PROFESSOR DE MATEMÁTICA ONLINE
Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática

PMO v.13, n.2, 2025
ISSN: 2319-023X
https://doi.org/10.21711/2319023x2025/pmo1311

Por que $0! = 1$? Quanto é $\frac{1}{2}!$? Existe fatorial de número negativo?

Míriam Saldanha Carneiro Marco Antônio de A. Fernandes Karine S. Mazzini

Resumo

Este texto consiste em uma tentativa de justificar a definição $0! = 1$, tendo como base a *Função Gama*, que possibilita a extensão do conceito de *Fatorial* a todos os números reais, com exceção dos inteiros negativos (fato que também iremos abordar). Apresentamos algumas poucas propriedades escolhidas dentre as muitas que esta função possui, e em seguida tecemos breves reflexões didáticas sobre os argumentos que podem ser utilizados ao se introduzir a definição $0! = 1$ diante de alunos da Educação Básica.

Palavras-chave: Fatorial; Função Gama; Problemas de Interpolação.

Abstract

This text consists of an attempt to justify the definition $0! = 1$, based on the *Gamma Function*, which allows the extension of the concept of *Factorial* to all real numbers, with the exception of negative integers (a fact that we will also approach). We present a few properties chosen from among the many that this function has, and then we make brief didactic reflections on the arguments that can be used when introducing the definition $0! = 1$ to students in Basic Education.

Keywords: Factorial; Gamma Function; Interpolation Problems.

1. Introdução

Certas dúvidas são muito frequentes na seara da Matemática. Dentre elas, algumas se destacam, como por exemplo: *"Por que o produto de dois números negativos resulta em um número positivo?"*; *"Por que* $\mathrm{a}^0 = 1$ *quando* $\mathrm{a} \neq 0$*?"*; *"Por que* $0! = 1$*?"*.

Sempre aparece um ou outro aluno mais curioso, e que procura entender o porquê de certas coisas serem definidas como o são. E, não raramente, o professor encontra dificuldades em elaborar uma resposta que soe satisfatória para tal aluno; às vezes, porque o próprio professor desconhece qualquer possível resposta, e, noutras vezes, porque a resposta exige, para a sua compreensão, ferramentas de Matemática ainda desconhecidas pelo aluno que suscitou a respectiva questão.

Diante de situações assim, muitos professores se limitam a responder dizendo tratar-se de uma "convenção matemática". "Convencionou-se" que será assim, e pronto! Em algumas vezes esta resposta não está exatamente "errada"; mas ela não costuma satisfazer a curiosidade do aluno, o que pode fazer com que, pouco a pouco, esse aluno vá perdendo a criatividade, o senso crítico e o interesse pela Matemática. Além do mais, o termo "convenção" pode soar, especialmente para os alunos mais questionadores, como um capricho de alguém, ou ainda, como algo impositivo, uma regra outorgada pela força, constituindo-se num argumento de autoridade, que produz uma sensação de *magister dixit*.

Mesmo quando estamos diante de uma "convenção matemática" - o que, nunca é demais relembrar, é um *sinônimo* de **definição** - há de se ter uma explicação, um motivo que justifique ter-se adotado tal definição. Tentaremos, aqui, apresentar uma razão para a definição $0! = 1$. Além disso, abordaremos outras perguntas que surgem durante o estudo do conceito de fatorial e suas propriedades, tais como: "Existe o fatorial de um número inteiro negativo?"; "Faz sentido falar em $\frac{1}{2}$!?".

Não temos a pretensão de dar uma resposta pronta ou mesmo uma palavra final sobre estas questões. A intenção é apresentar elementos para auxiliar o professor e, talvez, ampliar a sua compreensão sobre a ideia de fatorial; e, com isso, proporcionar-lhe a confiança necessária para falar com mais propriedade sobre este assunto, no seu cotidiano em sala de aula.

Nessa tentativa de trazer luz às indagações apresentadas, precisamos falar sobre a *Função Gama*. Talvez por não ter uma interpretação física imediata, mas aparecer como mera coadjuvante no tratamento de certos problemas (tais como o cálculo de probabilidades em Estatística ou a normalização de funções de onda de Coulomb), a *Função Gama* tem sido ainda muito pouco (ou mesmo nunca!) explorada nos cursos de Licenciatura em Matemática, permanecendo desconhecida por boa parte dos professores de Matemática do país. Todavia, a *Função Gama* não é importante apenas por estar intimamente ligada ao conceito de *fatorial*: trata-se de um conceito extremamente rico, uma vez que possui muitas propriedades matemáticas interessantes e relevantes. Por isto mesmo, a esta altura, é necessário alertar o estimado leitor para o fato de que os nossos objetivos, aqui, são modestos, no sentido de que não temos a pretensão de tornar este texto uma referência para o estudo da *Função Gama*. Em outras palavras, nesta abordagem, iremos dar prioridade, dentre as muitas propriedades da *Função Gama*, àquelas que a conectam, de alguma forma, ao conceito de *fatorial*. É esta conexão o objetivo que temos em mente neste texto. Ao leitor interessado em ampliar seus conhecimentos e sua visão a respeito da *Função Gama*, recomendamos as obras [1, 19].

A *Função Gama* nasce, conforme veremos, do desejo de se obter uma função que interpole a função fatorial (discreta); isto é, a função definida por $f(n) = n!$, para $n \in \mathbb{N}$.

2. Um Pouco de História

O matemático mais citado no transcorrer deste texto é, obviamente, o suíço *Leonhard Euler*; razão pela qual iniciaremos esta seção com uma brevíssima biografia deste ilustre matemático. Sua importância para a Matemática é tão expressiva, que o leitor certamente encontrará uma biografia menos curta de *Euler* em qualquer dos textos clássicos de *História da Matemática*.

2.1. Um Brevíssimo Relato Sobre a Vida de Leonhard Euler

Leonhard Euler (1707-1783) (ou apenas *Euler*, como é mais conhecido) nasceu na Suíça, na cidade de Basileia, no dia 15 de abril de 1707. Com apenas com um ano de idade se mudou para Riehen, cidade na qual passou a maior parte de sua infância. Já neste período, segundo *Boyer* [3], estudou com dois membros da família mais famosa de toda a História da Matemática: os *Bernoulli*. Por ter recebido ampla instrução, que ia desde a Matemática até à Teologia, passando por Física, Línguas Orientais e Medicina, foi chamado para ser membro da seção de Medicina e Fisiologia da Academia de São Petersburgo em 1727, por recomendação de dois dos mais brilhantes luminares dos primeiros tempos da Academia: exatamente os irmãos *Nicolaus Bernoulli* (1695-1726) e *Daniel Bernoulli* (1700-1782). Em 1730, passou a ocupar a cadeira de *Filosofia Natural*, ao invés da de Medicina. Em 1733, alguns anos após a morte de *Nicolaus Bernoulli*, *Daniel Bernoulli* deixou a Rússia para ocupar uma cadeira de Matemática em seu retorno à Basileia. Neste momento, com somente 26 anos de idade, *Euler* tornou-se o principal matemático da Academia. Em 1735, ele perdeu a visão do olho direito, mas este infortúnio não alterou a velocidade com que produzia suas pesquisas em Matemática. Já em 1741, aceitou o convite de *Frederico, o Grande*, para fazer parte da Academia de Berlim, permanecendo por 25 anos na corte de Frederico, período no qual apresentou numerosos artigos tanto à Academia de São Petersburgo, quanto à Academia da Prússia.

Durante sua vida, *Euler* publicou mais de 500 livros e artigos; e suas obras continuaram a aparecer nas publicações da Academia de São Petersburgo durante quase meio século após a sua morte. Mesmo após ter ficado totalmente cego durante os últimos 17 anos de sua vida, o fluxo de suas pesquisas e publicações se manteve, até que ele faleceu subitamente, enquanto bebia chá na companhia de seus netos, em 18 de setembro de 1783, aos 76 anos, em São Petersburgo, na Rússia.

Euler foi um dos mais prolíficos matemáticos que já viveram, e é considerado, até hoje, um dos maiores matemáticos de todos os tempos, além de certamente o mais brilhante matemático do século XVIII.

2.2. A Ideia de Fatorial na História da Matemática

Uma vez que a introdução da função fatorial (discreta) não apresenta nenhuma ideia matemática "essencialmente nova" (já que necessita apenas da noção de produto de uma quantidade finita de fatores, que são sempre números naturais), para discorrer sobre aspectos históricos do conceito de fatorial é necessário tratar da parte da *História das Notações Matemáticas* que diz respeito ao uso do símbolo "!" em Matemática.

Fora do contexto da Matemática, este símbolo, que, na Língua Portuguesa, é denominado *ponto de exclamação*, é objeto de muitas controvérsias entre os linguistas; tanto no que diz respeito à sua origem, quanto aos idiomas que o teriam (ou não) incorporado. Entretanto, há razoável consenso de que ele foi introduzido na impressão inglesa pela primeira vez no século XV; além disso, nas ortografias alemã e brasileira, esse símbolo surgiu na primeira impressão de suas respectivas *Bíblias* (mais precisamente, em 1797, na Alemanha; e, no Brasil, em 1748; antes, portanto, da imposição da Língua Portuguesa como idioma oficial em nosso país). Trata-se, portanto, de um símbolo utilizado em vários idiomas e há bastante tempo.

De acordo com os autores dos melhores textos de *História da Matemática* (veja, por exemplo, [6]), o matemático francês *Cristian Kramp* (1760-1826), em sua obra *Elemens d'Arithmétique Universelle* (1808), foi o primeiro a utilizar o símbolo "!" para denotar o fatorial de um número natural, como fazemos nos dias de hoje. No prefácio desta obra, ao comentar as notações que seriam utilizadas no texto, ele escreveu: ,

> *Eu uso a notação muito simples* $\mathrm{n}!$ *para designar o produto de números decrescentes a partir de* n *ate à unidade; isto é,* $\mathrm{n} \cdot (\mathrm{n}–1) \cdot (\mathrm{n}–2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. *O uso continuado que faço da Análise Combinatória na maioria das minhas demonstrações tornou esta notação essencial.* ([14], 1808, p. V e VI, em tradução livre).

A esta altura, cumpre-nos advertir o leitor de que estamos tratando de uma época em que as notações matemáticas estavam em franco desenvolvimento; o que significa que ainda não haviam sido padronizadas como hoje, de modo que cada matemático era levado a empregar aquelas que julgasse mais conveniente, além de, inclusive, criar as suas próprias notações.

Segundo *Cajori* [6], o produto $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot \mathrm{m}$ foi denotado por *Euler*, em 1751, pela letra maiúscula M; por m^*, em 1774, nos escritos de *J. B. Basedow*; já *Gauss* optou por $\Pi(\mathrm{m})$; ao passo que *de Morgan*, em 1838, empregou o símbolo $[\mathrm{m}]$. Ainda de acordo com [6], uma outra notação bastante utilizada para esse produto, na primeira metade do século XIX, na Inglaterra, era $\underline{|\mathrm{m}}$; embora, em 1915, o *Council of the London Mathematical Society*[1], em suas *Suggestions for Notation and Printing*[2], tenha recomendado a adoção do símbolo $\mathrm{m}!$. A notação de Kramp foi amplamente adotada na Alemanha ainda no século XIX; muito embora, não obstante, tenha sido alvo de algumas críticas. Como exemplo, em um trecho de um artigo de 1842, o matemático *Augustus De Morgan* (1806-1871) escreveu: ,

> *Entre as piores barbáries está a de introduzir símbolos que são bastante novos em Matemática, mas perfeitamente compreendidos na linguagem comum. Os escritores tomaram emprestado dos alemães a abreviação* $\mathrm{n}!$ *para significar* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (\mathrm{n}-1) \cdot \mathrm{n}$*, o que dá às suas páginas a aparência de expressar surpresa e admiração que 2, 3, 4, etc. devem ser encontrados em resultados matemáticos.* ([6], 2013, p. 328, em tradução livre).

Quanto à terminologia *fatorial* para o símbolo "!", é importante ressaltar que Kramp não foi o primeiro a empregá-la. Em um outro trecho do prefácio de sua obra supracitada, encontramos: ,

> *Para designar os produtos cujos fatores constituem uma progressão aritmética entre eles, tais como* $\mathrm{a} \cdot (\mathrm{a}+\mathrm{r}) \cdot (\mathrm{a}+2\mathrm{r}) \cdot (\mathrm{a}+\mathrm{nr}-\mathrm{r})$*, mantive a notação* $\mathrm{a}^{\mathrm{n}|\mathrm{r}}$*, já proposta em minha 'Análise das Refrações'; eu dei a eles o nome de 'faculdades'. Arbogast substituiu pelo nome mais claro e francês de 'fatoriais'; reconheci a vantagem deste novo nome, e, ao adotar a ideia dele, parabenizei a mim mesmo por poder homenagear a memória do meu amigo.* ([14], 1808, p. XI e XII, em tradução livre).

Neste trecho, Kramp faz referência ao matemático francês *Louis François Antoine Arbogast* (1759-1803). Ainda segundo [6], alguns textos em língua inglesa, no final do século XIX, devido ao ponto de exclamação, sugeriam a leitura de $\mathrm{n}!$ como "n-admiração"; enquanto que na Alemanha, neste mesmo período, esse símbolo era lido como "n-faculdade", provavelmente seguindo a terminologia de Kramp.

A notação introduzida por Kramp não apenas sobreviveu às críticas, mas também se tornou o padrão até hoje adotado praticamente em todo o mundo, passando a integrar a linguagem universal da Matemática. Hoje os fatoriais estão por toda parte, às vezes de forma explícita, às vezes de forma oculta. Geralmente, os alunos tem com eles seu primeiro contato no início dos estudos de Análise Combinatória, ao se depararem com problemas nos quais o objetivo é determinar de quantas formas diferentes podem ser enfileirados certos objetos dados, quando apenas a ordem em que dispomos esse objetos importa: a quantidade de maneiras distintas de enfileirarmos n objetos diferentes dados é $\mathrm{n}!$. Um exemplo: de quantas maneiras distintas podemos dispor três pessoas em fila? A resposta para essa pergunta é $3! = 6$.

2.3. A Função Fatorial (Discreta) e a Ideia de Interpolação: Primeiros Avanços

Em todo este texto, consideraremos que 0 não é um número natural; isto é, aqui: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Lembremos que, a princípio, $\mathrm{n}!$ só está definido quando n é zero ou um número natural.

Definição 1 (Fatorial)**.** Dado um número $\mathrm{n} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, o **fatorial de** n, que denotaremos por $\mathrm{n}!$, é definido,

[1] *Conselho da Sociedade Matemática de Londres.*
[2] *Sugestões para Notação e Impressão.*

indutivamente, por:

$$\begin{cases} 0! := 1 \\ 1! := 1 \\ n! := n \cdot (n-1)!, \quad n > 1. \end{cases} \tag{1}$$

Em vista disso, por exemplo, $2! = 2 \cdot 1 = 2$ e $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

É neste momento que as questões intrigantes dos alunos mais curiosos invadem as aulas. Perguntas tais como: (a) *Por que* $0! = 1$*?* (b) *É possível definir* $x!$ *para o caso em que* x *é um número real compreendido entre 1 e 2? No caso afirmativo, como fazer isto? Por exemplo: qual deve ser o valor de* $\frac{3}{2}!$*?* (c) *De modo mais geral, como definir* $x!$ *nos casos em que* x *é um número real positivo?*

É evidente que, qualquer que seja a definição que se tente apresentar como resposta a tais questões, ela deverá, obrigatoriamente, coincidir com os valores já definidos anteriormente para o fatorial de números naturais. Matematicamente falando, o que estamos buscando é uma função real "suave" f definida em $]0, \infty[$, satisfazendo $f(n) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Costumamos nos referir a este tipo de procura como ***Problema de Interpolação***. Encontrar uma função interpoladora, tal como estamos discorrendo aqui, pode ser algo extremamente relevante, uma vez que permite estender conceitos ou operações para além dos conjuntos discretos considerados *a priori*.

Os Problemas de Interpolação (ou, dito de outro modo, as tentativas de "extensão" de certos conceitos matemáticos) como este que estamos abordando aqui, estavam em alta nos séculos XVII e XVIII. Consideremos, por exemplo, a "álgebra dos expoentes". A definição de potência com expoente natural é totalmente intuitiva (para qualquer base): a^m é o produto de m fatores iguais a a. É evidente que esta definição (mesmo considerando uma base positiva) não se aplica quando o expoente é zero, ou um número inteiro negativo, ou mesmo uma fração. Por exemplo, o que seria a^{-3}? Um produto de -3 fatores iguais a a? E $a^{3/2}$ seria o produto de $3/2$ fatores iguais a a? Isso não faz nenhum sentido! Uma vez que estamos demasiadamente habituados a lidar com esses tipos de potências, operamos com elas sem maiores digressões sobre o que significam. Isso pode fazer passar despercebido o fato de que, para se estabelecer formalmente as definições das potências de base positiva e expoentes não naturais, *foi necessário atacar um problema de interpolação!* As "misteriosas" definições para $a > 0$ dadas por: $a^0 := 1$; $a^{m/n} := \sqrt[n]{a^m}$, para $m, n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$ e $a^{-m} := \dfrac{1}{a^m}$, quando $m \in \mathbb{N}$, que resolvem este problema e que são empregadas tão proveitosamente na Álgebra, foram escritas explicitamente pela primeira vez por *Newton*, em 1676 (veja [8]). A beleza e a utilidade destas definições advém do fato de que elas tornam *contínuas* as funções exponenciais, de tal modo que a conhecida propriedade do expoente de um produto de potências de mesma base $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ continua válida, quer os expoentes sejam naturais ou não.

Um dos mais influentes matemáticos do período supramencionado, que estudou vários problemas de interpolação, e tratou especificamente do problema de interpolação da função fatorial (discreta) foi *Christian Goldbach* (1690-1764). A influência e o prestígio de *Goldbach* fez com que os mais expressivos matemáticos de sua geração procurassem trocar correspondências para compartilhar com ele suas ideias matemáticas. Aqui, possuem particular interesse as cartas trocadas entre *Goldbach* e os irmãos *Nicolaus Bernoulli* e *Daniel Bernoulli*. Isto porque é bastante provável que *Euler* tenha tomado conhecimento desse problema através de ponderações feitas pelo seu amigo *Daniel Bernoulli*.

As primeiras soluções conhecidas para o problema de interpolação da função fatorial discreta foram dadas por *Euler*, e aparecem em cartas deste, endereçadas a *Goldbach*. À época dessas primeiras correspondências com *Goldbach*, ele era apenas um jovem rapaz de 22 anos; enquanto que *Goldbach*, então com quase quarenta anos, já gozava de expressivo prestígio na comunidade científica. A primeira solução obtida por *Euler* aparece na primeira carta enviada por ele a *Goldbach*, datada de 13 de outubro de 1729, e foi estabelecida na forma de um produto infinito (como veremos adiante); enquanto que uma outra solução, desta vez utilizando integrais impróprias, aparece em outra carta, também remetida a *Goldbach*, datada de 08 de janeiro de 1730.

As correspondências entre *Euler* e *Goldbach* perduraram por cerca de 35 anos, até a morte de *Goldbach*. Elas foram preservadas e catalogadas, sendo posteriormente amplamente estudadas; e os resultados destas investigações históricas foram publicados em livros (com traduções, observações, comentários e figuras refeitas digitalmente), tais como [13, 16, 17]. Nestas obras, o leitor interessado poderá encontrar até mesmo imagens destas cartas.

A figura de *Goldbach* é de grande interesse para a História da Matemática. Em 1845, o matemático russo *Paul Heinrich Fuss* (1797-1855), após reunir a maior parte das correspondências entre *Goldbach* e os célebres matemáticos de sua época (o que inclui as duas cartas citadas aqui), publicou-as em uma obra de dois volumes [11], intitulada *"Correspondance Mathématique et Physique de Quelques Célèbres Géomètres du XVIIIème Siècle"* (*"Correspondência Matemática e Física de Alguns Geômetras Célebres do Século XVIII"*, em tradução livre). Esta obra é um rico documento sobre a História da Matemática do século XVIII; sendo que boa parte das cartas que a compõem podem ser acessadas através do endereço eletrônico fornecido em [11].

Uma curva contínua e suave, que represente o gráfico de uma certa função f, e que conecte os pontos da forma $(n, n!)$, com $n \in \mathbb{N}$, fornece sempre uma solução f para o problema de interpolação fatorial. A esta altura, deve estar claro para o estimado leitor que, raciocinando geometricamente, é possível construir um esboço gráfico de uma infinidade de curvas com estas propriedades, como mostra a Figura 1, apresentada abaixo. O que pode (e deve!) ser pensado e questionado é se alguma destas curvas possui a **eficácia** desejada para estender o conceito de fatorial.

Entretanto, de acordo com [8], a tarefa de *Euler* era um pouco mais complexa: ,

> *No início do século XVIII, uma função era mais ou menos sinônimo de uma fórmula, e por 'fórmula' entendia-se uma expressão que podia ser derivada de manipulações elementares com adições, subtrações, multiplicações, divisões, potências, raízes, exponenciais, logaritmos, diferenciação, integração, séries infinitas, ou seja, uma expressão que viesse dos processos comuns da Análise Matemática. Essa fórmula era chamada de 'expressão analítica'. A tarefa de Euler era encontrar, se possível, uma expressão analítica que surgisse naturalmente do corpo da Matemática e que produzisse fatoriais quando um número inteiro positivo fosse inserido, mas que ainda fosse significativa para outros valores da variável.* ([8], p. 852, tradução própria).

O que estamos dizendo é que, no contexto histórico em que *Euler* vivia, sua intenção era encontrar uma "fórmula" que, para cada número natural, fornecesse como resultado o fatorial desse número, e que, além disso, fizesse sentido para outros números reais positivos.

O primeiro resultado expressivo, nessa direção, obtido por *Euler* (encontrado na primeira de suas cartas enviadas a Goldbach), foi a seguinte expressão para o fatorial de um número natural n:

$$n! = \left[\left(\frac{2}{1}\right)^n \frac{1}{n+1}\right]\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2}{n+2}\right]\left[\left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{3}{n+3}\right]\cdots$$

a qual pode ser reescrita, utilizando a notação de produtório, como:

$$n! = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^n\left(\frac{k}{n+k}\right), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

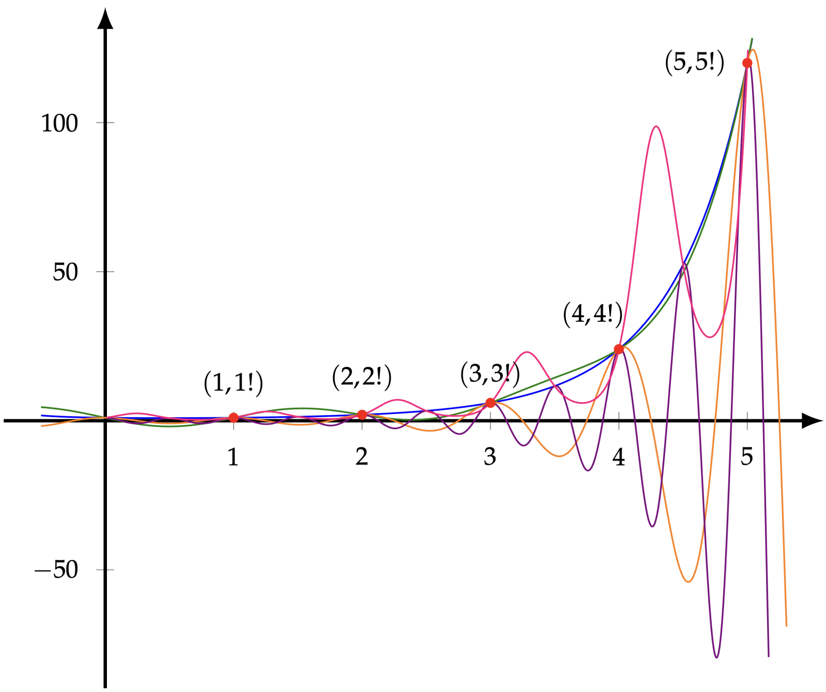

Figura 1: Interpolações Arbitrárias da Função Fatorial (Discreta).

Ao leitor interessado em seguir de perto as ideias de Euler, e em compreender seus *insights* e os passos que ele percorreu até obter esta expressão (bem como as expressões integrais que surgirão logo adiante), sugerimos a leitura de [21].

Considerando os nossos modestos objetivos de então, não vamos adentrar nos detalhes técnicos que dizem respeito à convergência de produtos infinitos; entretanto, afirmamos que o lado direito da última expressão faz sentido (isto é, o produto infinito converge) quando, ao invés de considerarmos apenas $n \in \mathbb{N}$, tomamos $n \in \mathbb{R}$ positivo qualquer. Portanto, essa expressão fornece uma extensão natural para o conceito de fatorial; a saber:

$$x! = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^x \left(\frac{k}{x+k}\right), \quad \forall \ x \in]0, \infty[, \tag{2}$$

sendo esta, portanto, uma primeira (forma de) solução para o problema de interpolação fatorial obtida por *Euler*.

Entretanto, *Euler* não parou por aí e, em sua segunda carta endereçada a *Goldbach*, apresentou como solução para o problema de interpolação a função definida por:

$$g(x) = \int_0^1 (-\ln t)^x dt. \tag{3}$$

Note que a integral acima é uma integral imprópria, uma vez que $\lim\limits_{t \to 0^+} \ln t = -\infty$. Além disso, uma simples mudança de variável (do tipo $u := -\ln t$) nos permite reescrever (3) como:

$$g(x) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt. \tag{4}$$

Euler mostrou que as expressões em (2) e (4) são equivalentes, e também que a integral em (4) converge se e somente se $x \geq 0$. Além disso, nos casos em que $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, basta utilizar a técnica de integração por partes n vezes seguidas na integral acima, para percebermos que, de fato, esta função interpola a função fatorial; isto é, que:

$$g(n) = n!, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

De acordo com [6], as ideias contidas nestas duas cartas deram origem a um artigo, publicado posteriormente, cuja tradução livre do título é *"Sobre Progressões Transcendentes Cujo Termo Geral Não Pode Ser Expresso Algebricamente"*.[3] Neste artigo, como o próprio nome busca expressar, *Euler* mostra que é impossível obter uma expressão "simples", ou, usando suas palavras, "algébrica" para a interpolação fatorial, no sentido de que, qualquer que seja a 'fórmula' obtida para a interpolação fatorial, esta conterá, necessariamente, "processos infinitos".

Alguns anos depois, conforme assegura *Gronau* em [12], o próprio *Euler* modificou um pouco a sua ideia inicial, considerando uma função obtida a partir da função g acima através de uma translação horizontal; mais precisamente, Euler passou a estudar a função f definida por:

$$f(x) = \int_0^1 (-\ln t)^{x-1} dt = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \forall\, x \in]0, \infty[.$$

Esta última representação acabou ganhando popularidade, e se tornou a maneira utilizada para definir a *Função Gama (de Euler)* na grande maioria dos textos matemáticos mais recentes.

A Função Gama atraiu o interesse de alguns dos matemáticos mais proeminentes de todos os tempos. Nas palavras de Philip J. Davis, *"cada geração encontrou algo de interessante para dizer sobre a Função Gama. Talvez a próxima geração também encontre."*. Sua história reflete muitos dos principais desenvolvimentos da Matemática desde o século XVIII.

3. A Função Gama (de Euler)

Diante do exposto, iniciamos esta seção com a seguinte:

Definição 2 (Função Gama)**.** A **Função Gama (de Euler)** é definida por:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \text{para} \quad x \in]0, \infty[. \tag{5}$$

É plenamente possível considerar a Função Gama como uma função de variável complexa; mais precisamente, definida para $z \in \mathbb{C}$, com $\mathrm{Re}(z) > 0$. Entretanto, para os nossos modestos propósitos de então, será suficiente considerarmos Γ como sendo uma função de variável real.

Utilizando a teoria de Integrais Impróprias, verifica-se que a integral em (5) converge quando $x > 0$ e diverge quando $x \leq 0$. Isto é, a Função Gama está bem-definida se tomarmos para seu domínio o conjunto formado por todos os números reais positivos.

O uso do símbolo Γ (que é a letra grega maiúscula *gama*) para representar esta função foi introduzido por *Adrien-Marie Legendre* (1752-1833), em 1809. Conforme veremos adiante, esta nova função não mais satisfaz $n \longmapsto n!$, mas sim $\Gamma(n) = (n-1)!$, quando $n \in \mathbb{N}$. Logo, quem passa exatamente pelos pontos $(n, n!)$, com $n \in \mathbb{N}$, é a função:

$$x \mapsto \Gamma(x+1).$$

[3] *"De Progressionibus Transcendentibus, Seu Quarum Termini Generales Algebraice Dari Nequeunt"; veja em[9].*

A título de exemplos, vamos calcular alguns valores da Função Gama. Primeiro, observe que:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = \int_{-\infty}^0 e^u du = \lim_{k\to-\infty} \int_k^0 e^u du = \lim_{k\to-\infty} \left(1 - e^k\right) = 1. \tag{6}$$

Além disso, note que:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}dt.$$

Fazendo a mudança de variável $t = u^2$, encontramos:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty (u^2)^{-1/2}e^{-u^2}2udu = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du.$$

Essa última integral é bastante conhecida de todos: trata-se da *Integral Gaussiana*. Sabemos que ela é igual a $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (o que pode ser obtido usando-se o Sistema de Ccoordenadas Polares). Logo:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}. \tag{7}$$

A Figura 2 exibe um esboço do gráfico da Função Gama $\Gamma :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.

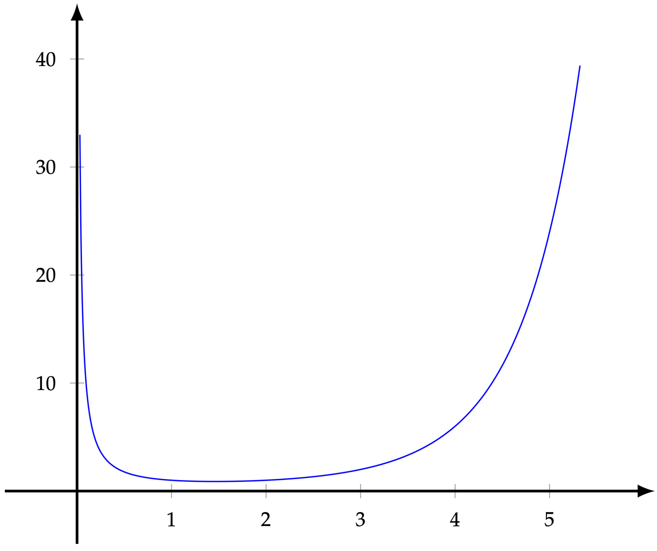

Figura 2: Gráfico da Função Gama $\Gamma :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.

Não há dúvidas de que estamos lidando com uma função que possui várias propriedades muito interessantes; entretanto, nos limitaremos aqui a explorar apenas uma delas, a saber, que a Função Gama é solução de uma certa *Equação Funcional*. Este fato desempenha um papel fundamental na tarefa de compreendermos porque essa função interpola, num certo sentido, a função fatorial, e ainda fornece uma extensão do conceito de fatorial a todos os números reais, com exceção dos números inteiros não-positivos.

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Teorema 1 (Equação Funcional)**.** *A Função Gama satisfaz a identidade:*

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x), \quad \forall\, x > 0. \tag{8}$$

Demonstração. Da definição da Função Gama, podemos escrever:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^{(x+1)-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \lim_{k\to\infty} \int_0^k t^x e^{-t} dt, \quad \forall\, x > 0. \tag{9}$$

Integrando por partes a última integral que aparece na igualdade acima (com $u = t^x$), o que nos dá $du = xt^{x-1}dt$, $dv = e^{-t}dt$ e $v = -e^{-t}$), encontramos:

$$\int_0^k t^x e^{-t} dt = -t^x e^{-t}\Big|_0^k + \int_0^k xt^{x-1} e^{-t} dt = -\frac{k^x}{e^k} + x \int_0^k t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \forall\, x > 0.$$

Voltando com isso em (9), concluímos que, para todo $x > 0$, vale:

$$\Gamma(x+1) = \lim_{k\to\infty} \left[-\frac{k^x}{e^k} + x \int_0^k t^{x-1} e^{-t} dt \right] = x \lim_{k\to\infty} \int_0^k t^{x-1} e^{-t} dt = x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = x \cdot \Gamma(x).$$

□

Comparemos, brevemente, a identidade (8) com o passo indutivo da definição 1. Deve ficar claro, a esta altura, que satisfazer à igualdade em (8) é uma condição *necessária* (mas, como veremos adiante, não suficiente) para qualquer função que se apresente como candidata a ser uma interpolação da função fatorial (discreta). É intuitivo que (8) garante, *a fortiori*, o padrão indutivo estabelecido na terceira igualdade da definição 1.

Além disso, a necessidade de atender (8) nos leva à conclusão de que *qualquer função que interpole a função fatorial (discreta) não pode, nunca, estar definida em* $x = 0$. Com efeito, supondo que f é uma função que verifica (8), se definíssemos arbitrariamente $f(0) := a \in \mathbb{R}$, teríamos:

$$f(1) = f(0+1) = 0 \cdot f(0) = 0 \cdot a = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(2) = f(1+1) = 1 \cdot f(1) = 1 \cdot 0 = 0;$$

de onde poderíamos concluir, usando argumentos de indução matemática, que:

$$f(n) = 0 \neq n!, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Dito de outro modo: se definirmos arbitrariamente $f(0) := a \in \mathbb{R}$, então uma consequência imediata é que (8) deixa de ser válida para f quando $x \in \mathbb{N}$, independente da maneira pela qual a é escolhido; e, portanto, f não seria mais uma interpolação para a função fatorial.

Como já afirmamos acima, a identidade (8) nos permite *estender o domínio* da Função Gama para todos os números reais, com exceção dos inteiros não-positivos. Vejamos como isto se dá: inicialmente, note que, se $x \in]-1, 0[$, então $(x+1) \in]0, 1[$; de modo que, para $x \in]-1, 0[$, é claro que $\Gamma(x+1)$ existe e está bem-definido. Dessa forma, utilizando a equação funcional (8), definimos:

$$\Gamma(x) := \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \quad \forall\, x \in]-1, 0[\ ; \tag{10}$$

estendendo assim o domínio de Γ, de modo a incluir agora o intervalo $]-1,0[$. Por exemplo, segue de (10) e de (7) que:

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}. \tag{11}$$

O processo que acabamos de construir pode ser repetido indefinidamente. Para perceber isto, consideremos agora $x \in\ ]-2,-1[$, o que é equivalente a $(x+1) \in\ ]-1,0[$. Ora, como acabamos de incluir $]-1,0[$ no domínio da Função Gama, segue que, para $x \in\ ]-2,-1[$, obviamente $\Gamma(x+1)$ existe e, portanto, o lado direito da Equação (10) está novamente bem-definido. Logo, novamente através da Equação (10), definimos $\Gamma(x)$ agora para $x \in\ ]-2,-1[$, estendendo mais uma vez o domínio de Γ, de modo a incluir também esse intervalo.

Repetindo esse processo, a Função Gama fica bem-definida em todos os intervalos da forma $]-(n+1),-n[$, com $n \in \{0,1,2,3,\ldots\}$. A Figura 3 abaixo mostra o gráfico de Γ para $x \in\ ]-4,0[\ \setminus \{-1,-2,-3\}$.

Além disso, perceba que, pela própria estratégia que utilizamos para estender o domínio de Γ, acabamos estendendo também a validade de (8); de modo que, agora, vale:

$$\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x), \quad \forall\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,-3,\cdots\}. \tag{12}$$

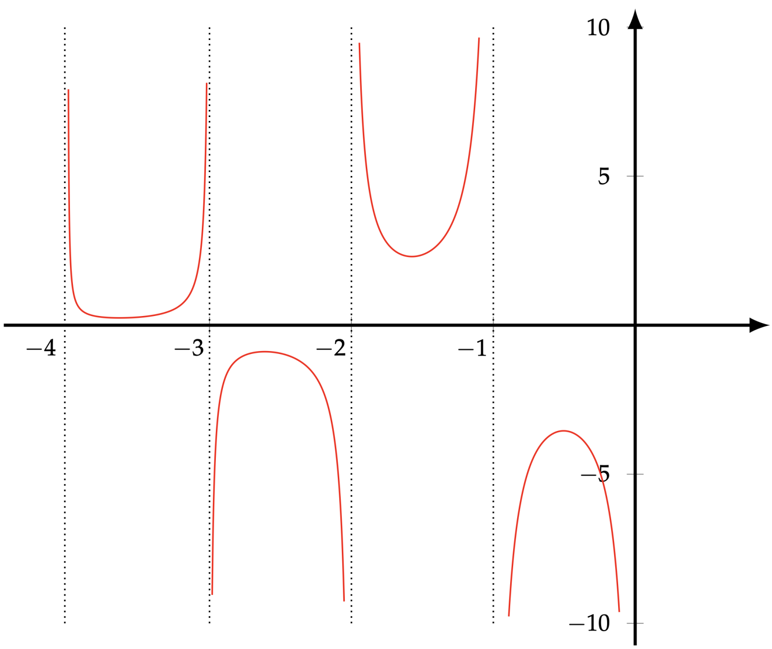

Figura 3: Gráfico da Função Γ para $x \in\ ]-4,0[\ \setminus \{-1,-2,-3\}$.

A parte do gráfico de Γ que está à direita da reta $x = -4$ é exibida na Figura 4.

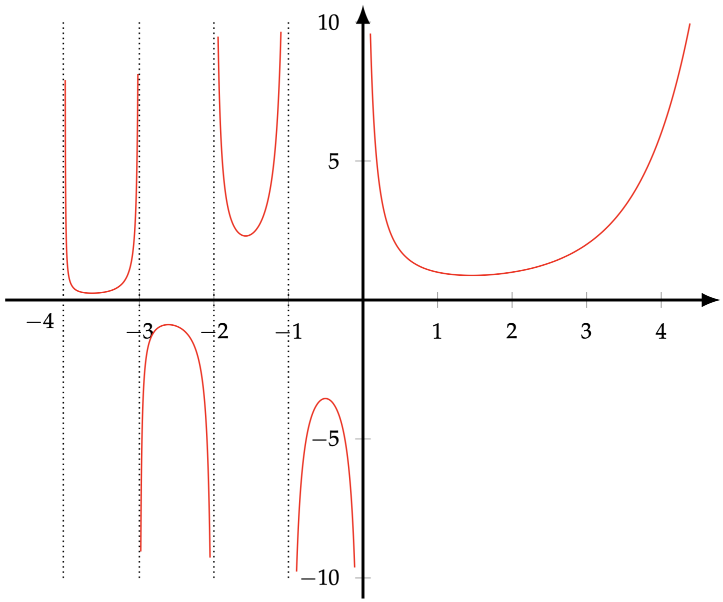

Figura 4: Parte do Gráfico da Função Γ à direita da reta $x = -4$.

O comportamento de Γ nos demais valores de seu domínio pode ser facilmente percebido a partir desta parte de seu gráfico. Note que as retas $x = -n$, com $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, são assíntotas (verticais) do gráfico de Γ. Valem também:

$$\lim_{x \to +\infty} \Gamma(x) = \lim_{x \to 0^+} \Gamma(x) = +\infty.$$

Além disso, quando $n \in \mathbb{N}$ é par, tem-se:

$$\lim_{x \to -n^+} \Gamma(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -n^-} \Gamma(x) = -\infty;$$

enquanto que, por outro lado, quando $n \in \mathbb{N}$ é ímpar:

$$\lim_{x \to -n^+} \Gamma(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -n^-} \Gamma(x) = +\infty;$$

4. A Relação entre a Função Gama e o Fatorial

Vamos agora relacionar a Função Gama com o fatorial de um número natural $n \geq 1$. Da Equação (8), decorre o seguinte

Teorema 2. *Seja* $n \in \mathbb{N}$. *Então:*

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{13}$$

Demonstração. A prova será feita por indução sobre n. Para $n = 1$, usamos a definição da Função Gama para escrever:

$$\Gamma(1+1) = \Gamma(2) = \int_0^\infty te^{-t}dt = \lim_{k \to \infty} \int_0^k te^{-t}dt.$$

Daí, usando integração por partes (com $u = t$), vê-se que (13) vale para $n = 1$:

$$\Gamma(1+1) = \lim_{k\to\infty} \left[-e^{-t}(t+1)\right]\Big|_0^k = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{k+1}{e^k}+1\right) = 1 = 1!.$$

Para o passo indutivo, suponhamos que a igualdade (13) seja válida para um certo $n = k$ (isto é, que $\Gamma(k+1) = k!$); e vamos provar então que daí decorre que (13) é verdadeira para $n = k+1$ (ou seja, que $\Gamma((k+1)+1) = (k+1)!$).

Esta tarefa fica fácil se lançarmos mão de (8). Com efeito, de (8) e da hipótese de indução, segue que:

$$\Gamma((k+1)+1) = (k+1)\cdot\Gamma(k+1) = (k+1)\cdot k! = (k+1)!.$$

$\square$

A Figura 5 apresenta, em um mesmo plano cartesiano, tanto um esboço do gráfico da *Função Gama* $\Gamma :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ (linha assinalada em azul), quanto do gráfico da translação da *Função Fatorial* (discreta) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(n) = (n-1)!$ (que consiste dos pontos assinalados na cor vermelha).

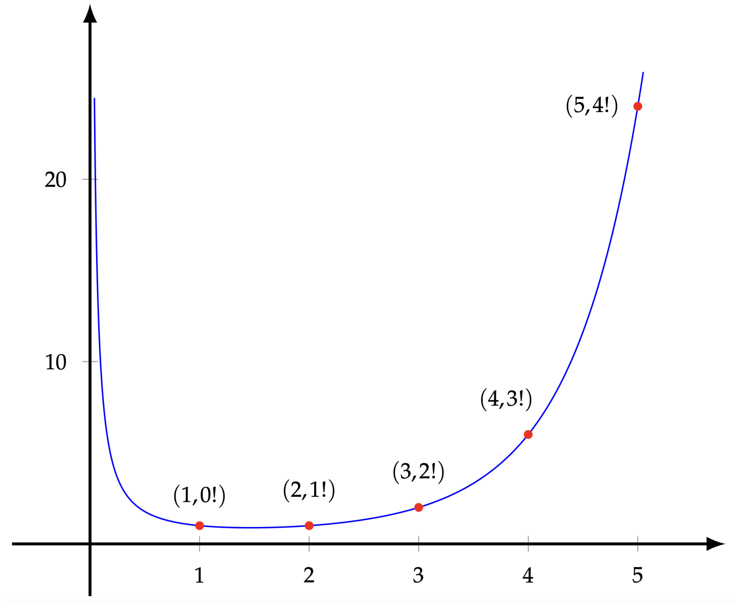

Figura 5: A Função Γ interpola os pontos da forma $(n,(n-1)!)$, com $n \in \mathbb{N}$.

Observando o gráfico acima, percebemos claramente que a Função Gama interpola, na verdade, a translação da Função Fatorial (discreta) dada por $n \longmapsto (n-1)!$, com $n \in \mathbb{N}$. Além disso, note que, devido ao domínio (que estendemos) de Γ, o lado esquerdo de (13) está definido não apenas para os números naturais, mas para qualquer número $n \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}_-$. Com isto, podemos utilizar (13) para definir o fatorial de números reais, excluindo-se apenas os inteiros negativos. O que nos leva à seguinte:

Definição 3 (Fatorial de Números Reais)**.** Para $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}_-$, o **fatorial de** x, denotado por $x!$, é o número real dado por:

$$x! := \Gamma(x+1). \tag{14}$$

Agora, o fatorial de qualquer número no conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Z}_-$ (ou seja, qualquer número real que não é um número inteiro negativo) passa a existir, e está bem-definido.

Finalmente, estamos prontos para apresentar uma resposta à *primeira* pergunta do título desse artigo. Com efeito, segue imediatamente da definição (14) e de (6) que:

$$0! := \Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1.$$

Do mesmo modo, de (14) e de (7) encontramos uma resposta para a *segunda* pergunta contida no título:

$$\frac{1}{2}! := \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{15}$$

Para o próximo exemplo, utilizaremos duas vezes a identidade (8) e também o resultado que obtivemos em (7):

$$\frac{3}{2}! := \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

E o fatorial de um número negativo, existe? De acordo com a definição de fatorial apresentada acima, se tal número negativo **não** for inteiro, então ele possui fatorial. Veja o exemplo abaixo, onde novamente lançamos mão de (7):

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! := \Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

No último exemplo, usando (14) e (11), obtemos:

$$\left(-\frac{3}{2}\right)! := \Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right) = \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}.$$

Dessa forma, todas as perguntas apresentadas no título deste artigo foram respondidas por meio da *Função Gama*.

5. Algumas Observações Importantes

Iniciamos esta seção comunicando ao estimado leitor que nos acompanhou até aqui, que esta seção pode ter sua leitura omitida sem nenhum prejuízo da sua parte, tendo em vista que os objetivos enunciados no início deste texto já foram (quase todos) alcançados. É que optamos por reservar esta seção para tecer algumas observações importantes (e, sobretudo, muito interessantes) a respeito da Função Gama, *que não eram essenciais* no caminho traçado até os objetivos definidos inicialmente. Acreditamos que, com esta estratégia, há duplo ganho: primeiro, porque, procedendo assim, tornamos a leitura mais suave do que seria, se estas observações aqui listadas fossem inseridas antes; e, segundo, porque ao final da leitura, é sempre interessante aguçar a curiosidade do leitor, motivando-o, assim, a procurar estudar mais profundamente, para além deste texto, o assunto em tela.

5.1. A Função Gama e as Equações Funcionais

Como vimos, a ideia de interpolação pode ser extremamente útil quando se deseja "estender o domínio" de determinados conceitos matemáticos. Como isto sempre foi bastante conhecido, não resta a menor dúvida de que um dos principais fatos que levaram Euler a considerar a Função Gama para estender o conceito de fatorial foi a igualdade (13) ($\Gamma(n+1) = n!$, para todo $n \in \mathbb{N}$), estabelecida no Teorema 2. Além disso, o fato de sabermos que a Função Gama é uma solução da Equação Funcional (8) para todo $x > 0$, como já tínhamos estabelecido no Teorema 1, tornou bem mais simples e rápida a demonstração do Teorema 2. Dito de outro modo: o fato de que $\Gamma(n+1) = n!$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é uma consequência imediata de $\Gamma(1) = 1$ e de (8). Por outro lado, como já alertamos e ilustramos na Figura 1, podemos encontrar uma infinidade de interpolações distintas para a função $n \longmapsto (n-1)!$, com $n \in \mathbb{N}$. Sendo assim, neste momento, uma pergunta que surge naturalmente é: *"Podemos, então, concluir que a Equação Funcional* (8) *possui uma infinidade de soluções?"*. A resposta a esta pergunta é a primeira observação que desejamos fazer aqui.

Teorema 3. *A Equação Funcional* (8) *possui infinitas soluções.*

Demonstração. Comecemos a prova recordando algumas definições bem conhecidas.

Uma função $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita *periódica* quando existe um número real T tal que $P(x+T) = P(x)$ para todo x real. O menor número positivo que T pode assumir, nesta igualdade, é denominado *período* de P e é costumeiramente denotado por p. Quando uma função P é periódica e seu período é p, dizemos também que P é p-*periódica*.

Agora, afirmamos que, se uma função f satisfaz a Equação Funcional (8) para todo número real positivo, então a função P definida por $P(x) := \dfrac{f(x)}{\Gamma(x)}$, para $x > 0$, é 1-periódica. Com efeito, se $x > 0$, então:

$$P(x+1) = \frac{f(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{xf(x)}{x\Gamma(x)} = \frac{f(x)}{\Gamma(x)} = P(x).$$

Segue daí que, qualquer função da forma $f(x) = P(x)\Gamma(x)$, em que P é uma função 1-periódica (para $x > 0$) é uma solução da Equação Funcional (8). De fato, para todo $x > 0$, temos:

$$f(x+1) = P(x+1)\Gamma(x+1) = P(x)\Gamma(x+1) = xP(x)\Gamma(x) = xf(x).$$

A prova estará completa ao mostrarmos que existe uma infinidade de funções 1-periódicas distintas. Ora, sabemos que a *função cosseno* é 2π-periódica; logo, a família de funções $P_m(x) = \cos(2m\pi x)$, onde m é qualquer inteiro não-nulo, é constituída por funções 1-periódicas, como se vê em:

$$\begin{aligned} P_m(x+1) &= \cos[2m\pi(x+1)] = \cos(2m\pi x + 2m\pi) = \\ &= \cos(2m\pi x)\cos(2m\pi) - \operatorname{sen}(2m\pi x)\operatorname{sen}(2m\pi) = \\ &= \cos(2m\pi x) = \\ &= P_m(x). \end{aligned}$$

E isto encerra a prova. □

Raciocinando em outra direção, é importante observar também que a Função Gama pode ser vista como solução de outras Equações Funcionais, diferentes de (8). Um exemplo importante e bastante conhecido de uma Equação Funcional que tem a Função Gama como solução (e que relaciona esta função com a *Função Seno*), é a identidade frequentemente citada na literatura como *Fórmula da Reflexão de Euler*; cuja prova pode ser encontrada em [1].

Teorema 4 (Fórmula da Reflexão)**.**

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{sen\ \pi x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}. \tag{16}$$

Identidades como (16) costumam ser interessantes. Podemos utilizá-la, por exemplo, para obter diretamente $\Gamma(\frac{1}{2})$ (veja (7)). De fato, tomando $x = \dfrac{1}{2}$ em (16), e lembrando que $\Gamma(x) > 0$, para todo $x > 0$, obtemos:

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \frac{\pi}{\text{sen}\ \frac{\pi}{2}} = \pi \qquad \Longrightarrow \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

5.2. Sobre Caracterizações da Função Gama

Revisitando a prova do Teorema 2 (de Interpolação), vemos que os dois principais argumentos que utilizamos ali foram $\Gamma(1) = 1$ e $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$, para todo $x > 0$ (veja (6) e (8)). Agora, note que a primeira destas igualdades é uma propriedade que pode ser expressa através de uma Equação Funcional; mais precisamente, da equação[4] $f(1) = 1$. Em outras palavras, a Função Gama é uma solução do *Sistema de Equações Funcionais* (S) dado por:

$$(S) \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(x+1) = x \cdot f(x), \quad \forall\ x > 0. \end{cases} \tag{17}$$

Por outro lado, a Função Gama *não* é a única solução do sistema (S). Retornemos à prova do Teorema 3. Ali, mostramos que as funções $f_m(x) = \cos(2m\pi x)\Gamma(x)$, onde $x > 0$ e $m \in \mathbb{Z}^*$, são soluções da segunda equação de (S). Além disso, elas também são soluções da equação $f(1) = 1$; de modo que o sistema (S) também possui infinitas soluções. De fato, para estas funções, temos:

$$f_m(1) = \cos(2m\pi \cdot 1)\Gamma(1) = \cos(2m\pi) = 1, \quad \forall\ m \in \mathbb{Z}^*.$$

Assim, as condições exigidas em (S) são *insuficientes* para fornecer uma **caracterização** da Função Gama. Em Matemática, a terminologia **caracterização do objeto** X é utilizada para se referir a um conjunto de condições que são “logicamente equivalentes” à definição de X; isto é, são condições que asseguram a **existência** e **unicidade** de X. Dito de outro modo, o objeto X satisfaz (existência) a esse conjunto de condições, e, por outro lado, *apenas* X as satisfaz (unicidade). Ainda, uma caracterização de X é um conjunto de *condições necessárias e suficientes* que um dado objeto precisa satisfazer para que seja reconhecido como X. Além disso, note que, mesmo sabendo-se que uma dada caracterização identifica um objeto matemático de uma maneira única, é possível que existam várias caracterizações diferentes para um único objeto matemático. No caso em tela, (S) é um conjunto de condições necessárias, porém, não suficientes, para a Função Gama; logo, (S) não é uma caracterização para esse objeto.

Diante disto, a pergunta que se impõe agora é: *“Existe alguma condição que possa ser acrescentada ao sistema (S), de modo que o novo conjunto de condições assim obtido seja uma caracterização da Função Gama?”*. A resposta é afirmativa; e é oportuno salientar que *vários* artigos de pesquisa foram escritos a

[4] Essa condição seria denominada *Condição Inicial*, se estivesse associada a uma *Equação Diferencial*, ao invés de uma Equação Funcional.

esse respeito, apresentando desde uma até três caracterizações diferentes para a Função Gama. O leitor interessado poderá encontrar alguns exemplos destas em [15, 23, 2].

O exemplo de caracterização da Função Gama que vamos mostrar aqui foi apresentado em 1922, pelos matemáticos dinamarqueses *Harald Bohr* (1887-1951) (irmão do ilustre físico ganhador do Nobel de Física *Niels Bohr*) e *Johannes Mollerup* (1872-1937). Esta caracterização é conhecida, na literatura, como *Teorema de Bohr-Mollerup*. Eles utilizaram, para obter este resultado, a ideia de *função logaritmicamente convexa*. Para entender esta noção, precisamos primeiro de uma ideia mais simples: uma função f definida em $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ é *convexa* quando, para quaisquer $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, a parte do gráfico de f compreendida entre x_1 e x_2 está sempre *abaixo* do segmento de reta que une os pontos $(\mathrm{x}_1, \mathrm{f}(\mathrm{x}_1))$ e $(\mathrm{x}_2, \mathrm{f}(\mathrm{x}_2))$. Veja a Figura 6.

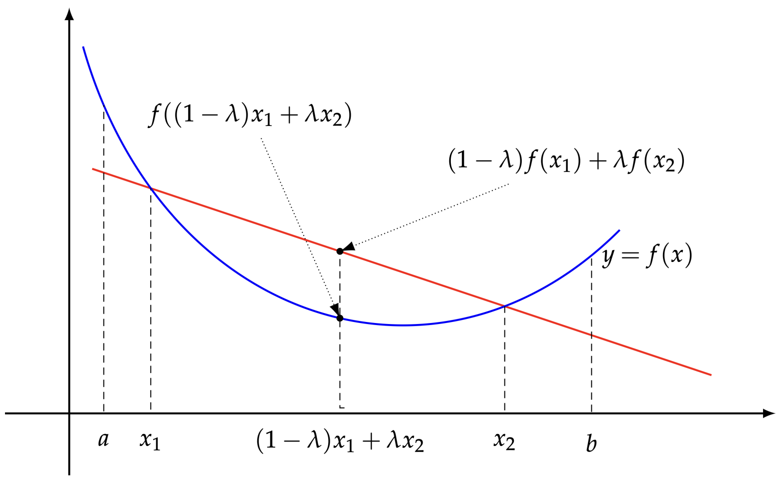

Figura 6: Função Convexa.

Em termos matematicamente precisos, temos as definições seguintes.

Definição 4 (Função Convexa e Função Logaritmicamente Convexa)**.** Uma função $\mathrm{f} : [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita uma função:
(1) *convexa em* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ quando, para quaisquer $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, e qualquer $\lambda \in [0, 1]$, vale:

$$\mathrm{f}((1-\lambda)\mathrm{x}_1 + \lambda \mathrm{x}_2) \leq (1-\lambda)\mathrm{f}(\mathrm{x}_1) + \lambda \mathrm{f}(\mathrm{x}_2); \tag{18}$$

(2) *logaritmicamente convexa em* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ (ou, apenas, $\ln$-*convexa*) quando $\ln \mathrm{f}$ é convexa em $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.

Note que uma função pode ser convexa e, ao mesmo tempo, não ser $\ln$-convexa: $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2$ é convexa; enquanto que, tomando logaritmos, encontramos daí: $\ln \mathrm{f}(\mathrm{x}) = 2 \ln \mathrm{x}$, e esta função claramente não é convexa, para $\mathrm{x} > 0$. Entretanto, a noção de $\ln$-convexidade é "mais forte" que a de convexidade: toda função $\ln$-convexa é convexa. A prova deste fato é simples[5], e pode ser encontrada em [2].

O *Teorema de Bohr-Mollerup* afirma precisamente que, dentre todas as soluções do sistema (S), a Função Gama é a **única** que é $\ln$-convexa para $\mathrm{x} > 0$. Veja, na Figura 7, o gráfico da função $\ln \Gamma$, para $\mathrm{x} > 0$.

[5]Primeiro, prova-se que a composição de uma função convexa crescente com uma função convexa é uma função convexa; em seguida, basta notar que, se $\ln \mathrm{f}$ é convexo, então $\mathrm{f} = \mathrm{e}^{\ln \mathrm{f}}$ também o é, uma vez que e^{x} é uma função convexa crescente.

Teorema 5 (**Bohr-Mollerup**). *Seja* $f : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ *uma função que é uma solução de (S). Se* $\ln f$ *é convexa, então* $f(x) = \Gamma(x)$, *para todo* $x > 0$.

Demonstração. Veja em [1]. □

Por estabelecer uma caracterização particularmente muito útil[6], alguns autores adotam as três condições, que estão presentes nas hipóteses do teorema acima, como a *definição* da Função Gama. Para mais detalhes, veja [1, 2]. Esta foi a abordagem utilizada pelo grupo *Bourbaki*.

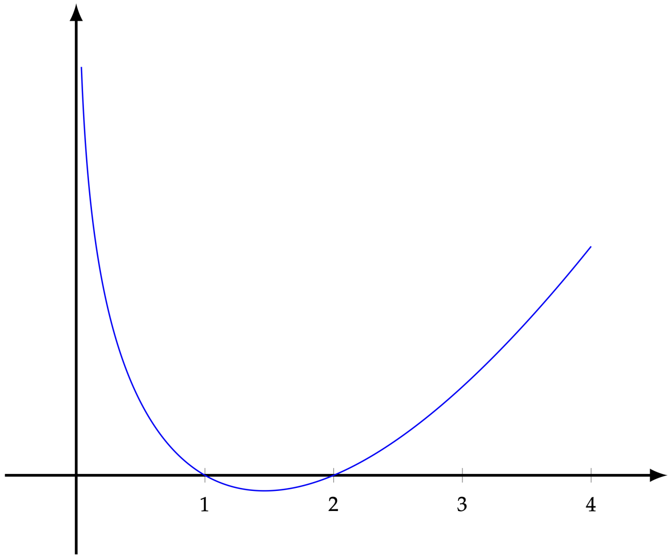

Figura 7: Gráfico da Função $\ln \Gamma$, para $x > 0$.

6. Algumas Breves Reflexões Didáticas

Embora os argumentos acima apresentados para responder às perguntas que aparecem no título deste texto não sejam tão simples, são totalmente acessíveis à compreensão de qualquer professor de Matemática. Mas... e quanto ao aluno? Que resposta(s) apresentar a um aluno que tenha suscitado tais indagações? Será que, para uma resposta "satisfatória", seria necessário falar sobre a Função Gama, sobre Integrais Impróprias, e tudo o mais aqui exposto? Obviamente, a resposta é: "depende". Se a pergunta veio de um estudante de um curso de graduação em Matemática, então a sua compreensão dos argumentos aqui apresentados seria totalmente factível; entretanto, se quem pergunta é um aluno do Ensino Médio (onde surge pela primeira vez a noção de fatorial), então apresentar essa mesma argumentação não nos parece minimamente razoável, uma vez que criaria um salto epistemológico intransponível para ele.

Apresentaremos, a seguir, alguns argumentos que podem ser utilizados no Ensino Médio, no sentido de fornecer alguma justificativa para a "convenção" $0! = 1$.

[6] O Teorema de Bohr-Mollerup é interessante e útil porque é relativamente fácil estabelecer a $\ln$-convexidade da Função Gama a partir da expressão que usamos aqui, para defini-la (uma vez que as derivadas desta expressão podem ser calculadas por diferenciação direta sob o sinal de integral).

Um argumento bastante utilizado se baseia no conceito de *permutação*. Como consequência imediata do *Princípio Fundamental da Contagem*, vê-se que $n!$ é o número de formas diferentes de rearranjar os elementos de um conjunto com n elementos distintos; isto é, é a quantidade de agrupamentos **ordenados** distintos que podem ser formados com n elementos distintos. Com isso em mente, por exemplo, se um conjunto tem 3 elementos, digamos $A = \{a, b, c\}$, então podemos rearranjar seus elementos de 6 maneiras diferentes: $(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b)$ e (c, b, a). Desse modo, $3! = 6$. Seguindo esse raciocínio, se um conjunto tem apenas 1 elemento, então só há um modo de rearranjar seus elementos; portanto, $1! = 1$. Por fim, se um conjunto não tem elemento algum, de quantos modos podemos rearranjar seus elementos? Ora, o fato de não ser possível rearranjar os elementos de um conjunto vazio pode ser considerado ainda uma forma particular de arranjo. Neste ponto, penso que estamos diante de um problema: o aluno que questionou sobre $0! = 1$ vai concordar com a validade dessa última afirmação? Bom, caso aceitemos que não ter como permutar os elementos de um conjunto (justamente por ele não ter elementos) conta como uma permutação, então, devemos ter $0! = 1$.

Outro argumento, bastante semelhante ao anterior, está apoiado também na *Análise Combinatória*. Lembre-se que, se denotarmos por $C_{n,p}$ o número de combinações simples, isto é, o número de subconjuntos distintos que podem ser formados com p elementos distintos cada, escolhidos de um conjunto com n elementos distintos (com $n \geq p$), então, é bem conhecido que:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}. \tag{19}$$

O que acontece com essa "fórmula" quando $n = p$? Consideremos novamente o conjunto $A = \{a, b, c\}$. Quantos são os possíveis subconjuntos distintos de A com três elementos? Recordemos que, quando se trata de conjuntos, a ordem dos elementos é irrelevante; de modo que, por exemplo, $\{a, b, c\}$ e $\{c, b, a\}$ denotam o mesmo conjunto. A resposta, aqui, é evidente: teremos apenas **um** subconjunto; a saber, o próprio A. Logo, temos que $C_{3,3} = 1$. Mas, por outro lado, fazendo $n = p = 3$ no lado direito de (19), obtemos $\dfrac{3!}{3!0!} = \dfrac{1}{0!}$. Assim, para que (19) seja válida não só para $n > p$, mas também para $n = p$, é necessário que se tenha $\dfrac{1}{0!} = 1$, o que, claramente, implica em $0! = 1$.

Resta claro que cada argumento apresentado tem vantagens e desvantagens, cabendo a cada professor a decisão de optar por um ou outro, ou até mesmo, elaborar um novo.

7. Considerações Finais

A história do surgimento da Função Gama mostra que ela nasce de um problema simples: o de estender o conceito de fatorial para além dos números naturais. Se avançássemos um pouco mais nesse assunto, observaríamos que o desejo de estender ainda mais o conceito de fatorial, de modo a fazer sentido o fatorial de números complexos, impulsionou, no século XIX, o desenvolvimento da teoria sobre Funções de uma Variável Complexa. Esse processo histórico mostra que a Matemática foi sendo construída por diversos homens ao longo dos séculos, como fruto de inquietações e necessidades impostas, às vezes, pelo mundo real, e, em outras vezes, pela própria Matemática; ou seja, mostra uma ciência que não nasce pronta e acabada, como alguns livros didáticos podem dar a falsa impressão. Essa ideia de uma Matemática viva e em constante evolução vai de encontro à primeira dentre as *Competências Específicas de Matemática para o Ensino Fundamental*, constantes na BNCC – Base Nacional Comum Curricular, publicada pelo MEC em 2018: ,

> *Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.* (Brasil, 2018, p.267)

Para o Ensino Médio, a BNCC estabelece cinco Competências Específicas a serem desenvolvidas no ensino de Matemática; sendo a terceira delas: ,

> *Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.* (Brasil, 2018, p.531)

Sobre essa Competência, o texto da BNCC, (Brasil, 2018, p.535) ainda orienta que: *"Deve-se ainda ressaltar que os estudantes também precisam construir significados para os problemas próprios da Matemática."*

Nesse sentido, essa tentativa de trazer significado à definição $0! := 1$, favorece o desenvolvimento dessa competência específica, uma vez que promove uma Educação Matemática que vai além da simples memorização de fórmulas, contribuindo assim para o desenvolvimento de conhecimentos e habilidades que permitam aos alunos pensar de forma crítica, significativa e reflexiva em diferentes contextos.

Referências

[1] Artin, Emil. *The Gamma Function*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964.

[2] Bonnar, James. *The Gamma Function - Treasure Trove of Mathematics*. Danvers: Independently Published, 2017.

[3] Boyer, Carl. *História da Matemática*. São Paulo: Blucher, 2012.

[4] Braga, Carmen Lys Ribeiro. *Notas de Física-Matemática: Equações Diferenciais, Funções de Green e Distribuições*. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

[5] Brasil. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.

[6] Cajori, Florian. *A History of Mathematical Notations - Two Volumes Bound As One*. New York: Dover Publications, 2013.

[7] Cajori, Florian. *History of Symbols for* $\underline{n}$=*Factorial*. Isis, v. 3, n. 3, p. 414-418, 1921.

[8] Davis, Philip J. *Leonhard Euler's Integral: A Historical Profile of the Gamma Function*. The American Mathematical Monthly, v. 66, n. 10, p. 849-869, 1959.

[9] Euler, Leonhard. *De Progressionibus Transcendentibus Seu Quarum Termini Generales Algebraice Dari Nequeunt*. Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, v. 5, p .36-57, 1738.

[10] Farrell, O. J., Ross, B. *Solved Problems in Analysis.* New York: Dover Publications, 2013.

[11] Fuss, Paul Heinrich. *Correspondance Mathématique Et Physique De Quelques Célèbres Géomètres Du XVIIIème Siècle.* Saint-Pétersbourg: L'Académie Impériale des Sciences, 1843. Disponível em: <http://eulerarchive.maa.org/correspondence/fuss/>. Acesso em: 14 de março de 2025.

[12] Gronau, Detlef. *Why is the gamma function so as it is?* Teaching Mathematics and Computer Science, v. 1, n. 1, p. 43-53, 2003.

[13] Juskevic, A. P.; Winter, E. (eds.) *Leonhard Euler und Christian Goldbach - Briefwechsel 1729-1764*. Berlin: Akademie Verlag, 1965.

[14] Kramp, Christian. *Élémens d'Arithmétique Universelle*. Cologne: de l'Imprimerie de Th. F. Thiriart, 1808.

[15] Laugwitz, Detlef; Rodewald, Bernd. *A Simple Characterization of the Gamma Function*. The American Mathematical Monthly, v. 94, n. 6, p. 534-536, 1987.

[16] Mattmüller, Martin; Lemmermeyer, Franz (eds.) *Correspondence of Leonhard Euler with Christian Goldbach - Vol. 1*. Basel: Birkhäuser Basel, 2015.

[17] Mattmüller, Martin; Lemmermeyer, Franz (eds.) *Correspondence of Leonhard Euler with Christian Goldbach - Vol. 2*. Basel: Birkhäuser Basel, 2015.

[18] Miller, Steven J. *The Probability Lifesaver: All the Tools You Need to Undestand Chance*. Princeton: Princeton University, 1974.

[19] Remmert, Reinhold. *Classical Topics in Complex FunctionTheory*. Graduate Texts in Mathematics 172. New York: Springer-Verlag, 1998.

[20] Sandifer, Charles Edward. *How Euler Did It*. Washington: The Mathematical Association of America, 2007.

[21] Sandifer, Charles Edward. *How Euler Did Even More*. Washington: The Mathematical Association of America, 2015.

[22] Sandifer, Charles Edward. *The Early Mathematics of Leonhard Euler*. Washington: The Mathematical Association of America, 2007.

[23] Shen, Yuan-Yuan. *On Characterizations of The Gamma Function.* Mathematics Magazine, v. 68, n. 4, p. 301-305, 1995.

[24] Christian Kramp, *Mactutor*. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kramp/>. Acesso em: 25 de fevereiro de 2025.

Míriam Saldanha Carneiro
Universidade do Estado de Mato Grosso
<miriam.saldanha@unemat.br>

Marco Antônio de A. Fernandes
Universidade do Estado de Mato Grosso
<marcoaaf@unemat.br>

Karine S. Mazzini
Escola Estadual Cívico Militar Senador Mário Motta
<karinescatolinmazzini@gmail.com>

Recebido: 09/04/2024
Publicado: 22/05/2025