t	Pontos	Razão
–5	$\{(34, 1156), (26, 676), (14, 196)\}$	–480
–4	$\{(23, 529), (17, 289), (7, 49)\}$	–240
–3	$\{(14, 196), (10, 100), (2, 4)\}$	–96
–2	$\{(7, 49), (5, 25), (-1, 1)\}$	–24
–1	$\{(2, 4), (2, 4), (-2, 4)\}$	0
0	$\{(-1, 1), (1, 1), (-1, 1)\}$	0
1	$\{(-2, 4), (2, 4), (2, 4)\}$	0
2	$\{(1, 1), (5, 25), (7, 49)\}$	24
3	$\{(2, 4), (10, 100), (14, 196)\}$	96
4	$\{(7, 49), (17, 289), (23, 529)\}$	240
5	$\{(14, 196), (26, 676), (34, 1156)\}$	480

Fonte: Autores.

Notemos que alguns pontos que formam Progressões Aritméticas sobre a parábola têm ordenadas formando uma PA constante.

5. Considerações finais

À medida que exploramos a interseção entre números poligonais, Progressões Aritméticas e figuras poligonais, mergulhamos em um mundo matemático rico em beleza e significado. Neste artigo, nossa jornada nos levou a observar conexões que unem a aritmética à geometria, revelando padrões e relações. Ao associar as progressões aritméticas às figuras poligonais, propusemos uma abordagem lúdica e contextualizada para o ensino dessas sequências, facilitando a compreensão dos conceitos e promovendo um aprendizado mais significativo e envolvente. Além disso, apresentamos e discutimos alguns resultados importantes que relacionam Progressões Aritméticas com números primos e parábolas.

Por fim, agradecemos ao parecerista pelas valiosas sugestões e comentários, que contribuíram para o aprimoramento deste trabalho.

Referências

[1] ANDERSEN, J. K.; **Primes in Arithmetic Progression Records**, última atualização em 29 de fevereiro de 2020. Disponível em http://primerecords.dk/aprecords.htm. Acesso em: 17 de dez. de 2024.

[2] ALVARADO, A.; GOINS, E. H. **Arithmetic Progressions on Conic Sections**, International Journal of Number Theory Vol. 09, No. 06, pp. 1379-1393, 2013.

[3] BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. **Matemática, volume 1: versão alfa**. 8. ed. São Paulo: Moderna, 1995.

[4] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base. Acesso em: 27 nov. 2023.

[5] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC, 2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf. Acesso em: 11 dez. 2023.

[6] COSTA, J. M. R.; **Ensino de sequências e séries no ensino médio**. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual do Norte Fluminense, UENF, Campos do Goytacazes - RJ, 2013. Disponível em: https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/08/23082013Julia-Marom-Ramos-da-Costa.pdf. Acesso em: 11 jan. 2024.

[7] DICSON, L. E.; **History of the Theory of Numbers**, Chelsea, New York, 1971.

[8] HEFEZ, A.; **Aritmética**. 3. ed. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

[9] GREEN, B.; TAO, T.; **The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions**, Annals of Mathematics, 167, 481-547, 2004.

[10] MARTINEZ, F. E. B.; MOREIRA, C. G. T.; SALDANHA, N. C.; TENGAN, E.; **Teoria dos Números - Um passeio com Primos e Outros Números Familiares pelo Mundo Inteiro**, Coleção Projeto Euclides, Impa, Segunda edição, 2011.

[11] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P.; **Matemática discreta**. 1. ed. Rio de Janeiro, RJ : Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[12] OLIVEIRA, W. A.; **Ensino de sequências: dos parâmetros curriculares nacionais à base nacional comum curricular**, XXIII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo, pp. 1-10, 2019.

[13] SOUSA, W. M. de; 2024. Disponível em: https://www.geogebra.org/calculator/jfbgem4m.

[14] SILVA, R. J.; **Números figurados e poligonais**. Edição digital, São Paulo, 2020. Disponível em: http://www.osfantasticosnumerosprimos.com.br/011-estudos-248-numeros-figurados-e-numeros-poligonais.html. Acesso em: 14 dez. 2023.

Manoel Rodrigues de A. Neto
Secretaria de Educação da Paraíba
<manoel_rodriguez@hotmail.com>

Talysson P. da Silva
Secretaria de Educação e Esportes de Pernambuco
<talysilva314159265@gmail.com>

Wállace M. de Sousa
Universidade Federal da Paraíba
<wallace.mangueira@academico.ufpb.br>

Recebido: 15/07/2024
Publicado: 28/01/2025