PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.13, n.1, 2025
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2025/pmo1307

Os pontos fixos da função feliz

Eudes Antonio Costa[1] Fernando Soares de Carvalho

Resumo

Neste trabalho, apresentamos resultados relacionados à *função feliz* e, também, a alguns números associados a essa função, chamados de *números felizes*. É realizado um estudo dos pontos fixos e a iteração da *função feliz* em uma base não decimal.

Palavras-chave: Função feliz; Número Feliz; Pontos Fixos.

Abstract

In this work, we present results related to the *happy function* and also some numbers associated with this function, called *happy numbers*. We conduct a study of fixed points and iterations of the *happy function* in different bases.

Keywords: Happy function; Happy number; Fixed point.

1. Introdução

Nestas notas vamos apresentar o conceito de *função feliz*, pontos fixos dessa função em diferentes bases numéricas, além de exibir exemplos e a definição generalizada de números *felizes*, conforme [7, 6]. Aqui, faremos uso recorrente de operações em uma base não decimal.

Para definir os *números felizes*, precisamos, primeiramente, definir o que será chamada de *função feliz* em uma base $b \geq 2$ qualquer.

Definição 1. Para algum natural $b \geq 2$ fixado, seja $x = [a_k a_{k-1} \dots a_0]_b = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_0 b^0$ um número natural escrito na base b. A função *feliz*, $S^1_{e,b} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, é definida por

$$S^1_{e,b}(x) = S^1_{e,b}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b^i\right) = \left[\sum_{i=0}^{k} a_i^e\right]_b . \tag{1}$$

Especificamente, quando for a base decimal, isto é, tivermos $b = 10$, vamos utilizar a notação $S^1_e(x)$.

Exemplo 1. Considere a base $b = 10$, $e = 2$ e para números 2024, 2025 e 12345, temos que

$$\begin{aligned} S^1_2(2024) &= 2^2 + 0^2 + 2^2 + 4^2 = 24, \\ S^1_2(2025) &= 2^2 + 0^2 + 2^2 + 5^2 = 33, \\ S^1_2(12345) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55. \end{aligned}$$

[1]Parcialmente apoiado pela Universidade Federal do Tocantins-Propesq/UFT

Veja que, na Definição 1, a adição das potencias a_i^e pode ser feita na base 10 e convertida para a base b, ou realizada diretamente na base indicada desde que o resultado esteja escrito na base indicada. No próximo exemplo, adotamos a primeira opção.

Exemplo 2. Já na base $b = 4$, $e = 5$ e $x = [2023]_4$, temos que

$$\begin{aligned} S^1_{5,4}(2023) &= [2^5 + 0^5 + 2^5 + 3^5]_{10} \\ &= 32 + 0 + 32 + 243 = [307]_{10} \\ &= [256 + 48 + 3]_{10} = [4^4 + 3 \cdot 16 + 3]_{10} \\ &= 1 \cdot 4^4 + 0 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^3 = [10303]_4 \end{aligned}$$

Agora, veja que também podemos aplicar a função feliz no número $y = [10303]_4$, em que $y = [S^1_{5,4}(x)]_4$. Vejamos:

$$\begin{aligned} S^1_{5,4}(10303) &= [1^5 + 3^5 + 3^5]_{10} \\ &= 1 + 243 + 243 = [487]_{10} \\ &= [256 + 3 \cdot 64 + 2 \cdot 16 + 1 \cdot 4 + 3]_{10} \\ &= 1 \cdot 4^4 + 3 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 3 \\ &= [13213]_4\,, \end{aligned}$$

assim

$$S^1_{5,4}(y) = [13213]_4, \text{ ou seja, } S^2_{5,4}(x) = S^1_{5,4}\left(S^1_{5,4}(x)\right) = [13213]_4\,.$$

Dessa forma, para qualquer base $b > 1$ fixada e $x = [a_k a_{k-1} \dots a_0]_b$, podemos fazer iterações da função $S^1_{e,b}(x)$, de forma que

$$S^2_{e,b}(x) = S^1_{e,b}\left(S^1_{e,b}(x)\right)\,,$$

e sendo $m > 0$ um número natural, tem-se que:

$$\begin{aligned} S^1_{e,b}(x) &= \left[\sum_{i=0}^{k} a_i^e\right]_b\,, \\ S^m_{e,b}(x) &= \left[S^1_{e,b}\left(S^{m-1}_{e,b}(n)\right)\right]_b\,, \quad \text{para todo } m > 1\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Novamente, quando a base for a convencional base decimal ($b = 10$), vamos utilizar a notação $S^m_e(x)$ para representar a m-ésima iteração da *função feliz*.

Exemplo 3. Considere $b = 10$ e o número 7, veja que:

$$\begin{aligned} S^1_2(7) &= 7^2 = 49, \\ S^2_2(7) &= 4^2 + 9^2 = 97, \\ S^3_2(7) &= 9^2 + 7^2 = 130, \\ S^4_2(7) &= 1^2 + 3^3 + 0^2 = 10, \\ S^5_2(7) &= 1^2 + 0^2 = 1\,. \end{aligned}$$

Exemplo 4. Ainda para $\mathrm{b} = 10$ e o número 37 agora, veja que:

$$\begin{aligned}
S_2^1(37) &= 3^2 + 7^2 = 58,\\
S_2^2(37) &= 5^2 + 8^2 = 89,\\
S_2^3(37) &= 8^2 + 9^2 = 145,\\
S_2^4(37) &= 1^2 + 4^2 + 5^2 = 42,\\
S_2^5(37) &= 4^2 + 2^2 = 20,\\
S_2^6(37) &= 2^2 + 0^2 = 4,\\
S_2^7(37) &= 4^2 = 16,\\
S_2^8(37) &= 1^2 + 6^2 = 37\ .
\end{aligned}$$

Exemplo 5. Agora, tome $\mathrm{b} = 4$ e o número $[2023]_4$. Veja que:

$$\begin{aligned}
S_{2,4}^1(2023) &= 2^2 + 0^2 + 2^2 + 3^2 = [101]_4,\\
S_{2,4}^2(2023) &= 1^2 + 0^2 + 1^2 = [2]_4,\\
S_{2,4}^3(2023) &= 2^2 = [10]_4,\\
S_{2,4}^4(2023) &= 1^2 + 0^2 = [1]_4\ .
\end{aligned}$$

Agora, apresentamos a definição de *número feliz*.

Definição 2. Um número natural $\mathrm{x} = [\mathrm{a_k a_{k-1} \ldots a_0}]_\mathrm{b}$ escrito na base $\mathrm{b} \geq 2$ é chamado de *número feliz* se $S_{2,\mathrm{b}}^{\mathrm{m}}(\mathrm{x}) = 1$ para algum inteiro positivo $\mathrm{m} > 0$. Um número que não é feliz será chamado de número *triste*.

Segue do Exemplo 3 que o número 7 é *feliz* na base 10, pois $S_2^5(7) = 1$. E ainda na base 10, pelo Exemplo 4, verificamos que o número 37 é *triste*. Na base 4 temos que $[2023]_4$ é um número feliz por $S_{2,4}^1(\mathrm{x})$, conforme Exemplo 5.

No próximo exemplo, mostraremos que $[2025]_6$ é *feliz* pela aplicação $S_{3,6}$. As contas estarão todas indicadas na base 6.

Exemplo 6. Consideremos o número $[2025]_6$ e a aplicação $S_{3,6}$. Então:

$$\begin{aligned}
S_{3,6}^1(2025) &= 2^3 + 0^3 + 2^3 + 5^3 = [353]_6,\\
S_{3,6}^2(2025) &= 3^3 + 5^3 + 3^3 = [455]_6,\\
S_{3,6}^3(2025) &= 4^3 + 5^3 + 53^{=}[1242]_6,\\
S_{3,6}^4(2025) &= 1^3 + 2^3 + 4^3 + 2^3 = [213]_6,\\
S_{3,6}^5(2025) &= 2^3 + 1^3 + 3^3 = [100]_6,\\
S_{3,6}^6(2025) &= 1^3 + 0^3 + 0^3 = [1]_6\ .
\end{aligned}$$

Como $S_{3,6}^6(2025) = [1]_6$, segue que $[2025]_6$ é *feliz* na base 6.

Apresentamos, na Nota 1 a seguir, uma lista de *números felizes* menores que 500, na base $\mathrm{b} = 10$. Fica como desafio ao leitor, verificar tal fato, ou seja, determinar o número de iterações pra cada número.

Nota 1. [8] Os números felizes menores que 500 são: 1, 7, 10, 13, 19, 23, 28, 31, 32, 44, 49, 68, 70, 79, 82, 86, 91, 94, 97, 100, 103, 109, 129, 130, 133, 139, 167, 176, 188, 190, 192, 193, 203, 208, 219, 226, 230, 236, 239, 262, 263, 280, 291, 293, 301, 302, 310, 313, 319, 320, 326, 329, 331, 338, 356, 362, 365, 367, 368, 376, 379, 383, 386, 391, 392, 397, 404, 409, 440, 446, 464, 469, 478, 487, 490 e 496 .

Em [12], com auxílio de recurso computacional, testam todos os números na base decimal menores que 10^3 e comprovam que estes ou são felizes ou infelizes com o ciclo 4, 16, 37, 58, 89, 145, 42 e 20, como no Exemplo 4. É conhecido que para todo x natural na base 10, sempre existe um natural $m > 0$ tal que $S_2^m(x) = 1$ ou $S_2^m \in \{4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20\}$. Uma demonstração completa pode ser vista em [14]. Outro resultado, também conhecido, é que todo número inteiro positivo é feliz na base $b = 4$, veja [11].

No desenvolvimento deste trabalho, procuramos explorar propriedades aritméticas dos números inteiros positivos em outra base numérica b, além da decimal. Na Seção 2, retomamos estes conceitos e procedimentos (operações de adição e multiplicação, e conversão de base), para tornar o texto o mais autocontido e oferecer comodidade ao leitor. Já na Seção 3, estendemos o conceito de número feliz para qualquer base $b \geq 2$ e todo expoente $e \geq 1$, e apresentamos alguns exemplos. Enquanto, na Seção 4, analisamos os pontos fixos da função feliz generalizada. Por fim, na Seção 5, mostramos que todo número é feliz na base $b = 2$.

2. Sistema de numeração posicional - base

Nesta seção, relembramos os conceitos principais de um *sistema de numeração posicional* ou *base* e as operações de adição e multiplicação numa base b. Pensando em um leitor com menos experiência em outras bases numéricas, recomendamos [4, 9, 13, 16] para maiores detalhes. Um leitor mais experiente pode suprimir a leitura desta seção.

Em nosso sistema de numeração convencional, base 10, todo número inteiro positivo n pode ser expresso na forma polinomial

$$n = a_r \cdot 10^r + a_{r-1} \cdot 10^{r-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 = a_r a_{r-1} \ldots a_1 a_0 \,,$$

com $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ para $i = 0, \ldots, r$ e $a_r \neq 0$. Por exemplo,

$$2024 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \,.$$

Mas o papel desempenhado pelo 10, os agrupamentos de 10 elementos, podem ser realizados em qualquer agrupamento de b elementos, isto é formalizado no seguinte resultado.

Lema 1. *Seja* b *um número inteiro positivo não nulo. Todo número inteiro positivo* n *pode ser expresso na forma polinomial*

$$n = a_r \cdot b^r + a_{r-1} \cdot b^{r-1} + \cdots + a_1 \cdot b^1 + a_0 = [a_r a_{r-1} \ldots a_1 a_0]_b \,,$$

sendo $r \geq 0$, $a_i \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ *para* $i = 0, \ldots, r$ *e* $a_r \neq 0$.

Assim, na representação de um número na base 6, por exemplo, utilizamos os algarismos ou símbolos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e agrupamos de seis em seis elementos. Portanto, $[2024]_6$ tem o seguinte significado

$$[2024]_6 = 2 \cdot 6^3 + 0 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 4 \,.$$

E mais, $[2024]_6 = [448]_{10}$, pois

$$\begin{aligned} [2024]_6 &= 2 \cdot 6^3 + 0 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 4 \\ &= 2 \cdot 216 + 0 + 12 + 4 \\ &= 432 + 16 = [448]_{10}. \end{aligned}$$

Portanto, para converter um número expresso em uma base qualquer b para a base 10, basta calcularmos as potências indicadas. Por exemplo, $[245]_7 = 2 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 + 5 = 98 + 28 + 5 = 131$. Assim, o número $[245]_7 = [131]_{10}$.

Agora, para fazer uma conversão oposta, isto é, passar da base 10 para a base b, é preciso escrever o número como adição de potências de b. Dado o número 131 na base 10, e desejando expressar esta quantidade na base 7, podemos utilizar divisões sucessivas por 7, enquanto os coeficientes forem maiores que 7, e escrever

$$\begin{aligned} 131 &= 18 \times 7 + 5 \\ &= (2 \times 7 + 4) \times 7 + 5 \\ &= 2 \times 7^2 + 4 \times 7 + 5 \\ &= [245]_7. \end{aligned}$$

Os procedimentos utilizados no sistema decimal para efetuar as operações de adição ou multiplicação também podem ser realizados num sistema posicional de base b, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 7. (a) Na base $\mathrm{b} = 6$ vamos realizar uma adição, fazendo os agrupamentos de 6 elementos da direita para à esquerda.

$$\begin{aligned} [2024]_6 + [54]_6 &= (2 \cdot 6^3 + 0 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 4) + (5 \cdot 6^1 + 4) \\ &= 2 \cdot 6^3 + 0 \cdot 6^2 + (2 + 5) \cdot 6^1 + (4 + 4) \\ &= 2 \cdot 6^3 + 0 \cdot 6^2 + (2 + 5) \cdot 6^1 + (1 \cdot 6 + 2) \\ &= 2 \cdot 6^3 + 0 \cdot 6^2 + (2 + 5 + 1) \cdot 6^1 + 2 \\ &= 2 \cdot 6^3 + 0 \cdot 6^2 + (1 \cdot 6 + 2) \cdot 6^1 + 2 \\ &= 2 \cdot 6^3 + 0 \cdot 6^2 + (1 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1) + 2 \\ &= 2 \cdot 6^3 + (0 + 1) \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 2 \\ &= 2 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6^1 + 2 \\ &= [2122]_6\ . \end{aligned}$$

(b) Na base $\mathrm{b} = 5$ vamos realizar uma multiplicação, fazendo primeiramente a distributiva e depois os agrupamentos de 5 elementos da direita para à esquerda.

$$\begin{aligned} [124]_5 \cdot [4]_5 &= (1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 4) \cdot 4 \\ &= (1 \cdot 4) \cdot 5^2 + (2 \cdot 4) \cdot 5^1 + (4 \cdot 4) \\ &= (1 \cdot 4) \cdot 5^2 + (1 \cdot 5 + 3) \cdot 5^1 + (3 \cdot 5 + 1) \\ &= 4 \cdot 5^2 + (1 \cdot 5 + 3 + 3) \cdot 5^1 + 1 \\ &= 4 \cdot 5^2 + (2 \cdot 5^1 + 1) \cdot 5^1 + 1 \\ &= 4 \cdot 5^2 + (2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1) + 1 \\ &= (4 + 2) \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 1 \\ &= (1 \cdot 5^1 + 1) \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 1 \\ &= 1 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 1 \\ &= [1111]_5\ . \end{aligned}$$

3. Número feliz com um expoente qualquer

A seguir, apresentamos uma generalização de *número feliz*, considerando um expoente $e \geq 1$ e qualquer base $b \geq 2$. De maneira natural, o conceito de *número feliz*, pode ser estendido da seguinte forma:

Definição 3. Um número natural $x = [a_k a_{k-1} \dots a_0]_b$ escrito na base $b \geq 2$ é chamado de número e-*feliz se,* $S^m_{e,b}(x) = 1$*, para algum inteiro positivo* $m > 0$.

Uma questão que se levanta é a seguinte: existe número feliz pra qualquer b e qualquer e? A resposta é trivialmente **sim**, conforme exemplos à seguir.

Exemplo 8. Dado qualquer inteiro não negativo k e quaisquer b e e fixados, o número $x = (10^k)_b$ é e-feliz, visto que $S^1_{e,b}(x) = 1$.

No próximo exemplo usamos o conceito e notação dos números *repunidades generalizadas* ou *repunidades* em uma base b qualquer. Acerca das *repunidades generalizadas*, em língua portuguesa, sugerimos [3].

Exemplo 9. Para todo k inteiro positivo, considere o número *repunidade*, $[R_k]_b = [\underbrace{111\cdots 11}_{\text{k algarismos}}]_b$, em uma base b. Fazendo $x = [R_b]_b$ e para qualquer e, temos que

$$S^2_{e,b}(x) = S^1_{e,b}(10) = 1.$$

Portanto x é e-feliz.

Exemplo 10. Para uma base $b \geq 2$ fixada, usaremos a notação $x = [10_k]_b$, em que k indica a quantidade de dígitos 1 e 0 alternado no número inteiro positivo x, numa base b fixada. Por exemplo, $[10_5]_b = [10101]_b$ e $[10_8] = [10101010]_b$. Se b for par (base decimal), então $[10_{2b}]_b$ é e-feliz na base b, qualquer que seja o expoente e. De igual modo, se tivermos b ímpar então $[10_{2b+1}]_b$ é e-feliz. (Verifique!)

Nota 2. Vale ressaltar que, na base decimal, temos o conceito de número par(múltiplo de 2) quando o número termina em (o algarismo da unidade é) 0, 2, 4, 6 ou 8. No entanto, tal conceito não se aplica diretamente em outras bases. Por exemplo, se $b = 9$, temos que $[16]_9 = [3 \cdot 5]_9$. No entanto, $[16]_9$ não é um número par (base decimal).

Nota 3. Os números $x = [10_k]_b$ são conhecidos como números *suavemente ondulantes generalizados* do tipo um-zero. Acerca dos números *suavemente ondulantes generalizados*, veja [2, 15].

Exemplo 11. [11] Na base 5, o número $[103]_5$ é 2-*triste* visto que $S^1_{2,5}(103) = [20]_5$, $S^2_{2,5}(103) = [31]_5$ e $S^3_{2,5}(103) = [103]_5$. Assim, para todo $k \geq 1$, $S^k_{2,5}(103) \in \{[103]_5, [20]_5, [31]_5\}$.

Generalizando o que vimos no Exemplo 11, em uma base b qualquer, um número pode ser *feliz*; porém, em uma outra base $b' \neq b$, ser um número triste. Como visto na Nota 1, o número 28 é 2-*feliz* na base 10 pois $S^3_2(28) = 1$. Contudo na base 5, o número $[103]_5 = 28$ é 2-*triste*.

4. Pontos fixos da função feliz

Os pontos fixos são importantes em várias áreas da matemática, especialmente na teoria dos sistemas dinâmicos, análise funcional e equações diferenciais. Muitas vezes, os pontos fixos têm significados importantes. Em sistemas dinâmicos, por exemplo, podem representar estados de equilíbrio ou estabilidade.

Nesta seção, vamos apresentar resultados e exemplos relativos a pontos fixos da *função feliz*. De maneira formal, temos:

Definição 4. Seja x um número natural na base b, dizemos que x é ponto fixo da função feliz se $S^1_{e,b}(x) = x$.

Veja que, se $x \neq 1$ é um ponto fixo, então pode existir um $y \neq 1$ com $S^k_{e,b}(y) = x$ para algum $k \geq 1$, ou seja, ao atingir um ponto fixo, as iterações param e, portanto, nunca atingirá o número 1. Dessa forma, se um número atingir um ponto fixo $x \neq 1$ da função feliz, ele automaticamente será feliz.

Uma pergunta natural é: todo número triste atingirá (convergirá para) um ponto fixo da função feliz após um número finito de iterações? O Exemplo 11 mostra que **não**, pois temos um conjunto finito cíclico de elementos nas iterações.

Em [11] é apresentada uma caracterização dos pontos fixos da *função feliz* $S^1_{2,b}(x)$, ou seja, determina-se os números x tal que $S^1_{2,b}(x) = x$. Enquanto, em [5], são apresentados pontos fixos da função $S^1_{3,b}(x)$, com $0 \leq b \leq 10$, além de resultados relativos à iteração de $S^m_{3,b}(x)$.

No Lema 1, vamos considerar o caso particular da *função feliz* $S^1_{4,b}(x)$. Ressalta-se que, para os casos $e = 2$ e 3, resultados análogos podem ser vistos em [11, 5]. Ainda nesta seção, resultados mais gerais da *função feliz* $S^1_{e,b}(n)$ serão apresentados.

Proposição 1. *Se* $b \geq 4$ *e* $x \geq 3b^4$, *então* $S^1_{4,b}(x) < x$.

Demonstração. Seja $x = a_k b^k + \cdots + a_0 b^0$. Tem-se que,

$$x - S^1_{4,b}(x) = \sum_{i=0}^{k} a^i b^i - \sum_{i=0}^{k} a_i^4 = \sum_{i=0}^{k} a_i \left(b^i - a_i^3\right), \tag{3}$$

o termo $i = 0$ é pelo menos $(b-1)(1-(b-1)^3)$, o termo $i = 1$ é pelo menos $(b-1)(b-(b-1)^3)$, o termo $i = 2$ é pelo menos $(b-1)(b^2-(b-1)^3)$. Todos os outros termos são não negativos. Podemos ainda escrever, $x - S^1_{4,b}(x) = \alpha + \beta$, em que,

$$\alpha + \beta = \underbrace{a_k(b^k - a_k^3) + \cdots + a_3(b^3 - a_3^3)}_{\alpha} + \underbrace{a_2(b^2 - a_2^3) + a_1(b - a_1^3) + a_0(1 - a_0^3)}_{\beta}.$$

Sendo $x \geq 3b^4 = [30000]_b$, tem-se que $k \geq 4$ e como $a_k \neq 0$, a parcela $a_k(b^k - a_k^3)$ é estritamente maior do que zero; enquanto que as parcelas $a_{k-1}(b^{k-1} - a_{k-1}^3) + \cdots + a_3(b^3 - a_3^3)$ são maiores ou iguais a zero. Veja que o menor valor possível para α é $3(b^4 - 1)$ ($k = 4$, $a_k = 3$, $a_{k-1} = \cdots = a_3 = 0$), isso implica que $\alpha > 0$ e ainda o menor valor possível para β ocorre quando $a_0 = a_1 = a_2 = b - 1$, ou seja, $\beta = (b-1)(b^2-(b-1)^3) + (b-1)(b-(b-1)^3) + (b-1)(1-(b-1)^3)$. Assim,

$$\begin{aligned} x - S^1_{4,b}(x) &= \alpha + \beta \geq 3(b^4 - 1) + (b-1) + (b^2 - (b-1)^3) + \\ &+ (b-1)(b-(b-1)^3) + (b-1)(1-(b-1)^3) \\ &= 13b^3 - 18b^2 + 12b - 7 \\ &= b^2(13b - 18) + (12b - 7)\,. \end{aligned}$$

Veja que $b^2(13b-18) + (12b-7) > 0$, visto que $b > 1$ e, assim, $b^2 > 0$, $13b - 18 > 0$ e $12b - 7 > 0$. Portanto, $S^1_{4,b}(x) < x$, para todo $x > 3b^4$. □

Exemplo 12. Em particular, na base $b = 10$, os pontos fixos da função $S_4^1(x)$ pertencem ao conjunto $\{1, 2, \cdots, 3 \cdot 10^4 - 1\}$. Isto também significa que, não há pontos fixos de $S_4^1(x)$ com mais de 5 algarismos. Note que, os números $n = 1634,\ 8208,\ 9474$ são pontos fixos. De fato,

$$\begin{aligned} S_4^1(1634) &= 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4 = 1634; \\ S_4^1(8208) &= 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4 = 8208; \\ S_4^1(9474) &= 9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4 = 9474. \end{aligned}$$

Exemplo 13. Para outras bases, tem-se também:

$$\begin{aligned} S_{4,4}^1(1103) &= 1^4 + 1^4 + 0^4 + 3^4 = [1103]_4; \\ S_{4,4}^1(3303) &= 3^4 + 3^4 + 0^4 + 3^4 = [3303]_4; \\ S_{3,5}^1(103) &= 1^3 + 0^3 + 3^3 = [103]_5; \\ S_{4,5}^1(2124) &= 2^4 + 1^4 + 2^4 + 4^4 = [2124]_5; \\ S_{4,6}^1(4054) &= 4^4 + 0^4 + 5^4 + 4^4 = [4054]_6; \\ S_{4,8}^1(420) &= 4^4 + 2^4 + 0^4 = [420]_8; \\ S_{4,9}^1(432) &= 4^4 + 3^4 + 2^4 = [432]_9. \end{aligned}$$

Durante nosso estudo formulamos e provamos a Proposição 1. Posteriormente, uma busca cruzada por algumas referências e citações, encontramos uma generalização deste resultado, o Teorema 1 a seguir. Assim, o Teorema 1 é uma generalização da Proposição 1, para quaisquer base $b \geq 2$ e todo expoente $e \geq 2$.

Teorema 1. *[6] Para qualquer base* $b \geq 2$, *se* $x > (e-1)b^e$, *então* $S_{e,b}^1(x) < x$.

Demonstração. Se $b = 2$, tem-se que $S_{e,b}^1(x) < x$, para todo $x > 1$. Considere agora $b > 2$, fixando $x \geq (e-1)b^e$, temos

$$x = \sum_{i=0}^{n} x_i b^i,$$

com $x_n \neq 0$ e $0 \leq i \leq n$, $0 \leq x_i \leq b-1$. Inicialmente, se $x > b^{e+1}$, então $n \geq e+1$. Usando o Teorema Binomial

$$x \geq b^n > (b-1)^n + n(b-1)^{n-1} > (n+1)(b-1)^e \geq S_{e,b}^1(x).$$

Agora, se $x < b^{e+1}$, então a suposição $x \geq (e-1)b^e$, implica que $n = e$ e $x_e \geq e-1$. Daí,

$$\begin{aligned} x = \sum_{i=0}^{e} x_i b^i &\geq x_e b^e + x_{e-1} b^{e-1} > x_e(b-1)^e + x_e(b-1)^{e-1} + x_{e-1} b^{e-1} \\ &\geq (e-1)(b-1)^e + x_e^e + x_{e-1}^e + \sum_{i=0}^{e-2} x_i^e = S_{e,b}^1(x), \end{aligned}$$

como desejado. □

Vale destacar que o Teorema 1 garante que os pontos fixos da função $S_{e,b}^1(x)$, se encontram no conjunto $\{1, 2, \cdots, (e-1)b^e\}$. Note ainda que, $S_{e,b}^1(1) = 1$, isto é, para qualquer potência e, qualquer base $b \geq 2$, $x = 1$ será sempre um ponto fixo.

Nas Proposições 2 e 3, apresentamos resultados relativos a pontos fixos consecutivos da *função feliz*.

Proposição 2. *Seja* x *um número representado na base* $b \geq 2$*. Se* x *é múltiplo de* b*, então* x *é ponto fixo de* $S^1_{e,b}(x)$ *se, somente se,* $x+1$ *também for ponto fixo.*

Demonstração. Note que, se x é múltiplo da base b, o número x é terminado em 0. Logo,

$$S^1_{e,b}(x+1) = S^1_{e,b}(x) + 1^e = S^1_{e,b}(x) + 1. \tag{4}$$

Portanto, $S^1_{e,b}(x) = x$ se, somente se, $S^1_{e,b}(x+1) = x+1$. □

A Proposição 3 garante que não é possível obter mais de dois números consecutivos que sejam pontos fixos da *função feliz*. Uma demonstração para o caso particular $e = 2$, pode ser vista em [17] .

Proposição 3. *Não existem três pontos fixos consecutivos da função feliz.*

Demonstração. Sejam $x = \sum_{i=0}^{k} a_i b^i$ e $(x+1)_b$, pontos fixos da *função feliz*. Daí,

$$\begin{aligned} x &= S^1_{e,b}(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i^e + a_0^e, \\ x+1 &= S^1_{e,b}(x+1) = \sum_{i=1}^{k} a_i^e + (a_0+1)^e = x + \sum_{j=1}^{e-1} \binom{e}{j} a_0^{e-j} + 1. \end{aligned}$$

Observe que a igualdade anterior implica que, $\sum_{j=1}^{e-1} \binom{e}{j} a_0^{e-j} = 0$. Logo, necessariamente $a_0 = 0$, implicando que n é um múltiplo da base b. De forma análoga, se $(n+2)$ fosse ponto fixo, teríamos que $(n+1)$, também seria um múltiplo da base b, o que é uma contradição, já que n é múltiplo de b. Portanto, conclui-se que não existem três números consecutivos que são pontos fixos. □

4.1. Pontos fixos da c-função feliz

Nesta seção, será apresentada uma generalização da *função feliz* que será chamada de c-*função feliz*, que pode ser "entendida" como uma translação por uma constante c da função feliz. Serão exibidos alguns exemplos de pontos fixos na base $b = 10$; bem como, um código executado no software *Octave*. Tal função é definida a seguir:

Definição 5. Dado o número x representado na base $b \geq 2$. A c-função feliz, será definida por:

$$\mathcal{F}^c_{e,b}(x) = \mathcal{F}^c_{e,b}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i^e\right) + c, \tag{5}$$

com $a_i \in \{0, 1, 2, \cdots b-1\}$ e c um número inteiro positivo fixado.

No trabalho [17], são apresentadas propriedade relativas aos pontos fixos da *2-função feliz*. E ainda, é determinada a cardinalidade do conjunto dos pontos fixos da *2-função feliz*, com $n = ub^w$, $0 < u < b$ e $w \geq 0$. Vale ressaltar que resultados análogos aos apresentados nas Proposições 2 e 3 são válidos também para a c-*função feliz*.

A seguir são apresentados alguns exemplos de pontos fixos da *c-função feliz* na base $b = 10$. Vamos também utilizar a notação, $\mathcal{F}^c_e$, para números escritos na base $b = 10$.

Exemplo 14. Alguns exemplos de pontos fixos da c-*função feliz* na base $b = 10$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_2^1(35) &= 3^2 + 5^2 + 1 = 35,\\
\mathcal{F}_2^1(75) &= 7^2 + 5^2 + 1 = 75,\\
\mathcal{F}_3^3(437) &= 4^3 + 3^3 + 7^3 + 3 = 434 + 3 = 437,\\
\mathcal{F}_4^2(2626) &= 2^4 + 6^4 + 2^4 + 6^4 + 2 = 2626,\\
\mathcal{F}_5^6(17332) &= 1^5 + 7^5 + 3^5 + 3^5 + 2^5 + 6 = 17326 + 6 = 17332,\\
\mathcal{F}_6^4(63015) &= 6^6 + 3^6 + 0^6 + 1^6 + 5^6 + 4 = 63011 + 4 = 63015\,.
\end{aligned}
$$

Os pontos fixos no Exemplo 14, bem como no Exemplo 13, foram obtidos com auxílio computacional de um código executado no Octave, como mostra a Figura 1.

Figura 1: Código executado no Octave

```
base=input('Escolher a base: ');
e=input('escolher o expoente: ');
c=input('escolher o valor de c: ')
% Primeiro passo: Escolher de forma aleatória
%os 5 algarismos que vão compor o número na base b
a5=randi([0,base-1],1,1);
a4=randi([0,base-1],1,1);
a3=randi([0,base-1],1,1);
a2=randi([0,base-1],1,1);
a1=randi([0,base-1],1,1);
n_inicial=[a5  a4  a3 a2  a1]; %Algarismos que vão compor o número na base b
n_base10 = a5*base^4 + a4*base^3 + a3*base^2 + a2*base + a1 ; %número na base 10
n=n_inicial.^e; %elevando cada algarismo ao expoente e
S1=sum(n); %fazendo a soma dos números obtidos
S=S1+c; %Aplicando a função c-feliz

while n_base10 ~= S %Enquanto não encontrar um ponto fixo, repita os processos anteriores

a5=randi([0,base-1],1,1);
a4=randi([0,base-1],1,1);
a3=randi([0,base-1],1,1);
a2=randi([0,base-1],1,1);
a1=randi([0,base-1],1,1);

n_inicial=[a5  a4  a3 a2  a1];
n_base10 = a5*base^4 + a4*base^3 + a3*base^2 + a2*base + a1 ;
n=n_inicial.^e ;
S1=sum(n);
S=S1+c;
end

S %ponto fixo na base 10
N=dec2base(S,base) %ponto fixo na base b
```

Fonte: Autoria

5. O paraíso da base binária

Aqui consideramos o caso em que $e = 1$, embora o uso "convencional" do termo *feliz* toma $e \geq 2$. Assim, na Equação (1) vamos considerar $b = 2$ e $e = 1$. Lembramos que qualquer número natural $[n]_2$, será representado por $[n]_2 = a_k 2^k + a_{k-1} 2^{k-1} + \cdots + a_1 2^1 + a_0 2^0$, com k natural expresso na base 10 e

$a_i \in \{0, 1\}$. E, assim, a função *feliz* $S^1_{1,2} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é dada por

$$S^1_{1,2}(n) = S^1_{1,2}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i 2^i\right) = \sum_{i=0}^{k} a_i^1 \,. \tag{6}$$

Conforme Definição 3, dizemos o número natural $(n)_b$ é *feliz* se $S^m_{1,2}(n) = 1$, para algum $m > 0$ natural.

Como dissemos, no trabalho [11] mostra-se que todo inteiro positivo é feliz na base $b = 4$ e $e = 2$. Nesta seção mostraremos um resultado correlato para $b = 2$ e qualquer $e \geq 1$. Explicitamente temos:

Teorema 2. *Seja* $e > 1$ *um número natural, então todo número* $[n]_2$ *é feliz pela função* $S_{e,2}(n)$.

Antes da demonstração, alguns exemplos.

Exemplo 15. Na Tabela 1, verificamos que os números 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111 são felizes pela função $S_{1,2}(n)$, conforme função (6), em no máximo 3 iterações.

Tabela 1: Iterações da função feliz na base 2

n	$S^1_{1,2}(n)$	$S^2_{1,2}(n)$	$S^3_{1,2}(n)$	$S^*_{1,2}(n)$
1	1			1
10	1			1
11	10	1		1
100	1			1
101	10	1		1
110	10	1		1
111	101	10	1	1

Como na Tabela 1, $S^*_{1,2}(n)$ indica o valor constante de $S^k_{1,2}(n)$ para algum $k \geq 1$. Para demonstrar o resultado principal desta seção, que qualquer número na base binária é feliz pela função $S_{1,2}$, vamos usar o seguinte fato: que para todo $[n]_2 > 1$ tem-se que $[n]_2 = [x \cdot 10]_2$ ou $[n]_2 = [x \cdot 10 + 1]_2$, para algum $[x < n]_2$. Além disto, faremos uso dos seguintes resultados auxiliares, que são propriedades simples que seguem imediatamente da definição.

Lema 2. *Para quaisquer* $[x]_2$ *e* $[y]_2$ *inteiros positivos, temos que*

- $S^*_{1,2}(x + y) = S^*_{1,2}\left(S^*_{1,2}(x) + S^*_{1,2}(y)\right)$,
- $S^*_{1,2}(x \cdot y) = S^*_{1,2}\left(S^*_{1,2}(x) \cdot S^*_{1,2}(y)\right)$.

Lema 3. *Para todo* $[x]_2$ *natural da forma* $[x = 10^k]_2$, *com* k *natural na base 10, segue que* $S_{1,2}(x) = 1$.

O próximo resultado garante que todo número na base 2 é 1-feliz, vejamos.

Proposição 4. *Todo número* $[n]_2$ *é feliz pela função* $S_{1,2}(n)$, *isto é,* $S^{k_0}_{1,2}(n) = [1]_2$ *para algum* $k_0 > 1$.

Demonstração. Faremos por indução em $[n \geq 1]_2$. Segue do Exemplo 15 que o resultado é válido para $n = 1$.

Admita que o resultado é válido para todo $[1 \leq x < n]_2$. Vamos mostrar que o resultado é válido para n. Como $n > 1$, temos duas possibilidades. Primeiro caso, admitamos que $[n = x \cdot 10]_2$. Segue dos Lemas anteriores, e hipótese de indução, que

$$\begin{aligned} S^*_{1,2}(n) &= S^*_{1,2}(x \cdot 10) \\ &= S^*_{1,2}(S^*_{1,2}(x) \cdot S^*_{1,2}(10)) \\ &= S^*_{1,2}(1 \cdot 1) = S^*_{1,2}(1) = 1\ . \end{aligned}$$

De igual modo, caso tenhamos $[n = x \cdot 10 + 1]_2$. Ainda, fazendo uso dos Lemas anteriores, caso anterior e hipótese de indução. Segue que

$$\begin{aligned} S^*_{1,2}(n) &= S^*_{1,2}(x \cdot 10 + 1) \\ &= S^*_{1,2}(S^*_{1,2}(x \cdot 10) + S^*_{1,2}(1)) \\ &= S^*_{1,2}(1 + 1) \\ &= S^*_{1,2}(10) = 1\ . \end{aligned}$$

Disto concluímos que $S^*_{1,2}(n) = 1$ para todo $[n]_2$. □

5.1. Prova do Teorema 2

O Teorema 2 segue diretamente da Proposição 4, vejamos:

Demonstração. Temos que $[n]_2 = a_k 2^k + a_{k-1} 2^{k-1} + \cdots + a_1 2^1 + a_0 2^0$, com $k \geq 1$ e $a_i \in \{0, 1\}$. Agora, basta observar que para qualquer $e > 0$ natural, $1^e = 1$ e $0^e = 0$ e, assim, $S^m_{e,2}(n) = S^m_{1,2}(n)$ para todo $m \geq 1$. Disto concluímos o resultado. □

6. Considerações finais

Os resultados apresentados neste trabalho têm o intuito de apresentar conceitos básicos relacionados a *função feliz* e *números felizes*, incentivando assim a curiosidade matemática. Estudar algumas "classes" de números na componente curricular de matemática e algumas das suas especificidades no ensino básico pode ser um desafio para estudantes e professores, e pode ser uma ferramenta importante em muitas áreas da matemática, servindo de suporte a resultados significativos, não só na matemática, mas também em ciências afins. Acerca dos *números felizes*, recomendamos o trabalho [1], que explora a construção do *número feliz* e algumas propriedades, bem como apresenta uma proposta didática e metodológica acerca das atividades de ensino. Em um próximo trabalho faremos a análise da órbita (conjunto das iterações) da função feliz, além de responder a questão: *Um número triste converge para um ponto fixo ou tem órbita finita (cíclica)?* Estudando assim, o comportamento da *função feliz* analisando sucessivas iterações.

Referências

[1] AIRES, Ana Paula; CATARINO, Paula. On Lucky numbers: a tool to teach and learn mathematical contents in basic education. In: **ICERI2019 Proceedings**. IATED, p. 4353-4360, 2019.

[2] CARVALHO, Fernando Soares; COSTA, Eudes Antonio. Um passeio pelos números ondulantes. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 8, n. 2, p. e3001-e3001, 2022.

[3] COSTA, Eudes Antonio; SANTOS, Douglas Catulio; BEZERRA, Cesar Santos. Algumas propriedades aritméticas das repunidades generalizadas. **Revista de Matemática da UFOP**, v. 2, p. 37-47, 2023.

[4] FOMÍN, Serguei Vasil'evich; VEGA, Carlos. **Sistemas de numeración**. MIR. 1975.

[5] GRUNDMAN, H. G.; TEEPLE, E. A. Generalized happy numbers. **The Fibonacci Quaterly**, vol. 39, 2001.

[6] GRUNDMAN, H. G.; HALL-SEELIG, L. L. Happy Numbers, Happy Functions, and Their Variations: A Survey. **La Matematica**, v. 1, p.404-430, 2022. https://doi.org/10.1007/s44007-021-00010-x.

[7] GUY, R. **Unsolved Problems in Number Theory**. New York: Springer-Verlag, 2 ed. p. 234-235, 1994.

[8] HAPPY NUMBERS [Números Felizes] **WIKIPEDIA**. https://en.wikipedia.or/wiki/Happy_number. Acessado em 20 de janeiro de 2024.

[9] HEFEZ, Abramo. **Aritmética** . SBM-Coleção PROFMAT, 2. ed. Rio de Janeiro-RJ. SBM, 2016.

[10] HONSBERGER, R. **Ingenuity in Mathematics**. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 1970.

[11] MATA, R. C. da; VELOSO, M. O. Números felizes e pontos fixos. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 1, p.e3002, 2023. https://doi.org/10.35819/remat2023v9i1id6190.

[12] MELO, José L. P.; FERREIRA, Rafael P. Q. Você conhece os números felizes e educados?. **Revista do Professor de Matemática**, SBM, n. 90, p. 28-33, 2016.

[13] NIVEN, Ivan; ZUCKERMAN, Herbert S.; MONTGOMERY, Hugh L. **An introduction to the theory of numbers**. John Wiley & Sons, 1991.

[14] PORGES, A. A Set of Eight Numbers. **American Mathematician Monthly**, vol. 52, p. 379-382, 1945.

[15] SANTOS, Douglas Catulio; COSTA, Eudes Antonio. Peculiarities of smoothly undulating number. **Intermaths**, v. 4, n. 2, p. 38-53, 2023.

[16] SANTOS, Ronaldo Antonio; COSTA, Eudes Antonio. Números de Ball generalizados. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 7, n. 1, p. 61-85, 2022.

[17] SWART, B. B.; BECK, K. A.; TURNER, C. E,; GRUNDMAN, H. G; MEY, M.; ZACK, L. **Fixed points on augmented generalized happy functions**. Rocky Mountain Journal of Mathematics, vol. 48, n. 1, 2018.

Eudes Antonio Costa
Universidade Federal do Tocantins
<eudes@uft.edu.br>

Fernando Soares de Carvalho
Universidade Federal do Tocantins
<fscarvalho@uft.edu.br>

Recebido: 25/01/2024
Publicado: 27/03/2025