PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.13, n.1, 2025
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo1308

Explorando Sistemas de Equações Não Lineares no Contexto do Ensino Médio

Mirray Victor Lima Oliveira   Rogério Azevedo Rocha

Resumo

O artigo aborda a temática de sistemas de equações não lineares, voltada para o Ensino Médio, com o objetivo de suprir a lacuna existente na literatura didática disponível. Inicialmente, são apresentados métodos e teoremas fundamentais para a resolução analítica de determinados sistemas não lineares, estabelecendo uma base conceitual sólida. Em seguida, o artigo explora uma série de problemas que podem ser modelados e solucionados por meio de sistemas de equações não lineares, oferecendo uma aplicação prática e contextualizada desses conceitos. Dada a escassez de materiais específicos para o Ensino Médio, esta publicação visa apoiar tanto professores quanto alunos, fornecendo ferramentas e exemplos concretos. Além disso, o conteúdo proposto pretende preparar os discentes para enfrentar diversos desafios acadêmicos, como olimpíadas de matemática e vestibulares militares, ampliando suas habilidades e conhecimentos matemáticos de forma significativa.

Palavras-chave: Sistemas de Equações Não-Lineares; Métodos analiticos; Aplicações; Ensino Médio

Abstract

The article addresses the topic of nonlinear equation systems aimed at high school education, with the goal of filling the gap in the available didactic literature. Initially, fundamental methods and theorems for the analytical resolution of certain nonlinear systems are presented, establishing a solid conceptual foundation. Subsequently, the article explores a series of problems that can be modeled and solved through nonlinear equation systems, offering practical and contextualized applications of these concepts. Given the scarcity of specific materials for high school, this publication aims to support both teachers and students by providing concrete tools and examples. Furthermore, the proposed content intends to prepare students to face various academic challenges, such as math Olympiads and military entrance exams, significantly enhancing their mathematical skills and knowledge.

Keywords: Nonlinear Equation Systems; Analytical Methods; Applications; High School

1. Introdução

No Ensino Médio, os alunos se deparam com uma variedade de conceitos matemáticos que são fundamentais para seu desenvolvimento acadêmico e compreensão do mundo ao seu redor. Entre esses conceitos, estão os sistemas de equações, que podem ser divididos em lineares e não lineares. No entanto, há uma notável diferença na forma como esses dois tipos de sistemas são abordados nos materiais educativos.

Os livros didáticos, dissertações e artigos relacionados ao Ensino Médio tendem a focar predominantemente nos sistemas lineares (conferir, por exemplo, [1], [2], [3] e [5]. Esses sistemas são mais simples de entender e resolver, o que facilita o processo de ensino e aprendizagem. Por essa razão, muitos currículos escolares optam por concentrar-se neles, assegurando que os alunos adquiram uma base sólida nesses conceitos antes de avançar para tópicos mais complexos.

Por outro lado, os sistemas não lineares, que representam uma vasta gama de fenômenos e problemas do mundo real, recebem muito menos atenção nos materiais didáticos. Esses sistemas são mais complexos e desafiadores, exigindo abordagens diferentes e, frequentemente, mais avançadas para serem compreendidos e resolvidos (Conferir, por exemplo, [4], [7] e [8]). A falta de ênfase nos sistemas não lineares pode ser uma limitação significativa na educação matemática dos alunos, já que impede a exposição a um conjunto mais completo e diversificado de ferramentas e métodos matemáticos.

Essa disparidade na abordagem dos sistemas de equações justifica a necessidade de incluir o estudo dos sistemas não lineares no Ensino Médio. Introduzir esses conceitos pode proporcionar uma visão mais abrangente da matemática, ajudando os alunos a entender melhor os problemas complexos e dinâmicos que podem encontrar tanto na academia quanto na vida cotidiana. Além disso, explorar sistemas não lineares pode estimular o desenvolvimento de habilidades avançadas de resolução de problemas, pensamento crítico e criatividade. [6] é uma dissertação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) oferecendo uma relevante proposta de introdução dos sistemas de equações não lineares no Ensino Médio.

Este trabalho tem como objetivo apresentar métodos e teoremas úteis para a resolução analítica de sistemas de equações não lineares, focando no contexto do Ensino Médio. Esses métodos e teoremas se mostram particularmente eficazes na solução de diversos problemas que aparecem frequentemente em olimpíadas de matemática e vestibulares militares, proporcionando aos alunos uma vantagem significativa nessas competições. Além disso, o trabalho apresentará problemas práticos que podem ser modelados por sistemas de equações não lineares, demonstrando a aplicação real desses métodos e teoremas. Ao explorar essas aplicações, os alunos poderão ver a relevância e a utilidade dos conceitos aprendidos, enriquecendo ainda mais sua compreensão e capacidade de resolver problemas complexos.

2. Preliminares

Nessa seção, apresentamos as definições de equações e de sistemas de equações lineares e não lineares, bem como seus respectivos conceitos de soluções.

2.1. Equação Não-Linear

Considere a seguinte equação

$$f(x_1, x_2, ...x_n) = 0, \tag{1}$$

onde $f(x_1, x_2, ...x_n)$ é uma função que depende das variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$. Quando a equação (1) pode ser expressa na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n - b = 0 \tag{2}$$

onde $a_1, a_2, ..., a_n$ e b são constantes, chama-se **Equação Linear**. Por exemplo,

$$4x - 2y + z - 6 = 0 \tag{3}$$

ou

$$x - 4y + 3z + 2 = 0 \tag{4}$$

são exemplos de equações lineares com três incógnitas x, y e z. Equações do tipo (1) que não se encaixam no formato (2) são chamadas de **Equações Não-Lineares**. Por exemplo,

$$x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2 = 0 \tag{5}$$

ou

$$\text{sen}(x)\cos(yz) + e^{xyz} - 2 = 0 \tag{6}$$

são exemplos de equações não lineares com três incógnitas x, y e z.

Definição 1. Uma **solução** da equação (1), isto é, de $f(x_1, x_2, ...x_n) = 0$, é uma n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ de números reais que torna a igualdade verdadeira, a dizer, que

$$f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = 0.$$

Exemplo 1. As ternas ordenadas $(2, 2, 2)$ e $(3, 2, 1)$ são soluções das equações lineares (3) e (4), respectivamente. Já as ternas ordenadas $(1, 1, 1)$ e $(\pi/2, \bar{y}, 0)$, $\forall \bar{y} \in \mathbb{R}$, são soluções das equações não lineares (5) e (6), respectivamente. De fato, basta observar que as ternas ordenadas mencionadas satisfazem as respectivas equações.

2.2. Sistemas de Equações não Lineares

Definição 2. Um sistema com m $(m \geqslant 2)$ equações e n incógnitas é um sistema da forma

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \qquad\vdots \\ f_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

onde $f_i(x_1, x_2, ..., x_n); \forall i = 1, ..., m$ são equações que dependem das variáveis $x_1, x_2, ..x_n$. Se todas as equações do sistema são lineares o sistema é chamado de **sistema de Equações Lineares**. Caso, uma ou mais equações do sistema é não-linear, o sistema é chamado de **sistema de equações não-lineares.** Por exemplo,

$$\begin{cases} 4x - 2y + z - 4 = 0 \\ 2x + 3y + 2z - 9 = 0 \\ 3x + 3y + z - 8 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

ou

$$\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 3x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

são exemplos de sistemas equações lineares.

$$\begin{cases} x + y + z = 6; \\ xy + xz = 5; \\ yx + yz = 8. \end{cases} \tag{10}$$

e

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases} \tag{11}$$

são exemplos de sistemas de equações não lineares.

Definição 3. Uma solução do sistema de equações (7) é uma n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ que satisfaz, simultaneamente, todas as equações do sistema, isto é, $f_i(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = 0; \forall = 1, ..., m$.

Exemplo 2. **a)** A terna ordenada $(1, 1, 2)$ é a única solução do sistema de equações linear (8) e o sistema de equações linear (9) possui infinitas soluções dadas por $\{(3y, y, 1 - 5y); \forall y \in \mathbb{R}\}$; **b)** As ternas ordenadas $(1, 2, 3)$, $(1, 4, 1)$, $(5, 2, -1)$ **e** $(5, 4, -3)$ são as soluções do sistema de equações não linear (10) (conf. exemplo 3 a seguir) e os pares ordenados $(3, 2)$ e $(2, 3)$ são as soluções do sistema de equações não linear (11) (conf. exemplo 5 a seguir).

Observação 1. Os sistemas de equações lineares e os sistemas de equações não lineares diferem significativamente em sua complexidade e nas técnicas necessárias para encontrar suas soluções. Nos sistemas de equações lineares, as relações entre as variáveis são lineares, o que permite um maior controle sobre esses sistemas. Por outro lado, a classe dos sistemas de equações não lineares é muito mais ampla e diversa. Qualquer sistema de equações que não seja linear é classificado como não linear, abrangendo uma vasta gama de problemas com comportamentos e características muito diferentes. Em resumo, enquanto os sistemas lineares são mais simples e bem compreendidos, oferecendo soluções previsíveis e controláveis, os sistemas não lineares representam uma classe muito mais ampla e complexa de problemas, exigindo abordagens mais sofisticadas e flexíveis para encontrar soluções.

3. Métodos

Nesta seção, apresentaremos um conjunto de métodos dedicados à resolução analítica de sistemas de equações não lineares. Cada método é projetado para resolver uma classe particular de sistemas, considerando as características específicas das equações envolvidas. Nossa abordagem será sistemática: para cada método, um teorema fundamental será apresentado, seguido de sua respectiva demonstração, garantindo assim a compreensão teórica e a validade das técnicas discutidas.

3.1. Método da Substituição

O método da substituição é utilizado para simplificar a resolução de sistemas de equações, envolvendo o isolamento de uma ou mais incógnitas em determinadas equações e a substituição dessas expressões nas demais equações do sistema. Dessa forma, obtemos um sistema ou conjunto de sistemas com menos incógnitas, facilitando a resolução. O teorema a seguir justifica o método da substituição para sistemas com duas equações e duas incógnitas, podendo ser generalizado, de forma análoga, para um sistema mais geral.

Teorema 1. *Se o sistema de equações*

$$\begin{cases} y = f(x) \\ g(x, y) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

admite solução, então ele é equivalente ao seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} y = f(x) \\ g(x, f(x)) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Demonstração. Suponha que existe um par ordenado (a, b) que satisfaça o sistema (12), isto é, suponha que $b = f(a)$ e $g(a, b) = 0$. Então, como $b = f(a)$, temos $g(a, f(a)) = 0$. Portanto, o par (a, b) também satisfaz o sistema (13).
Reciprocamente, suponha que o par (a, b) satisfaça o sistema (13), isto é, suponha que $b = f(a)$ e $g(a, f(a)) = 0$. Então, como $b = f(a)$, temos $g(a, b) = 0$. Portanto, o par (a, b) também satisfaz o sistema (12). □

Os exemplos 3 e 4 em seguida são aplicações do Teorema 1.

Exemplo 3. Encontre as soluções do seguinte sistema de equações não linear

$$\begin{cases} x + y + z = 6; \\ xy + xz = 5; \\ yx + yz = 8. \end{cases} \tag{14}$$

Solução. O sistema (14) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x(y + z) = 5 \\ y(x + z) = 8 \end{cases} \tag{15}$$

Da primeira equação do sistema (15),

$$y + z = 6 - x \quad \text{e} \quad x + z = 6 - y.$$

Assim, da segunda e terceira equação do sistema (15),

$$x(6 - x) = 5 \;\; \textbf{e} \;\; y(6 - y) = 8.$$

Logo, $-x^2 + 6x - 5 = 0$ e $-y^2 + 6y - 8 = 0$. Então,

$$x = 1 \textbf{ ou } x = 5 \textbf{ e } y = 2 \textbf{ ou } y = 4.$$

Daí,

$$x = 1 \;\; \textbf{e} \;\; y = 2, \;\; x = 1 \;\; \textbf{e} \;\; y = 4, \;\; x = 5 \;\; \textbf{e} \;\; y = 2 \;\; \textbf{ou} \;\; x = 5 \;\; \textbf{e} \;\; y = 4.$$

Portanto, de posse da primeira equação do sistema (15), verificamos que as soluções do sistema (14) são as seguintes ternas ordenadas:

$$(1, 2, 3), \;\; (1, 4, 1), \;\; (5, 2, -1) \;\; \textbf{e} \;\; (5, 4, -3).$$

Exemplo 4. Determine as soluções do seguinte sistema de equações não linear

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 70; \\ (x + y).(x^2 + y^2) = 203. \end{cases} \tag{16}$$

Solução. Como $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$, da segunda equação do sistema temos

$$(x + y)[(x + y)^2 - 2xy] = 203.$$

Assim,

$$(x + y)^3 - 2xy(x + y) = 203. \tag{17}$$

Da primeira equação do sistema,

$$xy(x + y) = 70. \tag{18}$$

Logo, de (17),

$$(x + y)^3 - 2.(70) = 203.$$

Assim, $(x + y)^3 = 343$ e, então, $x + y = 7$. Então, de (18), $xy = 10$. Portanto, x e y é solução do seguinte sistema

$$\begin{cases} x + y = 7; \\ xy = 10. \end{cases} \tag{19}$$

Logo, $x = 2$ e $y = 5$ ou $x = 5$ e $y = 2$. Portanto, o conjunto solução do sistema (16) é constituido pelos pares ordenados $(2, 5)$ e $(5, 2)$.

4. Método das operações algébricas

O método das operações algébricas nos informa que:

1) um sistema não linear homogêneo é equivalente aos sistemas em que uma das equações é mantida e a outra é substituida por uma soma ponderada, por funções não nulas, das funções envolvidadas no sistema;

2) um sistema não linear é equivalente aos sistemas em que uma das equações é mantida e a outra é substituida pelo produto (ou pela divisão), termo a termo, das equações do sistema;

3) um sistema não linear é equivalente aos sistemas em que uma das equações é mantida e a outra é elevada, termo a termo, por uma pontência ímpar.

Os Teoremas e Corolários a seguir justificam o método das operações algébricas.

Teorema 2. *Se o sistema de equações*

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \tag{20}$$

admite solução, então ele é equivalente ao seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \;\; (\text{ou } \; g(x, y) = 0) \\ \phi(x, y)f(x, y) + \omega(x, y)g(x, y) = 0 \end{cases} \tag{21}$$

com $\phi(x, y), \omega(x, y) \neq 0; \;\forall x, y.$

Demonstração. Suponha que existe um par ordenado (a, b) que satisfaz o sistema (20), isto é, suponha que $f(a, b) = 0$ e $g(a, b) = 0$. Assim,

$$\phi(a, b)f(a, b) + \omega(a, b)g(a, b) = 0.$$

Logo, o par (a, b) também satisfaz o sistema de equações (21).
Reciprocamente, suponha que o par ordenado de números (a, b) satisfaz o sistema de equações (21), isto é, suponha que

$$f(a, b) = 0 \;\; (\text{ou } \; g(a, b) = 0) \quad \text{e} \quad \phi(a, b)f(a, b) + \omega(a, b)g(a, b) = 0.$$

Assim, $f(a, b) = 0$ e $\omega(a, b)g(a, b) = 0$ (ou $g(a, b) = 0$ e $\phi(a, b)f(a, b) = 0$). Logo, como $\phi(a, b) \neq 0$ e $\omega(a, b) \neq 0$, temos $f(a, b) = 0$ e $g(a, b) = 0$. Então o par ordenado (a, b) também satisfaz o sistema (20). □

Teorema 3. *Suponha* $\phi(x,y), \omega(x,y) \neq 0;\ \forall x, y$. *Se o sistema de equações*

$$\begin{cases} f(x,y) = \phi(x,y) \\ g(x,y) = \omega(x,y) \end{cases} \tag{22}$$

admite solução, então ele é equivalente ao seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} f(x,y) = \phi(x,y) \\ f(x,y)g(x,y) = \phi(x,y)\omega(x,y). \end{cases} \tag{23}$$

Demonstração. Suponha que existe um par ordenado (a, b) que satisfaz o sistema (22), isto é, suponha que $f(a,b) = \phi(a,b)$ e $g(a,b) = \omega(a,b)$. Logo, $f(a,b)g(a,b) = \phi(a,b)\omega(a,b)$. Portanto, o par (a,b) também satisfaz o sistema (23).
Reciprocamente, suponha que o par ordenado (a, b) satisfaça o sistema (23), isto é, suponha que $f(a,b) = \phi(a,b)$ e que $f(a,b)g(a,b) = \phi(a,b)\omega(a,b)$. Assim, $\phi(a,b)g(a,b) = \phi(a,b)\omega(a,b)$. Então, como $\phi(a,b) \neq 0$, $g(a,b) = \omega(a,b)$. Portanto, o par (a,b) também satisfaz o sistema (22). □

Observe que $f(x,y) = \phi(x,y)$ com $\phi(x,y) \neq 0$ implica $\dfrac{1}{f(x,y)} = \dfrac{1}{\phi(x,y)}$. Portanto, como consequência direta do Teorema 3, temos o seguinte Corolário.

Corolário 1. *Suponha* $\phi(x,y), \omega(x,y) \neq 0;\ \forall x, y$. *Se o sistema de equações*

$$\begin{cases} f(x,y) = \phi(x,y) \\ g(x,y) = \omega(x,y) \end{cases} \tag{24}$$

admite solução, então ele é equivalente ao seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} f(x,y) = \phi(x,y) \\ \dfrac{g(x,y)}{f(x,y)} = \dfrac{\omega(x,y)}{\phi(x,y)}. \end{cases} \tag{25}$$

Demonstração. Análoga a demonstração do Teorema 3. □

Corolário 2. *Se o sistema de equações*

$$\begin{cases} f(x,y) = \phi(x,y) \\ g(x,y) = \omega(x,y) \end{cases} \tag{26}$$

admite solução, então ele é equivalente ao seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} f(x,y) = \phi(x,y) \\ g(x,y)^n = \omega(x,y)^n \end{cases} \tag{27}$$

onde n *é um número ímpar.*

Demonstração. Suponha que existe um par ordenado (a, b) que satisfaz o sistema (26), isto é, suponha que $f(a, b) = \phi(a, b)$ e $g(a, b) = \omega(a, b)$. Logo, $g(a, b)^n = \omega(a, b)^n$. Portanto, o par (a, b) também satisfaz o sistema (27).
Reciprocamente, suponha que o par ordenado (a, b) satisfaça o sistema (27), isto é, suponha que $f(a, b) = \phi(a, b)$ e que $g(a, b)^n = \omega(a, b)^n$. Desde que n é ímpar, $g(a, b)^n = \omega(a, b)^n$ implica $g(a, b) = \omega(a, b)$. Portanto, o par (a, b) também satisfaz o sistema (26). □

***Observação* 2.** Suponha n par em (27). Então, $g(x, y)^n = \omega(x, y)^n$ implica

$$g(x, y) = \omega(x, y) \text{ ou } g(x, y) = -\omega(x, y).$$

Assim, uma solução (x, y) do sistema (27) pode não ser solução do sistema (26). Nesse caso, caso elevemos ambos os lados de uma equação do sistema a uma potência par, no final, devemos testar as possíveis soluções encontradas para, possívelmente, eliminar as que não satisfazem o sistema em questão.

Os exemplos 5 e 6 em seguida são aplicações do Teorema 2.

Exemplo 5. Determine o conjunto solução do sistema:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases} \tag{28}$$

Solução. Pelo Teorema 2, o sistema (28) é equivalente ao seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ x^3 + y^3 - 35 + 3(x^2y + xy^2 - 30) = 0. \end{cases}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} xy(x + y) = 30 \\ (x + y)^3 = 125. \end{cases}$$

Então, temos

$$\begin{cases} xy(x + y) = 30 \\ (x + y) = 5. \end{cases} \tag{29}$$

Logo, substituindo a segunda equação do sistema (29) na primeira, obtemos:

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Portanto, os pares ordenados $(3, 2)$ e $(2, 3)$ são solução as soluções do sistema (28).

Exemplo 6. Encontre os reais x e y, tais que:

$$\begin{cases} x + \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 \\ y - \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases} \tag{30}$$

Solução. Pelo sistema (30), $(x, y) \neq (0, 0)$. Os casos $x = 0$ e $y \neq 0$ ou $y = 0$ e $x \neq 0$ não são possíveis de ocorrer pois geram inconsciência no sistema (30). Assim, podemos supor que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Desse modo, multiplicando a primeira equação do sistema (30) por y e a segunda equação por x observamos, pelo Teorema 2, que o sistema (30) é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} xy + \dfrac{(3x-y)y}{x^2+y^2} + yx - \dfrac{(x+3y)x}{x^2+y^2} = 3y \\ y - \dfrac{x+3y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \tag{31}$$

A primeira equação do sistema (31) pode ser reescrita como

$$2xy + \frac{3xy - y^2 - x^2 - 3xy}{x^2+y^2} = 3y,$$

ou ainda, $2xy - 1 = 3y$. Da segunda equação do sistema (31) obtemos:

$$y(x^2+y^2) - (x+3y) = 0.$$

Portanto, o sistema (30) é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} 2xy - 1 = 3y \\ y(x^2+y^2) - (x+3y) = 0 \end{cases} \tag{32}$$

Isolando x na primeira equação do sistema (32), obtemos:

$$x = \frac{3y+1}{2y}. \tag{33}$$

Substituindo (33) na segunda equação de (32), temos:

$$y\left[\left(\frac{3y+1}{2y}\right)^2 + y^2\right] - \left(\frac{3y+1}{2y}\right) - 3y = 0,$$

ou ainda,

$$y\left[\left(\frac{9y^2+6y+1}{4y^2}\right) + y^2\right] - \frac{3y+1}{2y} - 3y = 0.$$

Assim,

$$\frac{9y^2+6y+1+4y^4-6y-2-12y^2}{4y} = 0$$

e, então,

$$9y^2+6y+1+4y^4-6y-2-12y^2 = 0.$$

Consequentemente,

$$4y^4 - 3y^2 - 1 = 0,$$

cujas raízes reais são $y = 1$ e $y = -1$. Substituindo esses valores de y em (33), obtemos $x = 2$ e $x = 1$, respectivamente. Assim, as soluções do sistema são os pares ordenados $(2, 1)$ e $(1, -1)$.

O exemplo 7 a seguir é aplicação do Teorema 3 e do Corolário 1.

Exemplo 7. Determine o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} xy + xz = -4 \\ yz + yx = -1 \\ zx + zy = -9. \end{cases} \tag{34}$$

Solução. Somando todas as equações do sistema, concluímos que $xy + xz + yz = -7$. Deste modo, adicionado-a no sistema (34), obtemos:

$$\begin{cases} xy + xz + yz = -7 \\ xy + xz = -4 \\ yz + yx = -1 \\ zx + zy = -9. \end{cases} \tag{35}$$

Substituindo a segunda equação pela diferença entre a primeira e segunda equação, a terceira equação pela diferença entre a primeira e a terceira equação, e a quarta pela diferença entre a primeira e quarta equação, obtemos:

$$\begin{cases} yz = -3 \\ xz = -6 \\ xy = 2. \end{cases} \tag{36}$$

Multiplicando as três equações do sistema (36) membro a membro, obtemos $(xyz)^2 = 36$. Deste modo, pelo Teorema 3, o sistema (36) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} (xyz)^2 = 36 \\ yz = -3 \\ xz = -6 \\ xy = 2. \end{cases} \tag{37}$$

Logo,

$$\begin{cases} xyz = 6 \\ yz = -3 \\ xz = -6 \\ xy = 2 \end{cases} \tag{38}$$

ou

$$\begin{cases} xyz = -6 \\ yz = -3 \\ xz = -6 \\ xy = 2. \end{cases} \tag{39}$$

Pelo Corolário 1, podemos dividir sucessivamente a primeira equação do sistema (38) pela segunda, terceira e quarta equações, obtendo $x = -2$, $y = -1$ e $z = 3$. De forma análoga, utilizando o sistema (39), encontramos $x = 2$, $y = 1$ e $z = -3$.

Portanto, como os sistemas (38) e (39) são equivalentes ao sistema (34), as soluções do sistema (34) são: $(-2, -1, 3)$ e $(2, 1, -3)$.

O exemplo 8 em seguida é aplicação do Corolário 2.

Exemplo 8. Resolva o sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 10 \\ x^3 + y^3 - z^3 = 62. \end{cases} \tag{40}$$

Solução. O sistema (40) pode ser reescrito da seguinte forma equivalente:

$$\begin{cases} x + y = 2 + z \\ x^2 + y^2 = 10 + z^2 \\ x^3 + y^3 = 62 + z^3. \end{cases} \tag{41}$$

Elevando ambos os membros da primeira equação do sistema (41) ao quadrado, obtemos:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 4 + 4z + z^2. \tag{42}$$

Substituindo a segunda equação do sistema (41) em (42), obtemos:

$$10 + z^2 + 2xy = 4 + 4z + z^2,$$

ou ainda,

$$xy = 2z - 3. \tag{43}$$

Em seguida, eleve a primeira equação do sistema (41) ao cubo, obtendo:

$$x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = (2 + z)^3.$$

Então, substituindo na equação acima a equação (43) e a primeira e terceira equação de (41), obtemos:

$$62 + z^3 + 3(2z - 3)(2 + z) = (2 + z)^3.$$

Assim, concluímos que $z = 4$. Substituindo $z = 4$ na primeira equação do sistema (41) e na equação (43), obtemos:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 5 \end{cases}$$

que tem como solução $x = 1$ e $y = 5$ ou $x = 5$ e $y = 1$. Ao verificar as soluções encontradas, vemos que ambas satisfazem o sistema (40). Portanto, o sistema de equações não linear (40) admite duas soluções, a dizer $(1, 5, 4)$ e $(5, 1, 4)$.

4.1. Método da Fatoração

Quando uma das equações homogênea do sistema é dada por um produto de funções, o sistema em questão é equivalente a um determinado conjunto de sistemas, em geral, mais simples de se resolver.

Teorema 4. *Se as funções* $f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots, f_n(x, y)$ *e* $\phi(x, y)$ *são definidas em um conjunto* $X \subset \mathbb{R}^2$*, então, neste conjunto, o sistema de equações*

$$\begin{cases} f_1(x, y).f_2(x, y)\ldots f_n(x, y) = 0, \\ \phi(x, y) = 0 \end{cases} \tag{44}$$

é equivalente ao seguinte conjunto de sistemas de equações

$$\begin{cases} f_1(x,y)=0 \\ \phi(x,y)=0 \end{cases} ; \begin{cases} f_2(x,y)=0 \\ \phi(x,y)=0 \end{cases} ; \quad \dots \quad ; \begin{cases} f_n(x,y)=0 \\ \phi(x,y)=0. \end{cases} \tag{45}$$

Isto é, uma solução do sistema (44) também é solução de pelo menos um dos sistemas contidos em (45), e uma solução de qualquer um dos sistemas contidos em (45) é também solução do sistema (44).

Demonstração. Suponha que o par ordenado (a,b) seja solução do sistema de equações (44). Então, $f_1(a,b).f_2(a,b)...f_n(a,b) = 0$ e $\phi(a,b) = 0$. Logo, existe $k \in \{1,2,\dots,n\}$ tal que $f_k(a,b) = 0$ e $\phi(a,b) = 0$. Portanto, o par (a,b) pertence ao conjunto de sistemas de equações (45).
Reciprocamente, suponha que o par ordenado (a,b) satisfaça o conjunto de sistemas de equações (45). Então, existe $k \in \{1,2,\dots,n\}$ tal que $f_k(a,b) = 0$ e $\phi(a,b) = 0$. Assim,

$$f_1(a,b).f_2(a,b)...f_n(a,b) = 0 \text{ e } \phi(a,b) = 0.$$

Portanto, o par ordenado (a,b) é também solução do sistema de equações (44). □

Corolário 3. *Se as funções* $f_1(x,y),\dots,f_n(x,y)$ *e* $\phi_1(x,y),\dots,\phi_m(x,y)$ *são definidas em um conjunto* $X \subset \mathbb{R}^2$*, então, neste conjunto, o sistema de equações*

$$\begin{cases} f_1(x,y)\cdot f_2(x,y)\cdot \dots \cdot f_n(x,y) = 0 \\ \phi_1(x,y)\cdot \phi_2(x,y)\cdot \dots \cdot \phi_m(x,y) = 0 \end{cases} \tag{46}$$

é equivalente ao seguinte conjunto de sistemas de equações

$$\begin{cases} f_k(x,y)=0 \\ \phi_l(x,y)=0, \end{cases} \tag{47}$$

onde $1 \le k \le n$ *e* $1 \le l \le m$.

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 4 repetidamente. □

O exemplo 9 é uma aplicação do Teorema 4.

Exemplo 9. Resolva, em $\mathbb{R}$, o sistema de equações:

$$\begin{cases} x + yz = 6 \\ y + xz = 6 \\ z + xy = 6. \end{cases} \tag{48}$$

Solução. Subtraindo a segunda equação pela primeira e a terceira equação pela primeira, obtemos, respectivamente, $y - x - yz + xz = 0$ e $z - x - yz + xy = 0$. Assim,

$$(y-x)(1-z) = 0 \;\text{ e }\; (z-x)(1-y) = 0.$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} x + yz = 6 \\ (y-x)(1-z) = 0 \\ (z-x)(1-y) = 0. \end{cases}$$

Desse modo, pelo Teorema 4, o sistema prévio é equivalente a seguinte coleção de sistemas

$$\begin{cases} x + yz = 6 \\ y - x = 0 \\ z - x = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x + yz = 6 \\ y - x = 0 \\ 1 - y = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x + yz = 6 \\ 1 - z = 0 \\ z - x = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x + yz = 6 \\ 1 - z = 0 \\ 1 - y = 0. \end{cases}$$

É fácil ver que o primeiro sistema tem como soluções $(2,2,2)$ e $(-3,-3,-3)$; o segundo sistema tem como solução $(1,1,5)$; o terceiro sistema tem como solução $(1,5,1)$ e o quarto sistema tem como solução $(5,1,1)$.

Como o conjunto de sistemas acima é equivalente ao sistema (48), as soluções do sistema (48) são:

$$(2,2,2), (-3,-3,-3), (1,1,5), (1,5,1), (5,1,1).$$

4.2. Sistemas Homogêneos

Uma equação é dita ser homogênea de grau n nas incógnitas x e y quando todos os termos da equação apresentam produtos de x e y com expoentes que variam de 0 até n, e a soma dos expoentes de cada termo é constantemente igual a n. A forma geral de uma equação homogênea de grau n é expressa da seguinte maneira:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y^1 + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = c$$

Exemplo 10. $-2x^2 + 4xy + 3y^2 = 0$ e $x^3 - 3x^2y + 4xy^2 - 2y^3 = -1$ são exemplos de equações homogêneas de grau 2 e 3, respectivamente.

Definição 4. Um sistema de duas equações e duas variáveis da forma

$$\begin{cases} a_0x^n + a_1x^{n-1}y^1 + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = c \\ b_0x^n + b_1x^{n-1}y^1 + b_2x^{n-2}y^2 + \ldots + b_{n-1}xy^{n-1} + b_ny^n = d \end{cases}$$

é chamado de sistema homogêneo de grau n.

Para resolver um sistema homogêneo com duas equações e duas variáveis é fundamental observar os valores dos termos independentes localizados do lado direito de cada equação. Isso ocorre porque o valor desses termos determina a estratégia a ser adotada na resolução. Neste contexto, analisamos os três casos possíveis: **a)** apenas um dos dois termos independentes é nulo (conf. exemplo 11); **b)** os dois termos independentes são nulos (conf. exemplo 12) e **c)** os dois termos indepentes são não nulos (conf. exemplo 13).

Exemplo 11. Resolva o sistema em $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 10x^2 + xy - 3y^2 = 0 \\ 3x^2 - 2xy + y^2 = 3. \end{cases} \tag{49}$$

Solucão: Primeiramente, observe que o par ordenado $(0,0)$ não é solução do sistema. Vamos dividir por y^2 a equação cujo o termo independente é nulo. Assim, temos:

$$\frac{10x^2}{y^2} + \frac{xy}{y^2} - \frac{3y^2}{y^2} = \frac{0}{y^2},$$

ou ainda,

$$10\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} - 3 = 0.$$

Fazendo $\dfrac{x}{y} = u$, obtemos $10u^2 + u - 3 = 0$, cujas raízes são $u_1 = \dfrac{1}{2}$ e $u_2 = -\dfrac{3}{5}$. Logo,

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2} \text{ e, então, } x = \frac{y}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{y} = -\frac{3}{5} \text{ e, então, } x = -\frac{3}{5}y.$$

Nesse sentido, o sistema (49) é equivalente ao seguinte conjunto de sistemas

$$\begin{cases} x = \dfrac{y}{2} \\ 3x^2 - 2xy + y^2 = 3 \end{cases} \tag{50}$$

e

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{5}y \\ 3x^2 - 2xy + y^2 = 3. \end{cases} \tag{51}$$

Então, utilizando o método da substituição, observamos que o sistema (50) possui como soluções os pares ordenados $(1,2)$ e $(-1,-2)$ e o sistema (51) possui como soluções os pares ordenados $(-3\sqrt{246}/82,\ 5\sqrt{246}/82)$ e $(3\sqrt{246}/82,\ -5\sqrt{246}/82)$. Portanto, as soluções do sistema (49) são os seguintes pares ordenados

$$(1,2),\ (-1,-2),\ (-3\sqrt{246}/82,\ 5\sqrt{246}/82) \ \text{ e } \ (3\sqrt{246}/82,\ -5\sqrt{246}/82).$$

No exemplo seguinte, ambos os termos independentes são nulos.

Exemplo 12. Resolva o sistema em $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 6x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ 3x^2 - xy - 2y^2 = 0. \end{cases} \tag{52}$$

Solução. Note que o par ordenado $(0,0)$ é solução do sistema. Além disso, note que, se $x = 0$, então $y = 0$ e que, se $y = 0$, então $x = 0$. Assim, suponha que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Divida ambos os membros das equações do sistema por y^2 (poderia ser x^2). Assim, o sistema (52) passa a ser:

$$\begin{cases} 6\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + \dfrac{x}{y} - 2 = 0 \\ 3\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - \dfrac{x}{y} - 2 = 0. \end{cases}$$

Fazendo $\dfrac{x}{y} = u$, obtemos:

$$\begin{cases} 6u^2 + u - 2 = 0 \\ 3u^2 - u - 2 = 0. \end{cases}$$

Da primeira equação, obtemos $u = -2/3$ ou $u = 1/2$ e, da segunda equação, obtemos $u = -2/3$ ou $u = 1$. Assim, concluímos que $u = -2/3$. Logo, desde que, $\frac{x}{y} = u$, obtemos

$$\frac{x}{y} = -\frac{2}{3}.$$

Fazendo $y = t$, obtemos $x = -\frac{2}{3}t$. Portanto, as soluções do sistema (52) são da forma

$$(-\frac{2}{3}t, t), \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

No exemplo seguinte, ambos os termos independentes são não nulos.

Exemplo 13. Resolva o sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy = 160 \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 8. \end{cases} \tag{53}$$

Solução. Observe que $(x, y) \neq (0, 0)$ e que primeira equação é homogênea com $a_2 = 0$, isto é, com o coeficiente de y^2 igual a 0 na primeira equação. Multiplicando ambos os membros da segunda equação por (-20) e somando com a primeira equação, obtemos $-17x^2 + 58xy + 40y^2 = 0$. Assim, o sistema (53) é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy = 160 \\ -17x^2 + 58xy + 40y^2 = 0. \end{cases} \tag{54}$$

Portanto, a resolução do sistema prévio segue, de forma análoga, a resolução do exemplo 11. Logo, as soluções do sistema (53) são:

$$(-8, -2), (8, 2), \left(-5, \frac{17}{2}\right) \text{ e } \left(5, -\frac{17}{2}\right).$$

5. Aplicações

Neste capítulo, exploramos 3(três) aplicações acessíveis e relevantes de sistemas de equações não-lineares para estudantes do Ensino Médio, destacando como esses modelos matemáticos são fundamentais para compreender e resolver problemas do dia a dia, fornecendo aos alunos uma base sólida para sua educação matemática e além dela.

Ao abordar a resolução das aplicações é aconselhável seguir as seguintes orientações:

1. Represente as grandezas desconhecidas do problema por meio de incógnitas, tais como x, y, z, etc.

2. Formule um sistema de equações utilizando as incógnitas e as quantidades conhecidas das condições do problema.

3. Resolva o sistema de equações.

4. Avalie se as soluções encontradas satisfazem as condições do problema.

O problema a seguir foi retirado da prova da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) no ano de 2023.

Problema 1. Elisa cortou 4 quadrados iguais dos cantos de um cartão retangular para montar uma caixa sem tampa. As faces laterais da caixa têm áreas $24\ \mathrm{cm}^2$ ou $28\ \mathrm{cm}^2$, conforme a figura. O volume da caixa é $168\ \mathrm{cm}^3$. Qual era a área do cartão antes de ser cortado?

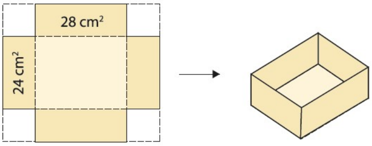

Figura 1: Caixa Formato Paralelepípedo

Solução. Denote por x, y, z as dimensões da caixa, ilustradas na seguinte figura.

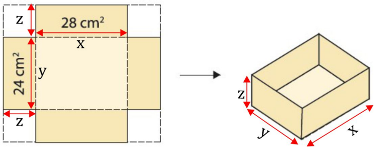

Figura 2: Caixa com as Dimensões Indicadas

Com isso, o volume da caixa é dado por

$$xyz = 168$$

e as áreas laterais são dadas por

$$xz = 28 \quad \mathrm{e} \quad yz = 24.$$

Neste sentido, desejamos encontrar os valores de x, y e z que satisfazem o seguinte sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} xyz = 168 \\ xz = 28 \\ yz = 24. \end{cases} \tag{55}$$

Dividindo a primeira equação do sistema (55) pela segunda e terceira equação do mesmo, obtemos, respectivamente,

$$\frac{xyz}{xz} = \frac{168}{28} \quad \mathrm{e,} \quad \mathrm{assim,} \quad y = 6$$

e

$$\frac{xyz}{yz} = \frac{168}{24} \quad \mathrm{e,} \quad \mathrm{assim,} \quad x = 7.$$

Substituindo esses valores de x e y na primeira equação do sistema (55), obtemos

$$7 \cdot 6 \cdot z = 168 \quad \mathrm{e,} \quad \mathrm{assim,} \quad z = 4.$$

Logo, a terna ordenada $(x, y, z) = (7, 6, 4)$ é a solução do sistema (55). Portanto, de acordo com a Figura 2, a área do cartão antes de ser cortado é dada por:

$$A = (x + 2z).(y + 2z) = 15 \cdot 14 = 210 \text{ cm}^2.$$

O problema a seguir foi retirado da prova da Olimpíada de Matemática do Estado do Pará do ano de 2008.

Problema 2. Dois irmãos escrevem suas idades, uma a seguir à outra e obtêm um número com 4 algarismos que é exatamente o quadrado da idade do seu pai. Nove anos mais tarde voltam a escrever as suas idades, pela mesma ordem, obtendo novamente um número com 4 algarismos que é o quadrado da idade do seu pai. Qual era a diferença das idade dos irmãos na primeira situação?

Solução. Sejam x e y as idades dos dois irmãos e z a idade do pai no primeiro momento descrito no enunciado. Desde que, as idades inscritas de forma consecutiva formam um número com 4 algarismos, as idades dos dois irmãos (x e y) devem ter dois algarismos cada uma, caso contrário, um irmão teria 100 anos ou mais e o outro menos de 10 anos, fato impossível de ocorrer. Sendo assim, escrevendo os números de forma consecutiva, sendo primeiro x e depois y, obtemos um número na forma: $100x + y$.

Portanto, de acordo com as informações do problema, as idades dos irmãos e do pai, na primeira situação, devem satisfazer o seguinte sistema de equações não-linear.

$$\begin{cases} 100x + y = z^2 \\ 100(x + 9) + (y + 9) = (z + 9)^2. \end{cases} \tag{56}$$

Da segunda equação, obtemos

$$100x + y + 909 = z^2 + 18z + 81. \tag{57}$$

Assim, substituindo a primeira equação do sistema (56) em (57), obtemos

$$z^2 + 909 = z^2 + 18z + 81,$$

ou ainda,

$$909 = 18z + 81.$$

Dai, $z = 46$ e, portanto, $z^2 = 2116$. Desse modo, como as idades dos filhos têm dois algarismos cada, uma idade seguida da outra coincide com a idade do pai ao quadrado (2116), as idades dos filhos no primeiro momento devem ser $x = 21$ e $y = 16$ e, portanto, a diferença entre as idades dos irmãos é de 5 anos.

O problema a seguir foi retirado de [4].

Problema 3. Dois tubos de diâmetros diferentes fornecem água para um tanque. No primeiro dia, ambos os tubos, trabalhando simultaneamente, forneceram 14 m³ de água. No segundo dia, apenas o tubo menor foi colocado em uso. Ele forneceu mais 14 m³ de água, mas operou por 5 horas a mais do que no primeiro dia. No terceiro dia, a operação dos tubos durou tanto quanto no segundo dia, mas inicialmente ambos os tubos foram colocados em uso e forneceram 21 m³ de água e depois apenas o tubo maior continuou operando e forneceu mais 20 m³ de água. Quanta água cada tubo fornece por hora?

Solução. Denote por x e y a vazão, em m^3/h, do tubo maior e do tudo menor, respectivamente, e por t o tempo de operação de ambos os turbos no primeiro dia. Note que x, y e t são números reais positivos. Como, no primeiro dia, ambos trabalham juntos e totalizaram 14 m^3 de água, temos:

$$(x + y)t = 14. \tag{58}$$

No segundo dia, somente o tubo menor foi utilizado, levando 5 horas a mais que no dia anterior para fornecer 14 m^3. Assim,

$$y(t + 5) = 14. \tag{59}$$

No primeiro momento do terceiro dia, os dois tubos funcionam simultaneamente e forneceram $21\ \mathrm{m}^3$ de água; portanto, o seu tempo de operação durou $\dfrac{21}{x+y}$ horas. No segundo momento do terceiro dia, somente o turbo maior continuou funcionando, fornecendo mais $20\ \mathrm{m}^3$ de água; portanto, o seu tempo de operação durou $\dfrac{20}{x}$. Desde que a operação dos tubos no terceiro dia tenha durando a mesma quantidade de tempo em relação ao segundo dia, isto é $t+5$ horas, obtemos:

$$\frac{21}{x+y}+\frac{20}{x}=t+5. \tag{60}$$

Portanto, as equações (58), (59) e (60), nos fornece o seguinte sistema de equações não linear (com $x \neq 0$ e $x+y \neq 0$):

$$\begin{cases} (x+y)t = 14 \\ y(t+5) = 14 \\ \dfrac{21}{x+y}+\dfrac{20}{x} = t+5. \end{cases} \tag{61}$$

Da segunda equação de (61), obtemos:

$$t=\frac{14}{y}-5. \tag{62}$$

Assim, substituindo (62) na primeira e terceira equação de (61), obtemos

$$\frac{14}{x+y}=\frac{14}{y}-5$$

e

$$\frac{21}{x+y}+\frac{20}{x}=\frac{14}{y},$$

respectivamente. Assim, o sistema (61) passa a ser:

$$\begin{cases} \dfrac{14}{x+y} = \dfrac{14}{y}-5 \\ \dfrac{21}{x+y}+\dfrac{20}{x} = \dfrac{14}{y}. \end{cases} \tag{63}$$

Tirando o mínimo múltiplo comum nas duas equações do sistema (63), obtemos

$$\begin{cases} 5xy+5y^2 = 14x \\ 14x^2-27xy-20y^2 = 0. \end{cases} \tag{64}$$

Lembre que x, y e z são números positivos e não nulos. Dividindo a segunda equação do sistema (64) por y^2, obtemos:

$$14\left(\frac{x}{y}\right)^2-27\left(\frac{x}{y}\right)-20=0.$$

Assim,

$$\frac{x}{y}=\frac{5}{2} \ \text{ ou } \ \frac{x}{y}=-\frac{4}{7}.$$

Desde que x e y são números positivos, a única opção é

$$\frac{x}{y}=\frac{5}{2}.$$

Assim, o sistema (64) passa a ser:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{2} \\ 5xy + 5y^2 = 14x \end{cases}$$

que tem como solução (pelo método da substituição) $x = 5$ e $y = 2$. Portanto, o tubo maior forneceu $5\ m^3/h$ e o tubo menor forneceu $2\ m^3/h$.

6. Considerações finais

A resolução de sistemas de equações não-lineares não é uma tarefa trivial, exigindo um domínio sólido da Matemática do Ensino Médio, combinado com uma boa dose de criatividade. Neste trabalho, apresentamos métodos analíticos e teoremas para a resolução desses sistemas, que são de grande valia para estudantes neste nível. Nosso objetivo foi preencher uma lacuna notável nos materiais didáticos disponíveis dedicados a esse tema. Essas abordagens serão extremamente úteis na preparação dos estudantes para desafios matemáticos complexos, como olimpíadas, vestibulares militares e outras competições, destacando a utilidade imediata e a relevância prática do conteúdo explorado. O uso desses métodos no Ensino Médio não só amplia a compreensão dos alunos sobre conceitos matemáticos avançados, mas também desenvolve habilidades essenciais como o pensamento crítico, a resolução de problemas e a capacidade de abstração. As aplicações apresentadas mostram que os sistemas de equações não lineares podem ser uma ferramenta poderosa para a modelagem de fenômenos complexos, reforçando a relevância desse tema no currículo escolar. Como trabalho futuro, propomos a investigação de métodos numéricos que possam ser aplicados no Ensino Médio para a resolução de sistemas de equações não lineares que não possuem soluções analíticas viáveis. A introdução de métodos numéricos pode abrir novas possibilidades de ensino e aprendizado, permitindo que os alunos explorem problemas mais complexos e que se aproximam mais da realidade, além de familiarizá-los com abordagens computacionais modernas, amplamente utilizadas em diversas áreas da ciência e engenharia.

Referências

[1] Dante, L. R. *Matemática: Contexto e Aplicações - Vol. 2*, 2 ed. Ática, São Paulo, 2013.

[2] Iezzi, G., et al. *Ciências e Aplicações*, 8 ed. Atual, São Paulo, 2014.

[3] Lima, E. L. Sobre o ensino de sistemas lineares. *Revista do Professor de Matemática - Vol. 23* (1990).

[4] Litvinenko, V.N.; Mordkovich, A. *Solving Problems in Algebra and Trigonometry*, 1 ed. Mir Publishers, Moscou, 1987.

[5] Marco, A. S. d. A. Metodos de resolução de sistemas lineares. *Dissertação PROFMAT-São Luis-MA* (2021).

[6] Oliveira, L. M. V. Sistemas de equações não lineares no ensino médio: Um estudo significativo. *Dissertação PROFMAT-Palmas-TO* (2024).

[7] Oliveira, M. *Elementos da Matemática - Volume 0*, 2 ed. Vestseller, Fortaleza, 2020.

[8] Vilenkin, N. Y., et al. *Álgebra e análise matemática para o 11º ano.*, 18 ed. Mnemozina, Moscou, 2014.

Mirray Victor Lima Oliveira
SEMED - Secretaria Municipal de Educação - Imperatriz-MA
<mirraywictor@hotmail.com>

Rogério Azevedo Rocha
UFT - Universidade Federal do Tocantins
<azevedo@uft.edu.br>

Recebido: 16/09/2024
Publicado: 31/03/2025