PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.13, n.1, 2025
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2025/pmo1305

Laplace sem equiprobabilidade é um erro

André Gustavo Campos Pereira   Gabriel Garcia Costa   Viviane Simioli M. Campos

Resumo

Laplace sem equiprobabilidade é um exemplo do que não se deve fazer em Matemática: usar uma definição onde ela não se aplica. Pereira et al [5] fizeram um estudo minucioso e comprovaram que a definição de probabilidade mais utilizada nos livros adotados, não apenas nos Ensinos Fundamental e Médio, mas também nas dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), é a definição clássica apresentada por Laplace (1749-1827). No entanto, o trabalho chama atenção de que, em inúmeras dessas bibliografias estudadas, a hipótese fundamental de equiprobabilidade para a aplicação da definição clássica nem ao menos é mencionada. O objetivo desse artigo é mostrar os erros cometidos ao usar a definição de probabilidade de Laplace quando não se tem equiprobabilidade.

Palavras-chave: Probabilidade; Equiprobabilidade; Laplace; Kolmogorov.

Abstract

Laplace without equiprobability is an example of what should not be done in Mathematics: using a definition where it does not aplly. Pereira et al [5] carried out a thorough study and proved that the definition of probability most used in the books adopted, not only in Elementary and Secondary Education, but also in dissertations of the Professional Master's Degree in Mathematics (PROFMAT), is the classic definition presented by Laplace (1749-1827). However, the work draws attention to the fact that, in many of the bibliographies studie, the fundamental hypothesis of equiprobability for the appliction of the classical definition is not even mentioned. Therefore, the objective of this article is to show the errors made when using Laplace's definiton of probability where there is no equiprobability.

Keywords: Probability; Equiprobability; Laplace; Kolmogorov.

1. Introdução

Na natureza, existem dois tipos de fenômenos, os **determinísticos** e os **aleatórios** ou **estocásticos**. Os determinísticos são aqueles que, quando repetidos sob as mesmas condições, geram sempre os mesmos resultados; os aleatórios são aqueles que, mesmo repetidos sob as mesmas condições, não necessariamente geram os mesmos resultados.

Um exemplo de um fenômeno determinístico é o fato de água e óleo não se misturarem. Ao misturarmos água e óleo, depois de um certo tempo, o óleo sempre ficará em cima e a água embaixo. Um exemplo de um fenômeno aleatório é retirar sementes da mesma fruta, plantá-las em um solo com características homogêneas e, depois de um mês, observar as mudas, que terão formas e tamanhos diferentes.

Henri Poincaré, no seu livro Ciência e Método de 1914, explicou os fenômenos aleatórios usando a palavra chance. Assim ele disse:

> *Para começar o que é chance? Os antigos distinguiam entre o fenômeno que parece obedecer leis harmoniosas, já estabelecidas, e aqueles que eles atribuem a chance, que são aqueles que não podem ser previstos por não estarem sujeitos a qualquer lei.* (Gould, 2001, p.401)

Quando falamos em fenômenos que obedecem leis, os alunos automaticamente pensam nos fenômenos físicos, como por exemplo, o movimento retilíneo constante, o movimento retilíneo uniformemente variado e a queda livre. Einstein defendeu tanto o fator determinístico da Física que cunhou a famosa frase: Insanidade é continuar fazendo sempre a mesma coisa e esperar resultados diferentes. Em outra feita, ao responder uma carta ao físico alemão Max Born, o qual falava que os choques das partículas, quando do início da teoria quântica, parecia que se davam de forma aleatória ou incerta, Einstein respondeu: ”A teoria produz um bom resultado, mas dificilmente nos aproxima do segredo do Criador. Estou, em todos os casos, convencido de que Ele não joga dados”. Por essas considerações, vê-se claramente que, naquela época, Einstein não acreditava que os fenômenos físicos pudessem ser aleatórios. Posteriormente, em sua vida, ele se convenceu que eventos aleatórios de fato existem ([3]).

A probabilidade é a área da Matemática que estuda os fenômenos aleatórios. E como estudar fenômenos que mesmo repetidos sob as mesmas condições fornecem resultados diferentes? Para compreendê-los, não é preciso saber de antemão o resultado que vai aparecer, mas sim quais resultados podem acontecer. A esse conjunto que contém todos os possíveis resultados é dado o nome de **espaço amostral**. No exemplo das sementes retiradas da mesma fruta, o espaço amostral são todas as mudas depois de um mês do plantio.

Entretanto, o objetivo de um estudo pode estar associado à ocorrência ou não de alguns resultados particulares dentre todos os possíveis resultados, ou seja, o interesse pode estar em subconjuntos do espaço amostral. Considerando, ainda, o exemplo das sementes, depois de um mês o interesse pode estar, por exemplo, apenas nas mudas que atingiram a altura de, pelo menos, $10\ \mathrm{cm}$. Aos subconjuntos do espaço amostral é dado o nome de **eventos**.

Por fim, é preciso medir a chance de ocorrência de tais eventos. Pereira et al [5], além de descrever as formas mais usadas de se definir uma função que faça essa medição, a chamada **função de probabilidade**, realizaram um estudo minucioso de como o tema é abordado tanto nos livros atualmente adotados nos Ensinos Fundamental e Médio, quanto nas dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Dentre as definições de medida de probabilidade, as mais conhecidas são: a frequentista, a clássica e a axiomática. Das três, a mais utilizada nos Ensinos Fundamental e Médio, segundo Pereira et al [5] é a definição clássica, atribuída a Laplace, que tem por hipótese a **equiprobabilidade**, ou seja, supõe que todos os elementos do espaço amostral têm a mesma chance de ocorrer. No entanto, o trabalho chama atenção para o fato de que, em inúmeras das bibliografias estudadas, tal hipótese nem ao menos é mencionada.

O objetivo principal desse artigo é mostrar que se cometem erros ao usar a definição de probabilidade de Laplace quando não se tem equiprobabilidade. Nesse contexto, será discutida a solução para o seguinte problema prático: uma distribuidora de remédios que atende a três cidades, deseja saber qual é o melhor local para construir seu depósito, de modo a minimizar seus gastos com deslocamento. Para tanto, nas seções iniciais, será feita uma abordagem teórica cuidadosa de todos os conceitos matemáticos necessários.

2. Definições de Probabilidade

2.1. Definição frequentista

Definição 1. A probabilidade de um evento A na ótica frequentista é definida como a frequência relativa desse evento quando o número de experimentos cresce indefinidamente, ou seja,

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{\mathrm{n}(\mathrm{A})}{\mathrm{n}},$$

onde $\mathrm{n}(\mathrm{A})$ é quantas vezes o evento A aconteceu nas n repetições realizadas.

Salsa e Moreira [7] creditam a Von Misses essa definição e, segundo Bernstein [1], ela está bem estabelecida devido à lei dos grande números de Jacob Bernoulli. Bernstein afirma que para chegar à esse resultado, Bernoulli imaginou um jarro repleto com 3.000 bolas brancas e 2.000 bolas pretas, de onde ele retirou um número crescente dessas bolas, anotando com cuidado a cor de cada uma antes de devolvê-las ao recipiente. A retirada de um número crescente de bolas do jarro possibilitou uma aproximação cada vez melhor da proporção entre brancas e pretas. Assim, ele chegou à conclusão de que seriam necessárias 25.550 repetições para se obter a proporção 3:2 com um erro de 2% no resultado.

A necessidade de muitas realizações tornava a definição frequentista restritiva, mas o advento dos computadores permitiu obter respostas bem próximas do resultado limite, conforme ilustrado nos exemplos a seguir:

Exemplo 1. Dada uma urna com 10 bolas enumeradas de 1 a 10, para encontrar a probabilidade de o evento $\mathrm{A} = \{1, 2\}$ ocorrer, o experimento de Bernoulli foi simulado, anotando com o número 1 se a bola retirada for a 1 ou a 2, e o número 0 se não o for. No gráfico abaixo (Figura 1), foram feitas 50.000 realizações desse experimento e constatou-se que a proporção entre o número de bolas removidas que estão no conjunto A e o número de retiradas realizadas até aquele momento, $\mathrm{n}(\mathrm{A})/\mathrm{n}$, se aproxima do valor $0,20$, à medida que n aumenta.

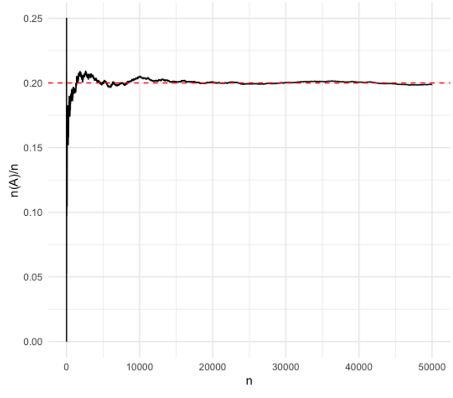

Figura 1: Simulação do Exemplo 1.

Pode-se concluir que mesmo as bolas sendo de tamanhos diferentes e, portanto, as bolas maiores tendo naturalmente mais chances de serem retiradas, o experimento de Bernoulli continua sendo válido, conforme Exemplo 2 a seguir. Novamente, é a lei forte dos grandes números em ação.

Exemplo 2. Imagine que as bolas 1 e 2 do Exemplo 1 tenham a metade da chance de serem retiradas em relação às demais bolas. Simulando novamente o experimento de Bernoulli, os resultados de 50.000 realizações foram plotados no gráfico da Figura 2, no qual se constata que a proporção entre o número de bolas removidas que estão no conjunto A e o número de retiradas realizadas até aquele momento, $n(A)/n$, se aproxima do valor $0{,}11$, à medida que n aumenta.

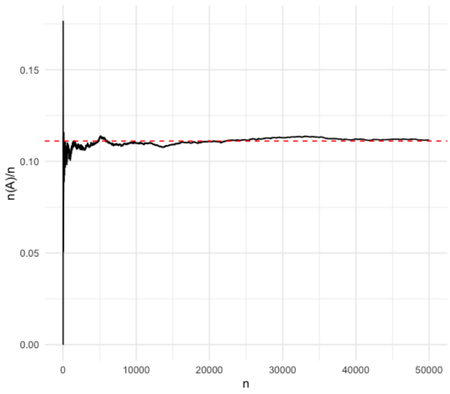

Figura 2: Simulação do Exemplo 2.

2.2. Definição clássica

No estudo realizado em Pereira et al [5] torna-se evidente que, nos Ensinos Fundamental e Médio, a definição mais utilizada é a clássica, creditada ao matemático francês Laplace (1749-1827).

Definição 2. Se o espaço amostral Ω é finito, a probabilidade de um evento A é definida por

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis ao evento } A}{\text{número de casos possíveis}},$$

desde que o espaço amostral seja **equiprovável**, ou seja, desde que qualquer subconjunto unitário de Ω, os chamados **eventos elementares**, tenha a mesma chance de ocorrer.

Poincaré em sua obra Ciência e Hipótese, discute a definição clássica de probabilidade ao ponderar que

> *A definição é bem simples. A probabilidade de um evento é a razão do número de casos favoráveis ao evento sobre o número total de casos possíveis. Um simples exemplo mostra quão incompleta esta definição é: Eu jogo dois dados. Qual é a probabilidade de se obter 6 em pelo menos um deles? Para cada dado temos 6 possíveis resultados; o número total de casos possíveis é* $6 \times 6 = 36$. *O número de casos favoráveis é 11; a probabilidade é 11/36.* (Gould, 2001, p.138)

Essa solução dada por Poincaré leva em consideração que, por exemplo, o resultado $(1, 2)$ é distinto do resultado $(2, 1)$, isto é, aparecer a face 1 no primeiro dado e a face 2 no segundo é diferente de sair a face 2 no primeiro dado e a face 1 no segundo. Esse resultado pode ser melhor compreendido com o auxílio da Tabela 1, onde estão em destaque os onze casos favoráveis:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	**(1,6)**
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	**(2,6)**
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	**(3,6)**
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	**(4,6)**
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	**(5,6)**
(6,1)	**(6,2)**	**(6,3)**	**(6,4)**	**(6,5)**	**(6,6)**

Tabela 1: Primeira solução de Poincaré

O referido autor vai mais além quando apresenta o que seria uma outra solução para o mesmo problema:

> *Esta é a solução correta, mas por que não podemos proceder como segue: Os números que aparecem nas faces ao jogarmos dois dados formam* $\frac{6\times 7}{2} = 21$ *diferentes combinações. Entre estas combinações, seis são favoráveis, a probabilidade é 6/21.* (Gould, 2001, p.138)

Já nessa segunda solução apresentada, os eventos $(1, 2)$ e $(2, 1)$ não foram considerados distintos, pois representam o mesmo resultado: surgiu a face 1 em um dos dados e a face 2 no outro. Essa segunda possível solução apresentada por Poincaré está ilustrada na Tabela 2 a seguir, com o destaque para os seis resultados favoráveis:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	**(1,6)**
	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	**(2,6)**
		(3,3)	(3,4)	(3,5)	**(3,6)**
			(4,4)	(4,5)	**(4,6)**
				(5,5)	**(5,6)**
					(6,6)

Tabela 2: Segunda solução de Poincaré

Por que o primeiro método de calcular o número de casos favoráveis legitima mais do que o segundo? E a resposta de Poincaré traz a importância da hipótese de equiprobabilidade: "Em qualquer caso, não é a definição que nos responde. Somos obrigados então a completar a definição dizendo ... sobre o número total de casos possíveis, desde que os casos sejam igualmente prováveis." (Gould, 2001, p.138)

A definição clássica de probabilidade para eventos equiprováveis já era usada muito antes de Laplace:

> *Suponha que desejamos calcular a probabilidade de obter a face 3 no lançamento de um dado. Podemos recorrer à experimentação e jogar um dado 100.000 vezes. Encontraríamos que 3's aparecem em aproximadamente um sexto dos lançamentos e concluir que a probabilidade de obter a face 3 é* $\frac{1}{6}$ *(abordagem de Bernoulli). Contudo, recorrer à experimentação como forma de determinar a probabilidade é difícil e algumas vezes não é possível. Pascal (1623-1662) e Fermat (1607-1665) sugeriram a seguinte abordagem: No caso do lançamento de um dado, existem seis possíveis resultados (se excluirmos a possibilidade do dado repousar sobre um de suas arestas). Cada um desses resultados é igualmente provável, e desses seis, um é favorável ao lançamento que resulta na face 3. Portanto a probabilidade que a face 3 apareça é* $\frac{1}{6}$. *Se estamos interessados na probabilidade que a face 3 ou a face 4 apareça na face superior do lançamento de um dado, ainda teremos seis possíveis resultados, mas agora dois de seis serão favoráveis. Neste caso, a abordagem de*

> *Pascal e Fermat levaria a conclusão que a probabilidade de obter a face 3 ou a face 4 é $\frac{2}{6}$. Se o problema fosse para calcular a probabilidade de não obter a face 3 no lançamento de um dado a resposta seria $\frac{5}{6}$, porque nesse problema existem cinco resultados favoráveis dentre os seis possíveis. Em geral, a definição de uma medida quantitativa da probabilidade é a seguinte: Se, de n resultados igualmente possíveis, m são favoráveis ao acontecimento de um certo evento, a probabilidade do evento acontecer é $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ e a probabilidade do evento não acontecer é $\frac{\mathrm{n-m}}{\mathrm{n}}$. Desta definição geral de probabilidade segue que se nenhum resultado possível for favorável, isto é, se o evento for impossível, a probabilidade do evento deve ser $\frac{0}{\mathrm{n}}$, ou 0. Se todos os n possíveis resultados forem favoráveis, isto é, o evento certo, a probabilidade seria $\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}}$, ou 1. Portanto, a medida numérica da probabilidade pode variar de 0 a 1, da impossibilidade à certeza.* (Kline, 1967, p.524)

Utilizando a definição de Laplace no Exemplo 1, onde todos os eventos elementares têm a mesma chance de ocorrer, obtemos $\mathrm{P(A)} = \frac{2}{10} = 0,2$. Entretanto, no Exemplo 2 já não se pode usar a fórmula de Laplace para resolver a questão, pois existem eventos elementares com chances diferentes de acontecer.

Como Poincaré destacou, a fórmula de Laplace só é válida quando os eventos elementares têm a mesma chance de ocorrer, ou seja, se o espaço amostral for equiprovável. No entanto, foi verificado em [5], através da análise de várias dissertações do PROFMAT e de livros adotados nos Ensinos Fundamental e Médio, que essa fórmula vem sendo utilizada como definição de probabilidade sem a menção à hipótese da equiprobabilidade, o que é um erro muito grave. Além da análise de dissertações e livros didáticos, os autores apresentam o resultado de um teste aplicado com alunos da Universidade Federal do Rio Grande do Norte e também com alunos de escolas públicas e privadas das cidades de Natal e de Parnamirim, o que permitiu comprovar, mais uma vez, que a fórmula de Laplace é a definição de probabilidade que eles conhecem, mas o preocupante é que poucos estudantes se referiram à hipótese necessária de equiprobabilidade. Por esse motivo, os autores propuseram, para o ensino da probabilidade, o uso da definição axiomática de probabilidade quando o espaço amostral é finito.

2.3. Definição axiomática

A probabilidade é uma função que a cada evento de Ω associa um número entre 0 e 1. Na definição axiomática, o domínio da função probabilidade é, de maneira geral, uma classe de eventos aleatórios (σ-álgebra). Neste trabalho o espaço amostral é finito, portanto podemos considerar a classe de eventos aleatórios como sendo o conjunto das partes de Ω ($\mathcal{P}(\Omega)$).

Definição 3. Uma probabilidade é uma função P que a cada subconjunto A de Ω associa um número entre 0 e 1, satisfazendo as seguintes propriedades:

i) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$

ii) Se $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_\mathrm{n}$ são eventos disjuntos, então $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_\mathrm{n}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2) + ... + \mathrm{P}(\mathrm{A}_\mathrm{n})$.

Na definição axiomática nenhuma hipótese sobre o espaço amostral é feita e, portanto, pode ser aplicada tanto no Exemplo 1, cujo espaço é equiprovável, quanto no Exemplo 2, em que temos eventos elementares com probabilidades distintas. No Exemplo 1, em que cada evento elementar tem a mesma chance de ocorrer, aplicando as propriedades (i) e (ii) da definição axiomática, obteremos:

$$1 = \mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}) = \mathrm{P}(\{1\}) + ... + \mathrm{P}(\{10\}) = \mathrm{p} + ... + \mathrm{p} = 10\mathrm{p},$$

o que implica em $10p = 1$, portanto, $p = 1/10$ e assim:

$$P(A) = P(\{1,2\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) = p + p = 2p = \frac{2}{10}.$$

Já no Exemplo 2, sem a equiprobabilidade, aplicando as propriedades (i) e (ii) da definição axiomática, teremos que:

$$1 = P(\Omega) = P(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}) = P(\{1\}) + \ldots + P(\{10\}) = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} + p + \ldots + p = 9p,$$

o que implica em $9p = 1$, portanto, $p = \frac{1}{9}$ e assim:

$$P(A) = P(\{1,2\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) = 2\frac{p}{2} = p = \frac{1}{9}.$$

3. O erro que se comete ao usar equiprobabilidade quando ela não existe

A definição de probabilidade de Laplace só é válida quando os eventos são equiprováveis, mas equiprobabilidade não é uma hipótese realista.

> *A definição de probabilidade que estamos ilustrando é notavelmente simples e aparentemente de fácil aplicação. Suponha que alguém argumente, contudo, que a probabilidade de uma pessoa atravessar a rua em segurança é $\frac{1}{2}$, já que existem dois possíveis resultados: cruzar a rua com segurança ou sem segurança. Se esse argumento fosse forte, pessoas em grandes centros urbanos não poderiam esperar ter vidas longas. A falácia nesse argumento é que dois possíveis resultados, atravessar a rua em segurança ou não, não são igualmente prováveis.* (Kline, 1967, p.526)

Nessa seção, o objetivo é exemplificar os prejuízos que se pode ter ao assumir a equiprobabilidade quando na verdade ela não existe. Para tanto, serão usadas as ferramentas estudadas na disciplina Probabilidade e Estatística, ministrada no PROFMAT (Mestrado Profissional em Rede Nacional), que desenvolveu tópicos como esperança matemática e erro médio quadrático. O entendimento dessas ferramentas probabilísticas começa pela definição de variáveis aleatórias e, para o que esse artigo se propõe, é preciso apenas variáveis aleatórias discretas.

3.1. Variável aleatória

Definição 4. Dado um espaço amostral Ω, seja $\mathcal{P}(\Omega)$ o conjunto das partes de Ω, ou seja, o conjunto de todos os subconjuntos de Ω. Uma variável aleatória discreta é qualquer função $X : \Omega \to E \subset \mathbb{R}$, onde E é enumerável, que satisfaz:

$$X^{-1}(U) = \{w \in \Omega / X(w) \in U\} \in \mathcal{P}(\Omega),$$

qualquer que seja $U \subset E$. Note que quando Ω é finito, X, por ser função, assume uma quantidade finita de valores e, portanto, é uma variável aleatória discreta.

Exemplo 3. Considere o experimento aleatório que consiste em extrair duas bolas uma a uma ao acaso e com reposição de uma urna com três bolas vermelhas (V) e duas bolas brancas (B). O espaço amostral associado a esse experimento é:

$$\Omega = \{(B,B), (B,V), (V,B), (V,V)\}.$$

Podemos definir assim a variável aleatória $X : \Omega \to \mathbb{Z}$, que a cada elemento de Ω associa o número de bolas vermelhas obtidas nas duas retiradas, isto é,

$$X((B, B)) = 0, \quad X((B, V)) = X((V, B)) = 1 \quad \text{e} \quad X((V, V)) = 2.$$

Na prática, investigar um fenômeno aleatório significa estudar o comportamento de variáveis aleatórias associadas a ele, e tal comportamento é descrito através da sua distribuição de probabilidade:

3.2. Distribuição de probabilidade

Definição 5. A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta X, é uma função P_X que associa a cada subconjunto $\{i\}$ da imagem da variável aleatória X, a probabilidade do evento cuja imagem pela variável aleatória X é i, ou seja,

$$P_X(\{i\}) = P(\{w \in \Omega / X(w) \in \{i\}\} = P(\{w \in \Omega / X(w) = i\},$$

também denotada por $P(X = i)$.

Exemplo 4. Para a variável aleatória definida no Exemplo 3, que assume os valores $0, 1$ e 2, a função de distribuição é assim calculada:

i) $P_X(\{0\}) = P(X = 0) = P(\{(B, B)\}) = \frac{2}{5}\frac{2}{5} = \frac{4}{25}$;

ii) $P_X(\{1\}) = P(X = 1) = P(\{(B, V), (V, B)\}) = P(\{(B, V)\}) + P(\{(V, B)\}) = \frac{2}{5}\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\frac{2}{5} = \frac{12}{25}$;

iii) $P_X(\{2\}) = P(X = 2) = P(\{(V, V)\}) = \frac{3}{5}\frac{3}{5} = \frac{9}{25}$.

As probabilidades acima foram calculadas usando o Teorema do Produto.

Teorema 1. *(Teorema do Produto) Se* A, B *são eventos, então*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A).$$

Por exemplo, para o cáculo de $P_X(\{0\})$, se B_1 é o evento extrair uma bola branca na primeira retirada e B_2 é o evento extrair uma bola branca na segunda retirada, então o evento $\{(B, B)\}$ é dado por $B_1 \cap B_2$ e assim, pelo Teorema do Produto:

$$P(\{(B, B)\}) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}.$$

Onde $P(B_2|B_1) = \frac{2}{5}$ pois as retiradas são feitas com reposição. Se as retiradas fossem sem reposição teríamos $P(B_2|B_1) = \frac{1}{4}$.

O valor $P_X(\{0\})$ significa a probabilidade de, ao extrair duas bolas uma a uma ao acaso e com reposição de uma urna com três bolas vermelhas (V) e duas bolas brancas (B), não se obter bola vermelha. De maneira geral, P_X é uma função de probabilidade definida no conjunto dos subconjuntos da $\mathrm{Im}(X) = \{0, 1, 2\}$. Desta forma, a variável aleatória X induz um novo espaço amostral $\mathrm{Im}(X) = \{0, 1, 2\}$ com uma nova função de probabilidade, a P_X. É interessante notar, pelos cálculos anteriores, que os eventos elementares $\{0\}, \{1\}$ e $\{2\}$, não têm a mesma chance de ocorrer. Assim, tanto $\Omega = \{(B, B), (B, V), (V, B), (V, V)\}$ quanto o novo espaço amostral $\mathrm{Im}(X) = \{0, 1, 2\}$ não são equiprováveis. Portanto, não se pode usar Laplace e afirmar que $P_X(\{0\}) = P_X(\{2\}) = P_X(\{3\}) = 1/3$.

De maneira geral, dado um experimento aleatório, tem-se inicialmente um conjunto formado por três elementos: o espaço amostral Ω, uma classe de eventos aleatórios $\sigma(\Omega)$, e uma probabilidade P. Essa terna $(\Omega, \sigma(\Omega), \mathrm{P})$ é chamada **espaço de probabilidade**. Ao se modelar o experimento aleatório por uma variável aleatória X, obtém-se um novo espaço de probabilidade, o espaço de probabilidade induzido: $(\mathrm{Im}(\mathrm{X}), \sigma(\mathrm{Im}(\mathrm{X})), \mathrm{P}_{\mathrm{X}})$.

Na próxima sessão, apresentamos dois exemplos que ilustram o erro cometido ao se assumir equiprobabilidade, onde ela não existe. Para tanto, precisamos definir dois importantes parâmetros relacionados à distribuição de probabilidade, que são a esperança e a variância.

3.3. Esperança e variância

Definição 6. A esperança matemática de uma variável aleatória discreta $\mathrm{X} : \Omega \to \mathbb{R}$ é a sua média ponderada pela sua distribuição de probabilidade, ou seja,

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{\mathrm{i} \in \mathrm{Im}(\mathrm{X})} \mathrm{i}\mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{i}).$$

Uma propriedade importante da esperança matemática é a linearidade em relação à soma.

Teorema 2. *Dadas* n *variáveis aleatórias* $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, ..., \mathrm{X}_\mathrm{n}$ *definidas no mesmo espaço de probabilidade* $(\Omega, \sigma(\Omega), \mathrm{P})$*:*

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + ... + \mathrm{X}_\mathrm{n}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_1) + \mathrm{E}(\mathrm{X}_2) + ... + \mathrm{E}(\mathrm{X}_\mathrm{n}).$$

Exemplo 5. Usando as distribuições calculadas no Exemplo 4, a esperança da variável aleatória definida no Exemplo 3 é dada por:

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 0.\mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) + 1.\mathrm{P}(\mathrm{X} = 1) + 2.\mathrm{P}(\mathrm{X} = 2) = 0.\frac{4}{25} + 1.\frac{12}{25} + 2.\frac{9}{25} = \frac{30}{25}.$$

Esse número significa que ao se realizar 25 vezes esse experimento, deve-se esperar que apareçam, em média, 30 bolas vermelhas.

Já a variância é uma medida que mostra quão distante estão os valores assumidos pela variável aleatória da sua esperança matemática, ou seja,

Definição 7. A variância de uma variável aleatória discreta $\mathrm{X} : \Omega \to \mathbb{R}$ é distância a sua média ao quadrado ponderada pela sua distribuição de probabilidade, ou seja,

$$\mathrm{Var}(\mathrm{X}) = \sum_{\mathrm{i} \in \mathrm{Im}(\mathrm{X})} (\mathrm{i} - \mathrm{E}(\mathrm{X}))^2 \mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{i}).$$

Exemplo 6. Usando as distribuições calculadas no Exemplo 4 e a esperança calculada no exemplo anterior, a variância da variável aleatória definida no Exemplo 3 é dada por:

$$\mathrm{Var}(\mathrm{X}) = (0 - \frac{30}{25})^2 \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) + (1 - \frac{30}{25})^2 \mathrm{P}(\mathrm{X} = 1) + (2 - \frac{30}{25})^2 \mathrm{P}(\mathrm{X} = 2) = \frac{7.500}{15.625}.$$

3.4. Prejuízos ao se supor equiprobabilidade quando ela não existe

Os Exemplos 7 e 8 a seguir, ilustram como a não equiprobabilidade modifica o resultado esperado na realização de eventos aleatórios.

Exemplo 7. Imagine que você está em um jogo, no qual, em caso de vitória, você recebe R$ 1,00 e, em caso de derrota, paga R$1,00. Quanto você espera ganhar ou perder depois de n partidas?

Se você supuser que a probabilidade de ganhar ou de perder é a mesma, ou seja, se você acredita que seu adversário tem a habilidade equivalente à sua, então, estará na seguinte situação:

$$P(\text{ganhar uma partida}) = P(\text{perder uma partida}).$$

Um maneira de modelar esse problema é definir a seguinte variável aleatória:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se você vencer a i-ésima partida} \\ -1, & \text{se você perder a i-ésima partida} \end{cases}$$

assim, a soma $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ representa o quanto você ganhou ou perdeu depois de n partidas. Já que a probabilidade de ganhar uma partida é a mesma de perder uma partida, ou seja,

$$P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = 1/2,$$

depois de n jogadas o valor esperado é:

$$E(S_n) = E(X_1 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n}(1.P(X_i = 1) - 1P(X_i = -1)) = \sum_{i=1}^{n}(1/2 - 1/2) = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0,$$

e assim, depois de n partidas, em média, você terá ganho 0 reais.

Por outro lado, e se você mensurou erroneamente a chance de ganhar? Se, por exemplo, seu adversário é bem melhor que você e a sua chance de ganhar seja 1/3? Veja como o resultado esperado se altera:

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n}(1.P(X_i = 1) - 1P(X_i = -1)) = \sum_{i=1}^{n}(1/3 - 2/3) = -n/3,$$

ou seja, depois de n partidas, em média, você terá perdido $\frac{n}{3}$ reais. Note que, pelo fato de existirem duas possibilidades, imaginar que elas são equiprováveis, quando nem sempre elas o são, pode levar a um resultado final inesperado, como a perda média de $\frac{n}{3}$ reais.

A modelagem e a solução do problema da distribuidora de remédios, que foi resumidamente enunciado na Introdução, assumem as seguintes ideias gerais. Seja X uma variável aleatória discreta que assume os valores 1, 3 e 10 com probabilidades $0,1$, $0,2$ e $0,7$, respectivamente. Dado um ponto p qualquer da reta, a distância ao quadrado de 1 até p é calculada por $(1-p)^2$ e, da mesma forma, é calculada a distância ao quadrado de p aos outros possíveis valores que X assume. Assim, $(X-p)^2$ assume os valores $(1-p)^2$, $(3-p)^2$ ou $(10-p)^2$. Note que o valor $(1-p)^2$ só aparece se $X = 1$, ou seja, com probabilidade $P(X = 1)$ e, de maneira análoga, o valor $(3-p)^2$ aparece com probabilidade $P(X = 3)$, e o valor $(10-p)^2$ com probabilidade $P(X = 10)$. Desta forma, a variável aleatória $(X-p)^2$ tem por esperança:

$$\begin{aligned} E(X-p)^2 &= (1-p)^2 P(X=1) + (3-p)^2 P(X=3) + (10-p)^2 P(X=10) \\ &= (1-p)^2\ 0,1 + (3-p)^2\ 0,2 + (10-p)^2\ 0,7. \end{aligned}$$

Rifo [6] define o erro quadrático médio de uma variável aleatória e mostra que ele é minimizado pela esperança da variável aleatória.

Definição 8. Seja p um valor real qualquer tomado como previsão para uma variável aleatória X. O custo definido pelo quadrado do erro é chamado perda quadrática da previsão e sua média, o erro quadrático médio de p como preditor de X, é definida por:

$$\mathrm{EQM}(p; X) = E(X - p)^2.$$

Teorema 3. *(***Teorema 5.6 em [6]***) Dada uma variável aleatória X, o preditor de X com menor EQM é a sua esperança $p = E(X)$.*

Exemplo 8. Imagine que uma distribuidora de remédios atende a três cidades: A, B e C, sendo a distância de A até B de $100\mathrm{km}$ e a de B até C, de $300\mathrm{km}$. Essa distribuidora só recebe um telefonema por dia, vindo de uma das três cidades, e atende ao chamado imediatamente. Pelo histórico de ligações, verificou-se que a probabilidade de a chamada recebida ser da cidade A é $0,1$; ser da B é $0,2$ e da C é $0,7$. Em qual ponto sobre a reta que liga as três cidades o dono deve construir o depósito da sua empresa de modo a minimizar a distância ao quadrado dos deslocamentos? Para modelar o problema, suponha que a cidade A esteja no ponto 0, a B, no ponto 100, e a C, no ponto 400 e que o depósito seja construído em um ponto D sobre a reta que liga os três municípios.

Figura 3: Ilustração do Exemplo 8

Seja X a variável que representa o número relacionado à localização da cidade que fez a ligação. A resposta para o dono da distribuidora é o ponto $p = E(X)$ que minimiza a distância média quadrática dos deslocamentos até D, ou seja, que minimiza a função:

$$\mathrm{EMQ}(D, X) = d(A, D)^2 P(X = A) + d(B, D)^2 P(X = B) + d(C, D)^2 P(X = C). \tag{1}$$

Como X representa o número relacionado à localização da cidade que fez a ligação, então X assume os valores 0, 100 e 400 com probabilidades $0,1$, $0,2$ e $0,7$, respectivamente. Portanto,

$$E(X) = 0 \times 0,1 + 100 \times 0,2 + 400 \times 0,7 = 300$$

é o valor que minimiza (1), ou seja, o depósito deve ficar a uma distância de $300\mathrm{Km}$ da cidade A, $200\mathrm{Km}$ da cidade B e $100\mathrm{Km}$ da cidade C.

Se tivéssemos assumido equiprobabilidade, o depósito ficaria situado à uma distância

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 100 \times \frac{1}{3} + 400 \times \frac{1}{3} = \frac{500}{3},$$

ou seja, aproximadamente à $166,67$ km da cidade A.

Analisando o $\mathrm{EMQ}(300, X) = 24.000$ e $\mathrm{EMQ}(166,67, X) = 28.889,89$, fica comprovado que a distância média quadrática diária, ao se usar equiprobabilidade, quando de fato ela não existe, leva à uma diferença dos erros médios quadráticos, em valores absolutos, de mais de 4.888. Outrossim, convém lembrar que o erro médio quadrático está relacionado à distância média quadrática diária percorrida, o que dá um acréscimo considerável de quilometragem.

4. Conclusão

A abordagem do ensino de Probabilidade, em que o foco é quase exclusivo nos casos equiprováveis e na fórmula de Laplace, é um tema a ser dicutido. Não é por se encontrar uma quantidade finita de possibilidades em um experimento aleatório, que se tem, automaticamente, um espaço amostral equiprovável. Tal hipótese, além de não ser realista, quando usada indiscriminadamente, propaga erros em todos os parâmetros estudados no modelo probabilístico. Já a abordagem axiomática, sendo mais geral que a clássica, fornece ferramentas suficientes para a modelagem de todos os fenômenos aleatórios.

Referências

[1] Bernstein, P. *Desafio aos Deuses: A Fascinante História do Risco* 21 ed. Campus, 1997.

[2] Gould, S. *The Value of Science: Essential writings of Henry Poicaré*, 1 ed. The Morden Library, 2001.

[3] Henrique, D. *O que Einstein quis dizer com Deus não joga dados?* Disponível em: <URL https://socientifica.com.br/o-que-einstein-quis-dizer-com-deus-não-joga-dados/>. Acesso em: 05 de setembro de 2023.

[4] Kline, M. *Mathematics for the Nonmathematician* 1 ed. Dover Publications, 1967.

[5] Pereira, A. G. C., Cortes, G. L. C., Medeiros, G. H. B., Almeida, F. M. P., Almeida Júnior, F. E., Nunes, I. B. D., Silva, A. H., Souza, G. M. *Algumas reflexões sobre a definição de probabilidade*, REVEMAT, 15, 1–22. 2020.

[6] Rifo, L. *Probabilidade e Estatística: Aspectos de tomadas de decisões e incertezas para o Ensino Fundamental e Médio* 1 ed. SBM, 2021.

[7] Salsa, I. S., Moreira, J. A. *Probabilidade e Estatística* 1 ed. SEDIS, 2008.

André Gustavo Campos Pereira
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
<andre.gustavo.campos.pereira@gmail.com>

Gabriel Garcia Costa
Instituto Federal do Rio Grande do Norte
<gabrielgarciacosta10@hotmail.com>

Viviane Simioli M. Campos
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
<viviane.simioli@ufrn.br>

Recebido: 09/09/2024
Publicado: 28/01/2025