

# Métodos de Aproximação de Áreas e Volumes

Márcio Batista<sup>1</sup> 

Yúdi Oliveira<sup>2</sup> 

## Resumo

Neste artigo tratamos de técnicas numéricas para estimar áreas e volumes em situações complexas, onde métodos analíticos não são aplicáveis. Ressaltamos o papel do cálculo numérico, que utiliza abordagens matemáticas e computacionais, na determinação eficiente de áreas e volumes, especialmente em geometrias complexas. Além disso, pontuamos a relação dessas técnicas com o ensino de áreas e volumes na Educação Básica, conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Apresentamos métodos específicos, como as regras dos retângulos, trapézios, de Simpson, seção transversal e cascas cilíndricas, e instigamos a investigação e comparação dessas abordagens para orientar sua aplicação em diferentes contextos.

**Palavras-chave:** Cálculo numérico; Estimativa de áreas e volumes; Métodos numéricos; BNCC.

## Abstract

In this article, we address numerical techniques for estimating areas and volumes in complex situations where analytical methods are not applicable. We emphasize the role of numerical calculus, which leverages mathematical and computational approaches, in efficiently determining areas and volumes, particularly in complex geometries. Additionally, we highlight the connection between these techniques and the teaching of areas and volumes in Basic Education, in alignment with the National Common Curricular Base (BNCC). Finally, we present specific methods, such as the rectangle rule, trapezium rule, Simpson's rule, cross-sections, and cylindrical shells, and encourage the investigation and comparison of these approaches to guide their application in various contexts.

**Keywords:** Numerical calculus; Estimation of areas and volumes; Numerical methods, BNCC.

## 1. Introdução

O texto destaca a importância das técnicas numéricas e da estimativa aproximada de extensões e capacidades em várias áreas da ciência e engenharia. Essas técnicas são essenciais para compreender e modelar fenômenos complexos, especialmente quando métodos analíticos precisos são impraticáveis devido à complexidade das equações ou à natureza incompreensível das questões. A análise numérica, usando abordagens matemáticas e computacionais, desempenha um papel crucial na determinação eficiente de áreas e volumes, especialmente em geometrias complexas, como máquinas elaboradas, regiões geográficas complexas ou moléculas em sistemas biológicos. O uso de cálculos aproximados, dividindo formas complexas em partes

<sup>1</sup>Parcialmente apoiado pelo CNPq [Grants: 308440/2021-8, 405468/2021-0, 402563/2023-9] e FAPESP [Grant: E:60030.0000001758/2022].

<sup>2</sup>Parcialmente apoiado pelo CAPES [Código de Financiamento 001].

menores e calculando áreas ou volumes por meio da soma dessas partes, é mais viável computacionalmente do que soluções analíticas, tornando-se uma abordagem prática para problemas complexos. Essas técnicas têm aplicações em várias disciplinas científicas, incluindo engenharia civil, física, biologia e geografia. O texto conclui destacando a importância dessas ferramentas matemáticas e computacionais na abordagem de desafios complexos e irregulares, ao mesmo tempo que lança luz sobre esse tema que pode ser conhecido entre estudantes e professores do Ensino Básico. Enfim, o objetivo é investigar e comparar métodos numéricos para calcular áreas e volumes em formas geométricas complexas, contribuindo para a escolha adequada desses métodos em diferentes contextos aplicados.

## 2. Áreas e Volumes na BNCC

O ensino sobre áreas e volumes é delineado por documentos desde as séries iniciais do Ensino Fundamental (ver [1]), e assim persiste ao longo de toda a trajetória do estudante pela Educação Básica. Segundo o supracitado documento, temos que:

*A Base Nacional Comum Curricular é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). (BRASIL, 2018, p. 7)*

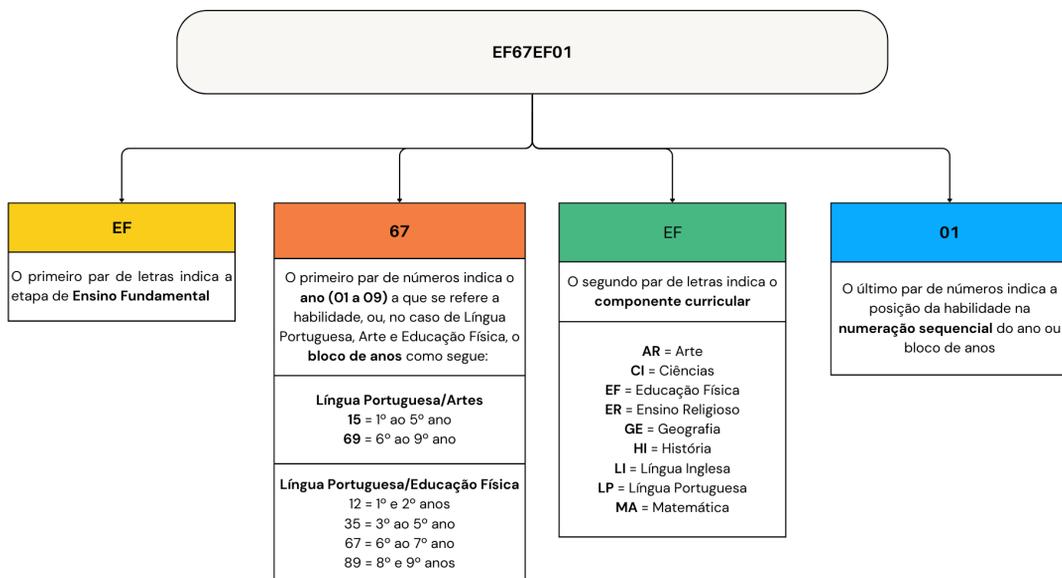
Já sobre competências e habilidades, a BNCC descreve:

*Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p. 8)*

Dessa forma, procuramos, dentre esse conjunto de habilidades, aquelas que estão associadas ao aprendizado de áreas e volumes na Educação Básica. Na BNCC, as habilidades são apresentadas por meio de códigos alfanuméricos. Esses códigos, conforme é mostrado na Figura 1, indicam a etapa escolar, o ano ou bloco de anos a que se refere a habilidade, o componente curricular e a posição da habilidade na numeração sequencial do ano ou bloco de anos. Então, por exemplo, o código EF07MA01 é referente a disciplina de matemática, no 7º ano do Ensino Fundamental e a habilidade 01: “Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos”.

O ensino de áreas no Ensino Fundamental inicia no 3º ano, abordando a comparação de áreas por superposição. Os objetivos incluem a habilidade de comparar visualmente ou por superposição áreas de objetos, figuras planas ou desenhos. No 4º ano, a ênfase é nas áreas de figuras em malhas quadriculadas, com a habilidade de medir, comparar e estimar áreas. No 5º ano, explora-se a relação entre áreas e perímetros de figuras poligonais, introduzindo a noção de volume. As habilidades incluem resolver problemas envolvendo medidas, como áreas, e reconhecer que figuras com perímetros iguais podem ter áreas diferentes. No 6º ano, são aplicados problemas sobre medidas, incluindo área e volume, sem o uso de fórmulas sempre que possível. O 7º ano aborda a equivalência de áreas, cálculo de áreas decompostas e volume de blocos retangulares. No 8º ano, são enfatizados problemas envolvendo medidas de área de figuras geométricas e cálculo de volume de recipientes em forma de bloco retangular. No 9º ano, a atenção se volta para a resolução de problemas relacionados à medidas de volume de prismas e cilindros retos.

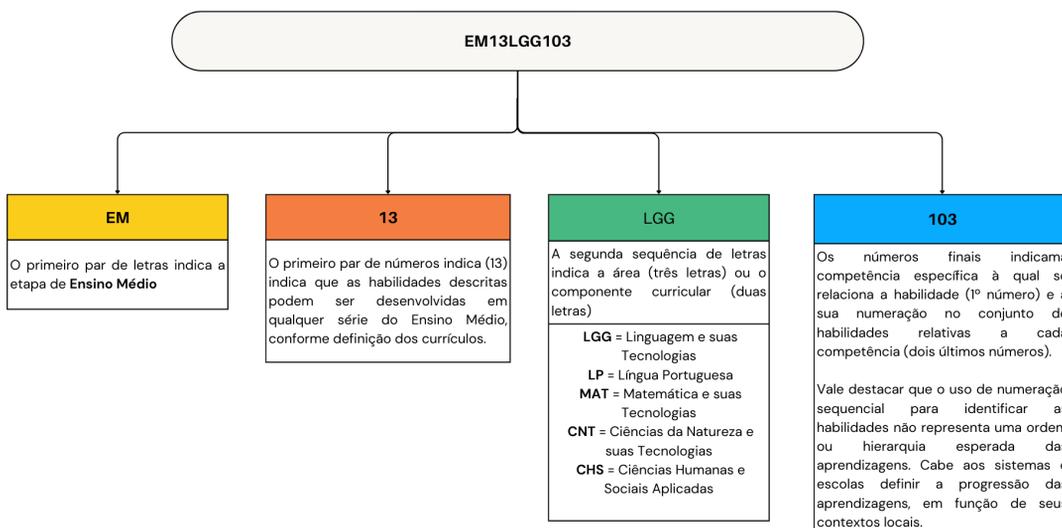
Figura 1: Código alfanumérico da BNCC - Ensino Fundamental



Fonte: Elaborado pelos autores com base na referência [1]

Quanto ao Ensino Médio, cada habilidade é identificada por um código alfanumérico explicado na Figura 2 a seguir.

Figura 2: Código alfanumérico da BNCC - Ensino Médio



Fonte: Elaborado pelos autores com base na referência [1]

Nessa etapa de ensino, as habilidades voltadas ao estudo de áreas e volumes, conforme descrito na BNCC, são:

- **EM13MAT307:** “Empregar diferentes métodos para calcular a área de uma superfície (...) e deduzir expressões para aplicar em situações reais (...).”
- **EM13MAT309:** “Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo de áreas totais e volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais (...).”
- **EM13MAT506:** “Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.”
- **EM13MAT509:** “Investigar a deformação de ângulos e áreas causada pelas diferentes projeções usadas em cartografia, como a cilíndrica e a cônica.”
- **EM13MAT201:** “Propor ações comunitárias, como as voltadas aos locais de moradia dos estudantes, envolvendo cálculos de áreas, volumes, capacidade ou massa, adequados às demandas da região.”
- **EM13MAT309:** “Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo de áreas totais e volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos formados por esses sólidos.”
- **EM13MAT504:** “Investigar processos de obtenção do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para deduzir as fórmulas dessas medidas.”

Desde o 3º ano do Ensino Fundamental, inicia-se o estudo das áreas, com o aprofundamento no cálculo de volumes no 5º ano. As habilidades se desenvolvem progressivamente, abordando a comparação de áreas, medição em malhas quadriculadas, relações entre áreas e perímetros, além da introdução ao conceito de volume. No Ensino Médio, as habilidades se expandem para incluir diferentes métodos de cálculo de áreas, resolução de problemas envolvendo volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos, representação gráfica de variações e estudo das deformações em projeções cartográficas.

Em resumo, a BNCC oferece um guia estruturado para o ensino de áreas e volumes, com uma abordagem progressiva e integrada ao longo da Educação Básica, capacitando os estudantes a aplicar esses conceitos em situações reais e a desenvolver habilidades essenciais para sua formação.

### 3. Conceitos Básicos

A análise numérica para cálculos de áreas e volumes utiliza conceitos matemáticos e computacionais essenciais para lidar com formas complexas. A integral definida desempenha um papel central ao relacionar funções contínuas com áreas e volumes. Métodos como a regra dos trapézios e a regra de Simpson aproximam esses cálculos subdividindo a região em pequenas partes. No contexto tridimensional, esses métodos permitem representar formas complexas de maneira precisa. Aspectos como a discretização da região, a estabilidade em relação a variações nos dados e a escolha do número de subintervalos são cruciais para garantir resultados confiáveis. Assim, dominar esses conceitos é fundamental para aplicações científicas e práticas, promovendo maior precisão e eficiência nos cálculos. Ver [5], [3], [8] e [2] para mais detalhes e explicações sobre os métodos que apresentaremos a seguir.

### 3.1. Métodos de Cálculos de Áreas

Vamos explorar métodos essenciais para o cálculo de áreas sob curvas, fundamentais na matemática aplicada. O método dos retângulos, o método dos trapézios e a regra de Simpson são técnicas valiosas para estimar áreas sob curvas complexas. Cada método oferece uma abordagem única para resolver problemas geométricos, sendo amplamente utilizados em campos como a física e a engenharia. Daqui em diante,  $f$  denotará uma função contínua e não negativa definida em  $[a, b]$ , ou seja, uma função cujo gráfico não possui saltos ou quebras e está localizada acima do eixo- $x$ . Em tempo, não adentraremos em estimativas de precisão por se tratar de um tema mais técnico que foge do escopo deste texto.

#### 3.1.1 Método dos Retângulos

Também chamado de Método da Soma de Riemann ou Método dos Retângulos é uma técnica numérica utilizada para aproximar a área sob o gráfico de  $f$ . A ideia consiste em subdividir a região sob a curva em retângulos igualmente espaçados e somar suas áreas para estimar a área total. Quanto maior o número de subintervalos, melhor será a precisão da estimativa.

Para calcular a área aproximada, particionamos o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos de largura  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ . Em cada subintervalo escolhemos um ponto  $x_i$ , onde avaliamos  $f(x_i)$ . Os pontos  $x_i$  podem ser tomados na extremidade esquerda, na extremidade direita ou no ponto médio de cada subintervalo, conforme o critério adotado. Aqui,  $x_0 = a$  e  $x_n = b$ .

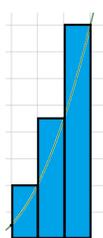
A área de cada retângulo será  $A_i = f(x_i) \cdot \Delta x$  ao tomar a extremidade esquerda (ver Figura 3a), ou  $A_i = f(x_{i+1}) \cdot \Delta x$  ao tomar a extremidade direita (ver Figura 3b).

Figura 3: Aproximação da área sob o gráfico de  $f$  com base em pontos selecionados para a altura

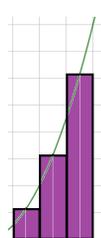
(a) Ponto no extremo esquerdo



(b) Ponto no extremo direito



(c) Ponto médio



Fonte: Elaborada pelos autores

Somando as áreas de todos os retângulos calculados nos casos anteriores e considerando que  $\Delta x$  é constante, uma estimativa da área total sob a curva é dada pelo somatório:

- Para a escolha do ponto na extremidade esquerda:

$$A \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x = \Delta x \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i);$$

- Para a escolha do ponto na extremidade direita:

$$A \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \cdot \Delta x = \Delta x \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1});$$

- Para a escolha do ponto médio do subintervalo:

$$A \approx \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \cdot \Delta x = \Delta x \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right).$$

Em qualquer dos casos, iremos obter uma aproximação para a área desejada. Notamos que a área sob o gráfico coincide com a integral da função no intervalo de integração, isto é,  $A = \int_a^b f(x) dx$ . Em tempo, observe que as fórmulas possuem uma interpretação como uma média, uma vez que o valor de  $\Delta x$  pode ser escolhido como  $\frac{b-a}{n}$ , o que corresponde à subdivisão do intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos de mesmo comprimento. Dessa forma, de maneira geral, pode-se verificar que a área pode ser aproximada por

$$A \approx (b - a) \cdot \frac{f(x_1^*) + \dots + f(x_n^*)}{n},$$

onde  $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$ , para  $i \in \{0, \dots, n - 1\}$ , é escolhido de forma arbitrária.

Essa estratégia faz parte de uma abordagem numérica mais ampla, conhecida como os *Métodos de Monte Carlo*, que possuem uma interpretação relevante em simulações de física estatística. Além disso, são amplamente utilizados na integração de funções com múltiplas variáveis, o qual foge do escopo deste trabalho. Para mais detalhes, ver [4] e suas referências.

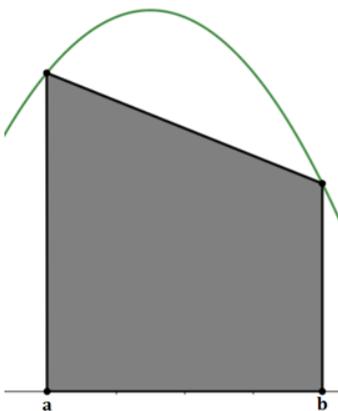
Não aprofundaremos a ideia e propriedades de integral, pois o objetivo deste texto é tratar de estimativas para áreas e volumes, mas recomendamos ao leitor interessado que veja [2] ou [8].

### 3.1.2 Regra dos Trapézios

Nesta técnica, estimamos a área dividindo a região sob a curva em trapézios de mesma altura. Em seguida, somamos as áreas desses trapézios para obter uma aproximação da área. Este método é útil quando a solução analítica é inviável ou muito complexa.

A ideia é aproximar a função  $f$  por um polinômio de grau um. Assim, a área sob o gráfico de  $f$  pode ser estimada pela área de um trapézio.

Figura 4: Aproximação da área sob o gráfico de  $f$  pela área de um trapézio



Fonte: Elaborada pelos autores

Usando uma estratégia conhecida como fórmula de Lagrange, ver [5, p. 114], podemos encontrar um polinômio de primeiro grau,  $p_1(x)$ , que interpola  $f(x)$  nos pontos  $x_0 = a$  e  $x_1 = b$ , a saber,

$$p_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x),$$

onde  $L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}$  e  $L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$ .

Agora tomamos o intervalo  $[a, b]$  e o subdividimos em  $n$  partes iguais. Seja  $h$  o comprimento de cada subintervalo, isto é,  $h = \frac{b-a}{n}$ . Escolhemos  $n = 1$  pois queremos um único trapézio, então temos que  $h = b - a = x_1 - x_0$ , para esse caso específico. Fazendo a substituição em  $p_1(x)$ , ficamos com:

$$p_1(x) = \frac{x-x_1}{-h}f(x_0) + \frac{x-x_0}{h}f(x_1).$$

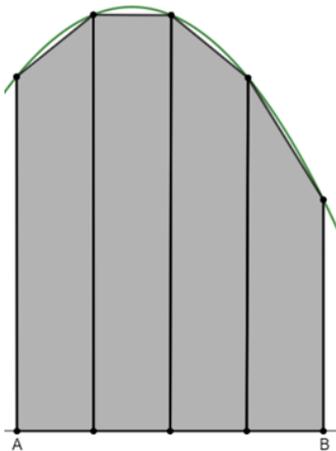
Logo, temos que a área desejada pode ser estimada por:

$$A \approx \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{x-x_1}{-h}f(x_0) + \frac{x-x_0}{h}f(x_1) \right) dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)],$$

onde para essa conclusão usamos a interpretação geométrica de integral, ver [8].

Entretanto, se tomarmos  $n = 1$ , obtemos uma aproximação que pode não ser muito confiável, vide a Figura 4. Porém, tomando o intervalo  $[a, b]$  e aplicando a Regra do Trapézio várias vezes, ou seja, tomando  $n$  suficientemente grande, obtemos uma melhor estimativa, ver explição logo abaixo.

Figura 5: Aproximação da área sob o gráfico de  $f$  pela área de 4 trapézios



Fonte: Elaborada pelos autores

Ao dividirmos o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos de igual comprimento  $h = x_{i+1} - x_i$ , com  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , onde  $x_0 = a$  e  $x_n = b$ . O valor de  $h$  será  $h = \frac{b-a}{n}$ . De maneira direta obtemos cada ponto  $x_i$ . De fato,  $x_i = x_0 + i \cdot h$ . Assim, a área procurada é estimada por:

$$A \approx A_1 + A_2 + \dots + A_n,$$

onde  $A_i$  representa a área de cada trapézio em  $[a, b]$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ , e  $A_i = \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$ .

Como o valor de  $h$  é constante, podemos escrever a área da seguinte forma:

$$A \approx \frac{h}{2} \left[ f(x_0) + f(x_n) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right].$$

### 3.1.3 Regra de Simpson

Outra maneira de encontrar uma estimativa mais precisa para a área sob uma curva é a Regra de Simpson, onde queremos aproximar a função  $f$  por um polinômio de grau mais alto. Por exemplo, se entre  $f(a)$  e  $f(b)$  existirem dois pontos igualmente espaçados, podemos pensar em um polinômio do 2º grau (parábola) como polinômio interpolador; já se tivéssemos dois pontos igualmente espaçados, poderíamos pensar em um polinômio do 3º grau (cúbica) (ver [3]).

Seja  $f$  uma função, e desejamos três pontos que a interpoem por um polinômio de grau dois. Considere os pontos  $a = x_0$ ,  $b = x_2$  e  $x_1$  como o ponto médio do intervalo, ou seja,  $x_1 = x_0 + h$ , onde  $h = \frac{b-a}{2}$ .

Para encontrar o polinômio desejado,  $p_2(x)$ , podemos usar a fórmula de Lagrange, ou seja:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) \\ &= f(x_0) \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1) \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2) \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}. \end{aligned}$$

Como  $a = x_0$ ,  $b = x_2$  e  $x_1 = x_0 + h$ , então podemos estimar a área procurada como:

$$\begin{aligned} A &\approx \int_{x_0}^{x_2} p_2(x) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_2} \left[ f(x_0) \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1) \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2) \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \right] dx. \end{aligned}$$

Após uma simplificação, a qual é desnecessário adentrar aqui, obtemos a expressão que desejávamos:

$$A \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)].$$

A expressão acima é conhecida como Regra  $\frac{1}{3}$  de Simpson, pelo fato que o intervalo foi dividido em três partes iguais. Agora, suponhamos que o intervalo  $[a, b]$  seja dividido em  $2n$  subintervalos e que aplicamos a regra  $n$  vezes, pois, a cada par de subintervalos adjacentes, teremos três pontos para encontrar um polinômio de grau dois interpolador em cada um dos  $2n$  subintervalos de tamanho  $\frac{b-a}{2n}$ .

A cada dois subintervalos calculamos a Regra  $\frac{1}{3}$  de Simpson de tal maneira que seja  $A_i$  a área em cada subintervalo, com  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , então:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)], \\ A_2 &= \frac{h}{3} [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)], \\ &\vdots \\ A_n &= \frac{h}{3} [f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})]. \end{aligned}$$

Resumindo,  $A$  pode ser estimado por:

$$\begin{aligned}
 A &\approx A_1 + A_2 + \cdots + A_n \\
 &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \cdots + \frac{h}{3} [f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})] \\
 &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_4) + \cdots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})] \\
 &= \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + f(x_{2n}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) \right].
 \end{aligned}$$

Agora, caso queiramos aproximar a função  $f$  por um polinômio interpolador de grau três, são necessários quatro pontos para obter tal polinômio. Para determinar esses pontos, dividimos o intervalo  $[a, b]$  em três subintervalos igualmente espaçados. Seja  $h$  o tamanho desse espaçamento, ou seja,  $h = \frac{b-a}{3}$ .

Logo, temos que  $x_0 = a$ ,  $x_1 = a + h$ ,  $x_2 = a + 2h$  e  $x_3 = a + 3h = b$ . Assim, podemos encontrar um polinômio  $p_3(x)$  utilizando a fórmula de Lagrange, de tal forma que a área pretendida pode ser aproximada da seguinte maneira:

$$A \approx \int_a^b p_3(x) dx,$$

e de forma mais explícita,

$$A \approx \frac{3}{8}h[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)], \quad (1)$$

a qual é conhecida como a *Regra  $\frac{3}{8}$  de Simpson*.

Para obter uma maior precisão, como no caso da Regra  $\frac{1}{3}$  de Simpson, devemos dividir o intervalo  $[a, b]$  em  $3n$  subintervalos, pois o número de subdivisões precisa ser múltiplo de 3 para garantir um polinômio interpolador de terceiro grau. Seja  $h$  a largura dos subintervalos, então  $h = \frac{b-a}{3n}$ , com os pontos de divisão dados por  $x_0 = a$  e  $x_{3n} = b$ . Cada subintervalo pode ser representado por  $[x_i, x_{i+3}]$ , com  $i = 0, 3, 6, \dots, 3n - 3$ . Assim, a área pode ser expressa da seguinte maneira:

$$A \approx A_1 + \cdots + A_n,$$

onde  $A_i$  é a estimada usando (1). Assim,

$$\begin{aligned}
 A &\approx \frac{3}{8}h [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] \\
 &+ \frac{3}{8}h [f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + f(x_6)] \\
 &+ \cdots \\
 &+ \frac{3}{8}h [f(x_{3n-3}) + 3f(x_{3n-2}) + 3f(x_{3n-1}) + f(x_{3n})].
 \end{aligned}$$

Em linguagem de somas:

$$A \approx \frac{3}{8}h \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{3k}) + 3f(x_{3k+1}) + 3f(x_{3k+2}) + f(x_{3k+3})].$$

## 3.2. Métodos de Cálculo de Volumens

O cálculo de volumes desempenha um papel fundamental em diversas áreas da matemática, ciências naturais e engenharia. O objetivo é determinar o espaço ocupado por um objeto. Contudo, nem todas as formas e objetos são simples ou fáceis de calcular o volume, o que pode tornar essa tarefa desafiadora. Por isso, existem métodos matemáticos e computacionais utilizados para esse fim.

Serão apresentados dois métodos para calcular volumes: o método da seção transversal e o método da casca cilíndrica. Cada um desses métodos possui características, aplicações e vantagens distintas, permitindo a determinação precisa do volume para diferentes tipos de sólidos.

### 3.2.1 Método da Seção Transversal

Esse método é útil quando temos objetos que possuem seções transversais regulares ou quando conseguimos dividir o sólido em seções com formas definidas. O método baseia-se na ideia de calcular a área de cada seção transversal ao longo de um eixo específico e, em seguida, integrar essas áreas para obter o volume total (ver [8]).

Seja  $S$  um sólido qualquer. Agora, vamos seccionar  $S$  em partes e, para cada parte, iremos aproximar por um cilindro. É possível ter uma ideia do volume de  $S$  somando os volumes dos cilindros.

Vamos, então, “cortar”  $S$  por um plano  $\alpha$  passando por  $x$  e paralelo ao plano  $yOz$ , obtendo assim uma região chamada de seção transversal de  $S$ . Seja, então,  $A(x)$  a área dessa seção transversal de  $S$ , onde a projeção de  $S$  no eixo  $x$  está no intervalo  $[a, b]$ .

Se dividirmos  $S$  em  $n$  “fatias”, espaçadas igualmente, de largura  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ , com  $0 \leq i \leq n$ , onde  $x_0 = a$  e  $x_n = b$ , podemos aproximar cada uma dessas fatias por um cilindro de altura  $h = \Delta x$  e área da base  $A(x'_i)$ , onde  $x'_i \in [x_i, x_{i-1}]$ , que compreende a área da seção transversal de  $S$  que vai de  $x_i$  até  $x_{i-1}$ .

Logo, o volume  $V$  dessa seção transversal de  $S$  pode ser aproximado pela expressão  $V(S_i) \approx A(x'_i) \cdot \Delta x$ . Somando todos os volumes de todas as seções transversais de  $S$ , podemos aproximar, então, o volume  $V$  do sólido por:

$$V \approx \sum_{i=1}^n A(x'_i) \cdot \Delta x. \quad (2)$$

Ao considerarmos o valor de  $n$  muito grande deduzimos que o valor de  $V$  é obtido por:

$$V = \int_a^b A(x) dx,$$

onde  $A(x)$  é a área de uma seção móvel transversal de  $S$ , obtida após fatiar  $S$  por um plano passando em  $x$  e perpendicular ao eixo  $x$ . Assim, conhecendo a função  $A$  explicitamente, podemos utilizar os resultados de aproximação obtidos na Seção 3.1. Ou, se apenas conhecemos seus valores para alguns valores específicos de  $x$ , podemos usar (2).

### 3.2.2 Método das Cascas Cilíndricas

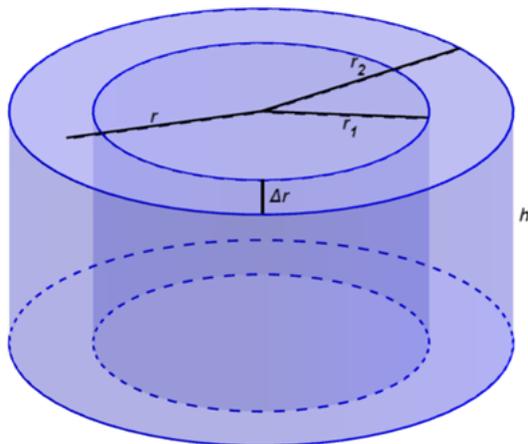
Para determinar o volume de alguns sólidos que possuem uma forma cilíndrica, de arruela, ou que têm simetria em relação a algum eixo, utilizando o método das seções transversais, é bastante complicado. Por isso, o Método das Cascas Cilíndricas é mais fácil para tais situações ([8]).

A figura 6 é um exemplo de uma casca cilíndrica. Nela temos que  $r_1$  é o raio interno,  $r_2$  é o raio externo e  $h$  é a altura. E, também,  $\Delta r = r_2 - r_1$  e  $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ . O volume  $V$  dessa casca cilíndrica pode ser calculado pela diferença do volume  $V_2$  do cilindro externo pelo volume  $V_1$  do cilindro interno:

$$V = V_2 - V_1 = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h = \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h = 2\pi \frac{(r_2 + r_1)}{2}(r_2 - r_1)h = 2\pi \Delta r h.$$

Portanto,  $V = 2\pi \Delta r h$ , onde  $\Delta r$  pode ser entendido como a espessura da casca cilíndrica.

Figura 6: Casca cilíndrica: região entre dois cilindros sólidos

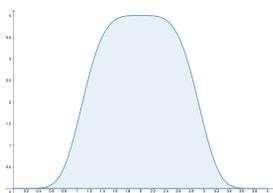


Fonte: Elaborada pelos autores

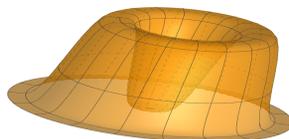
Seja  $S$  um sólido qualquer obtido pela rotação em torno do eixo  $y$  de uma região limitada por  $y = f(x)$ ,  $y = 0$ ,  $x = a$  e  $x = b$ , com  $b > a \geq 0$ , e com  $f(x) \geq 0$ .

Figura 7: Região abaixo do gráfico de  $f$  e sua rotação em torno do eixo- $y$

(a) Região sob o gráfico de  $f$



(b) Figura Rotacionada 3D



Fonte: Elaborada pelos autores

Dividindo o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$  de largura  $\Delta x$ , e seja  $\bar{x}_i$  o ponto médio de cada subintervalo. Quando o retângulo com base  $[x_{i-1}, x_i]$  e altura  $f(\bar{x}_i)$  é girado em torno do eixo  $y$ , obtemos uma casca cilíndrica de raio  $\bar{x}_i$ , espessura  $\Delta x$  e altura  $f(\bar{x}_i)$ . O volume dessa casca é dado por:

$$V_i = (2\pi \bar{x}_i) f(\bar{x}_i) \Delta x.$$

Então podemos estimar o volume do sólido  $S$  por:

$$V \approx \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n 2\pi \bar{x}_i f(\bar{x}_i) \Delta x. \quad (3)$$

Fazendo  $n$  suficientemente grande temos que  $V$  é dado por:

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx.$$

Desta forma, concluímos que o volume  $V$  de um sólido  $S$  obtido pela rotação em torno do eixo  $y$  da região sob  $y = f(x)$ , definida no intervalo  $[a, b]$ , é dado por:

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx,$$

ou estimado por meio do somatório (3).

## 4. Aplicações

Nesta seção, discutiremos algumas aplicações práticas desses métodos em diferentes contextos, destacando sua relevância e utilidade em diversas disciplinas.

### 4.1. Cálculo da Área de um Plano de Flutuação

Em um navio, o chamado plano de flutuação é o plano horizontal que corresponde à superfície em que o casco do navio está flutuando (ver [7] para mais detalhes).

Figura 8: Plano de Flutuação de um Navio



Fonte: Silva em [7]

Vamos calcular a área de um plano de flutuação que foi dividido em seu eixo maior, a abscissa, formando assim dois semi-planos, espaçados igualmente a cada 18 metros. As seguintes ordenadas  $y$  em metros, com igual espaçamento entre elas, são marcadas:

$$y_1 = 1, 3, \quad y_2 = 4, 8, \quad y_3 = 8, 8, \quad y_4 = 12, \quad y_5 = 13, \quad y_6 = 11, \quad y_7 = 10, \quad y_8 = 6, 8, \quad y_9 = 3.$$

Para tal iremos usar a Regra  $\frac{1}{3}$  de Simpson, mas a versão para  $2n$  intervalos. Logo, a área  $A$  do plano de flutuação é estimada por:

$$\begin{aligned} A &\approx \frac{18}{3} (1,3 + 4 \cdot 4,8 + 2 \cdot 8,8 + 4 \cdot 12 + 2 \cdot 13 + 4 \cdot 11 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 6,8 + 3) \\ &= 6 (1,3 + 19,2 + 17,6 + 48 + 26 + 44 + 20 + 27,2 + 3) \\ &= 1254,6 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Como o valor foi calculado para um dos semi-planos formados, a área do plano de flutuação é o dobro desse valor, ou seja, a área total é 2509,2 m<sup>2</sup>.

## 4.2. Volume de um Reservatório de Água

Um reservatório de água está sendo construído em um terreno inclinado, cuja topografia varia ao longo do comprimento do reservatório. Vamos determinar o volume total de água que esse reservatório pode armazenar, utilizando o método das seções transversais.

Dividimos o terreno em várias seções transversais, com intervalos iguais ao longo do comprimento do reservatório, sendo que cada seção é perpendicular ao terreno inclinado.

Cada seção dista uniformemente uma da outra no valor de 2 metros e possuem áreas iguais, dadas por:  $A_1 = 250 \text{ m}^2$ ,  $A_2 = 280 \text{ m}^2$ ,  $A_3 = 320 \text{ m}^2$ ,  $A_4 = 370 \text{ m}^2$ ,  $A_5 = 430 \text{ m}^2$ ,  $A_6 = 500 \text{ m}^2$ .

Pelo método das seções transversais, ver fórmula em (2), o volume  $V$  é aproximado por:

$$V \approx \sum_{i=1}^n A_i \cdot \Delta x = 2 \cdot (250 + 280 + 320 + 370 + 430 + 500) = 4.300 \text{ m}^3.$$

## 4.3. Volume de um Sino Nada Pequeno

Suponhamos que recebemos de presente um sino gigantesco, cujo formato pode ser aproximado por um sólido obtido girando a região limitada pela curva  $y = f(x) = 2 + \sqrt{x}$ , no intervalo  $[0, 4]$ , em torno do eixo  $x$ . Temos que  $0 \leq x \leq 4$  e, pelo método das cascas cilíndricas, o volume é dado por:

$$V = \int_0^4 2\pi x(2 + \sqrt{x}) dx = 2\pi \int_0^4 x(2 + \sqrt{x}) dx$$

e pela Regra  $\frac{3}{8}$  de Simpson é

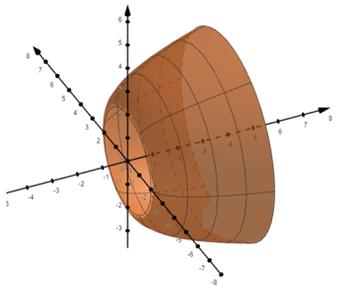
$$V \approx \frac{8}{3} 1,333 [f(0) + 3f(1.333) + 3f(2.666) + f(4)] \approx 181,22$$

Logo, o volume do sino é 181,22 unidades cúbicas.

## 4.4. Fabricação de uma Tubulação Curva para uma Indústria

Uma tubulação curva refere-se a um segmento de um sistema de tubulação que possui uma forma curvada, em vez de reta. As conexões curvas são peças fabricadas em aço carbono, aço inox e ligas leves, e são utilizadas para mudar a direção de uma linha de tubulação. As curvas nas tubulações servem a diversos propósitos, incluindo a alteração da direção do fluxo de fluido, acomodação a restrições espaciais e a otimização do layout do sistema.

Figura 9: Sólido obtido pela rotação em torno do eixo-y da região sob o gráfico de  $f$



Fonte: Elaborada pelos autores

Vamos considerar a situação de calcular o volume de material necessário para fabricar uma tubulação curva, utilizando o método das cascas cilíndricas. Essa aplicação é comum em indústrias onde tubulações curvas são utilizadas para a condução de fluidos. Os seguintes dados sobre a tubulação são fornecidos a seguir: o raio interno da tubulação é  $R = 1$  m, o raio externo da tubulação, considerando uma espessura de parede constante, é  $R + d = 1,2$  m, o comprimento da tubulação curva é  $L = 10$  m, e o arco de círculo que a tubulação segue é  $\frac{\pi}{4}$  rad. Nosso objetivo é calcular o volume de material necessário para fabricar a tubulação curva.

Primeiramente, a forma da tubulação curva pode ser entendida considerando um elemento infinitesimal de comprimento  $dx$  ao longo da tubulação, localizado a uma distância  $x$  do início da curva. Ao girar esse elemento em torno do eixo da tubulação, é formado um cilindro oco de raio externo  $R + d$  e raio interno  $R$ . O volume da casca cilíndrica infinitesimal pode ser expresso por:

$$\Delta V = 2\pi x \cdot h \cdot r(x) \cdot \Delta x,$$

onde  $h$  é a altura da casca cilíndrica, que corresponde à largura da tubulação.

A altura pode ser calculada como o comprimento do arco correspondente ao elemento  $dx$ . Como a tubulação segue um arco de  $\frac{\pi}{4}$  radianos ao longo do comprimento total, a altura é dada por:

$$h = \frac{\pi}{4}R$$

Fazendo as devidas substituições, obtemos que:

$$\Delta V = 2\pi x \cdot \frac{\pi}{4}R \cdot (R + d) \cdot \Delta x.$$

Então, o volume pode ser expresso por:

$$\begin{aligned}
 \text{Volume} &= \int_0^L 2\pi x \cdot \frac{\pi}{4}R \cdot (R + d) \cdot dx \\
 &= \int_0^{10} 2\pi x \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1 \cdot (1 + 0,2) \cdot dx \\
 &= \frac{\pi^2}{2} \int_0^{10} 1,2x \, dx \approx 295,78 \text{ m}^3.
 \end{aligned}$$

## 4.5. Total de Energia Consumida por um Edifício

Vamos considerar a situação em que é necessário calcular a quantidade total de energia consumida por um edifício ao longo de um intervalo de tempo, com base em um gráfico que mostra a variação da potência elétrica em kilowatts ao longo do tempo. Suponhamos que a função de potência em função do tempo seja dada por

$$P(t) = 2t^2 - 3t + 10,$$

onde  $t$  representa o tempo em horas. Observamos que a escolha dessa função quadrática tem apenas um caráter ilustrativo.

A tarefa é determinar a energia total consumida pelo edifício durante um intervalo de tempo específico, por exemplo, de  $t = 1$  até  $t = 5$ . Utilizaremos o método dos retângulos para determinar essa energia total. O intervalo dado será dividido em subintervalos de largura uniforme. Para cada subintervalo, vamos calcular a altura da função  $P(t)$  no ponto inicial de cada subintervalo e multiplicar essa altura pela largura do subintervalo. Finalmente, somaremos essas áreas para obter uma aproximação da energia total consumida.

Se dividirmos o intervalo  $[1, 5]$  em  $n$  subintervalos, com largura uniforme  $\Delta t = \frac{5-1}{n} = \frac{4}{n}$ , a energia total consumida pode ser aproximada por (compare com (2)):

$$E \approx \sum_{i=1}^n P(t_i) \Delta t,$$

onde  $t_i = 1 + (i-1)\Delta t$  é o ponto inicial de cada subintervalo e  $P(t_i) = 2t_i^2 - 3t_i + 10$  é o valor da função de potência no ponto  $t_i$ . Essa soma irá fornecer uma estimativa para a energia total consumida pelo edifício durante o intervalo de tempo de  $t = 1$  a  $t = 5$ .

Uma estimativa é dada por:

$$E \approx P(1) \cdot \Delta t + P(2) \cdot \Delta t + P(3) \cdot \Delta t + P(4) \cdot \Delta t,$$

onde  $\Delta t$  é a largura de cada subintervalo, dada por  $\frac{b-a}{n}$ ,  $a = 1$  e  $b = 5$  são os limites inferior e superior do intervalo e  $n = 4$  é o número de subintervalos. Substituindo os valores temos:

$$\begin{aligned}
 E &\approx (2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 10) \cdot 1 + (2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 10) \cdot 1 \\
 &\quad + (2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 10) \cdot 1 + (2 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 10) \cdot 1 = 9 + 12 + 19 + 30 = 70 \text{ u.e.}
 \end{aligned}$$

## 5. Discussões

### 5.1. Áreas

A estimativa de áreas sob curvas é essencial em diversas disciplinas da matemática, ciência e engenharia. Existem vários métodos para realizar essa tarefa, cada um com características distintas quanto à precisão e estabilidade. O Método dos Retângulos, sendo o mais simples, divide a área sob a curva em retângulos de largura uniforme e soma suas áreas. Embora seja uma técnica básica, a precisão deste método varia conforme o número de retângulos e a natureza da função, podendo subestimar ou superestimar a área real dependendo da concavidade da curva.

O Método dos Trapézios aprimora o Método dos Retângulos ao dividir a área sob a curva em trapézios, proporcionando estimativas mais precisas. Ele leva em conta a forma da curva, o que melhora a precisão em comparação ao método dos retângulos, especialmente em funções mais suaves. Quanto mais trapézios são usados, mais precisa é a estimativa, embora ainda possa haver imprecisões, principalmente em curvas com variações acentuadas. Já o Método de Simpson, que utiliza segmentos de parábolas para aproximar a curva, é o mais preciso dos três e oferece resultados muito próximos da área real, sendo particularmente eficaz em funções suaves.

Concluimos que o Método dos Retângulos é o mais simples e menos preciso, enquanto o Método dos Trapézios oferece uma melhoria significativa. O Método de Simpson, por sua vez, é o mais preciso, mas requer mais cálculos. A escolha do método adequado depende da natureza da função e da precisão necessária. Em situações onde a precisão é prioritária, o Método de Simpson é ideal, embora seja mais lento. Por outro lado, os Métodos dos Retângulos e Trapézios são mais rápidos, sendo úteis quando a velocidade de cálculo é mais importante.

## 5.2. Volumes

Os métodos de cálculo de volume, como o “método das seções transversais” e o “método das cascas cilíndricas”, são ferramentas essenciais para calcular volumes de objetos tridimensionais com formas irregulares, onde métodos tradicionais podem ser difíceis de aplicar. Cada abordagem oferece uma maneira única de determinar volumes, com suas próprias vantagens e aplicações. O método das seções transversais é amplamente utilizado para sólidos de formas irregulares, subdividindo o objeto em fatias finas e planas, cujas áreas são integradas ao longo de um eixo de referência, proporcionando uma forma eficaz de lidar com objetos cujas dimensões mudam ao longo de seu comprimento.

Por outro lado, o método das cascas cilíndricas é especialmente útil para objetos que podem ser gerados pela rotação em torno de um eixo, como cones ou esferas. Nesse método, o volume é calculado criando cascas cilíndricas concêntricas ao redor do eixo de rotação. Cada casca é tratada como um cilindro oco, e o volume total é obtido somando as contribuições de todas as cascas. Este método é particularmente eficaz para calcular volumes de sólidos de revolução e objetos com simetria cilíndrica, tornando o processo mais direto.

Ambos os métodos possuem vantagens específicas. O método das seções transversais é bastante versátil e pode ser aplicado a uma ampla gama de geometrias complexas. Já o método das cascas cilíndricas é mais eficiente quando se trata de objetos com simetria rotacional, economizando tempo e esforço no cálculo. A escolha do método depende das características geométricas do objeto e da eficiência desejada no processo de cálculo.

## 5.3. Nota histórica

O passado e o presente não estão desconectados. Por isso, destacamos que os primeiros problemas da história do cálculo diziam respeito ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos de arcos. Assim, já na antiguidade, os gregos tratavam desses temas. Um dos primeiros métodos rigorosos foi creditado a Eudoxo (c. 370 a.C.) e trata do hoje conhecido *método da exaustão*, o qual pode ser entendido como uma resposta da escola platônica aos paradoxos de Zenão. Esse método consistia em aproximar áreas e volumes dividindo uma figura em partes menores, semelhantes ao que fazemos hoje com as somas de Riemann no cálculo integral. Arquimedes (c. 250 a.C.), um dos maiores matemáticos da época, aprimorou esse método e conseguiu determinar, com grande precisão, a área de um círculo e o volume de uma esfera [6, Capítulo 11].

Apesar dos avanços dos gregos, a matemática não dominava as ferramenta para calcular áreas e volumes de maneira sistemática. O grande avanço só se deu no século XVII com os matemáticos Isaac Newton (c. 1666 d.C.) e Gottfried Wilhelm Leibniz (c. 1684 d.C.). Eles perceberam que o problema de calcular a área sob uma curva estava intimamente ligado ao problema de encontrar a taxa de variação de uma função (derivada), desenvolvendo assim o *cálculo diferencial e integral*, ver [6, Capítulo 11].

Hoje, o cálculo integral numérico é uma ferramenta essencial na matemática e em diversas áreas do conhecimento, permitindo calcular áreas, volumes e resolver problemas que envolvem quantidades acumuladas, como a distância percorrida por um móvel ou a quantidade de água em um reservatório. Esse avanço abriu caminho para a matemática moderna e continua sendo uma das descobertas mais revolucionárias da história.

## 6. Considerações Finais

Neste trabalho, exploramos métodos fundamentais para o cálculo de áreas e volumes, com ênfase nos métodos dos retângulos, trapézios, regra de Simpson, seções transversais e cascas cilíndricas, que são ferramentas essenciais em diversas áreas da matemática, ciência e engenharia. Investigamos as características e a aplicabilidade de cada um desses métodos, destacando suas vantagens e limitações, como a precisão do método dos trapézios e a aprimoração pela regra de Simpson, bem como a abordagem dos métodos das seções transversais e das cascas cilíndricas para o cálculo de volumes de sólidos complexos.

Além disso, ressaltamos a importância da integração como ferramenta central nesses métodos, seja por métodos tradicionais ou computacionais. A escolha do método adequado depende da natureza do problema, com métodos mais simples sendo eficazes para problemas básicos e métodos mais avançados necessários para problemas complexos. A precisão e a eficiência são fatores determinantes na seleção do método, e tecnologias modernas, como softwares de cálculo numérico, tornam o processo mais eficiente, permitindo a automação de cálculos antes realizados manualmente.

Em resumo, os métodos de cálculo de áreas e volumes têm um papel crucial em diversas disciplinas, desde a matemática pura até a física aplicada e engenharia. Eles oferecem soluções elegantes e poderosas para problemas complexos, permitindo-nos compreender e modelar o mundo ao nosso redor. A compreensão desses métodos e sua aplicação adequada são habilidades valiosas para qualquer pessoa envolvida em áreas que envolvem análise quantitativa e modelagem. À medida que avançamos no século XXI, com novos desafios e oportunidades em todas as áreas da ciência e tecnologia, esses métodos continuarão a desempenhar um papel central na resolução de problemas complexos e na busca pelo conhecimento. Portanto, aprofundar o estudo desses métodos e suas aplicações é um investimento valioso, capacitando-nos a enfrentar os desafios do futuro com confiança e competência matemática.

## Referências

- [1] BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. MEC, Brasília, DF, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 3 mar. 2025.
- [2] Annette M. Burden, Richard L. Burden, and J. Douglas Faires. *Análise Numérica*. Cengage Learning, 3. ed. edition, 2015.
- [3] Raymond P. Canale and Steven C. Chapra. *Métodos numéricos para engenharia*. McGraw Hill Education, 7. ed. edition, 2016.
- [4] Admilson Rodrigues de Carvalho. *Método de Monte Carlo e suas Aplicações*. Dissertação PROFMAT, Boa Vista, RR, 2017. Disponível em: <http://repositorio.ufrb.br:8080/jspui/handle/prefix/388>. Acesso em: 4 mar. 2025.

- [5] Jânio K. S. de Castro and Francisco G. M. Cunha. *Cálculo numérico*. Fortaleza: UAB/IFCE, 1. ed. edition, 2010. Disponível em: <http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/430185>. Acesso em: 3 mar. 2025.
- [6] Howard Eves. *Introdução à História da Matemática*. Editora da Unicamp, Campinas, SP, 2004.
- [7] Renan dos Santos Silva. *Módulo de Estabilidade - Unidade de Estudo Autônomo*. Marinha do Brasil. Diretoria de Portos e Costas, 1. ed. edition, 2010. Disponível em: <https://sermarinedotcomdotbr.wordpress.com/wp-content/uploads/2016/01/livro-de-navegac3a7c3a3o.pdf>. Acesso em: 3 mar. 2025.
- [8] James Stewart. *Cálculo: Volume 1*. Cengage Learning; Tradução da 9ª edição norte-americana, 9. ed. edition, 2021.

Márcio Batista  
CPMAT-IM, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, AL, 57072-970, Brasil  
<[mhbs@mat.ufal.br](mailto:mhbs@mat.ufal.br)>

Yúdi Oliveira  
Secretaria de Educação do Estado de Alagoas, 13º GERE, Maceió, AL, 57055-055, Brasil  
<[yudixyzz@hotmail.com](mailto:yudixyzz@hotmail.com)>

Recebido: 30/12/2024  
Publicado: 31/03/2025